

УДК 004.021

Мехедов Є.В.

Національний технічний університет України «Київський Політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

## ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ПОБУДОВИ МАП РЕЛЬЄФУ НАЗЕМНОЇ НАВІГАЦІЇ

**Мехедов Є.В. Порівняння методів інтерполяції для побудови мап рельєфу наземної навігації.** У статті розглянуто основні методи інтерполяції, які можна застосовувати для побудови мап рельєфу наземної навігації. Розглянуто детерміновані методи інтерполяції, геостатистичні методи інтерполяції.

**Ключові слова:** інтерполяція, геостатичні методи, лінійна інтерполяція, поліном, детерміновані методи інтерполяції.

**Мехедов Е.В. Сравнение методов интерполяции для построения карт рельефа наземной навигации.** В статье рассмотрены основные методы интерполяции, которые можно применять для построения карт рельефа наземной навигации. Рассмотрены детерминированные методы интерполяции, геостатистические методы интерполяции.

**Ключевые слова:** интерполяция, геостатические методы, линейная интерполяция, полином, детерминированные методы интерполяции.

**Mekhedov Y.V. Comparison of interpolation methods for plotting maps of land navigation relief.** The article describes the basic methods of interpolation, which can be used to build maps of land navigation. Consider deterministic interpolation methods, geostatistical interpolation methods.

**Keywords:** interpolation, geostatic methods, linear interpolation, polynomial, deterministic interpolation methods.

**Постановка наукової проблеми.** В нинішній час моделювання рельєфу, його аналіз і вивчення за побудованими моделями поступово стають невід'ємною частиною досліджень в науках про Землю (геологія, тектоніка, гідрологія, океанологія, кліматологія тощо), в екології та різноманітних інженерних проектах. Комп'ютерна обробка просторових даних знаходить широке застосування при аналізі поширення ділянок забруднень, у моделюванні родовищ. Головна проблема, з якою стикаються фахівці, що займаються моделюванням в ГІС - побудова найбільш точної з можливих поверхонь на основі існуючих опорних точок, поряд з оцінкою помилок інтерполяції і відхилень в значеннях поверхні. Тому вивчення методів інтерполяції для побудови карт рельєфу наземної навігації є дійсно актуальним напрямком досліджень.

**Аналіз досліджень.** Проблемам оцінки придатності різних моделей інтерполяції для побудови мап рельєфу для наземної навігації присвячений цілий ряд досліджень російських [1, 2] і українських [3,4] вчених. Зокрема, в роботі [1], присвяченій огляду сучасних підходів до побудови карт рельєфу, вказується на наступний ряд методів геостатистичного моделювання за спаданням точності: РК (регресійний кригінг), СОК (кокригінг), (ординарний кригінг) ОК, (байєсівський кригінг) ВК (блоковий кригінг), IDW (метод зворотних зважених відстаней). Однак у науковій літературі є недостатньо відомостей про розробку даного напрямку досліджень на території України.

**Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів.** Майже завжди вибірки випадкових чисел (отримані в результаті експерименту або згенеровані в рамках деяких методів, зберігаються на комп'ютерах у вигляді масивів, тобто дискретних даних  $y_i(x_i)$ ). Розв'язуючи різного роду задач виникає необхідність оперувати неперервною випадковою функцією  $y(x)$  однієї або декількох змінних, що відповідає неперервному випадковому процесу. Для отримання  $y(x)$  необхідно побудувати інтерполяційну залежність в проміжках між точками.

Наприклад, інтерполяція, екстраполяція являють собою об'єднання точок вибірки даних  $(x_i, y_i)$  кривої тієї або іншої ступені гладкості [5].

По визначенню, інтерполяція означає побудову функції  $f(x)$ , яка апроксимує залежність  $y(x)$  в проміжних точках (між  $x_i$ ).

В точках  $x_i$  значення інтерполяційної функції повинні співпадати із вхідними даними, тобто  $f(x_i) = y_i$ .

Методи інтерполяції дозволяють обчислити поверхню по точковим вимірюванням і отримати (передбачити) значення змінної для кожної точки ландшафту. У спільному вигляді розглядається дві групи методів інтерполяції: детерміновані і геостатистичні.

Всі методи при побудові поверхні ґрунтуються на припущенні про подібність прилеглих точок випробування (елементів вибірки).

Детерміновані методи інтерполяції використовують математичні функції (залежності).

Геостатистичні методи базуються і на математичних, і на статистичних функціях, які можуть бути використані для побудови поверхонь і оцінки точності (невизначеності) прогнозів.

Методи детермінованої інтерполяції будують поверхні по точковим вимірюванням з урахуванням або протяжності подібності (наприклад, метод зворотної зваженої відстані), або ступеня згладжуваності (наприклад, методи радіальних функцій).

Методи геостатистичної інтерполяції (такі, як кригінг) враховують статистичні властивості точок вимірювань. Геостатистичні методи кількісно визначають просторові автокореляції між точками вимірювань і беруть до уваги просторове розташування точок випробування.

Найпростіший вид інтерполяції – це кусково-постійна. Суть її полягає в тому, що на кожному проміжку між експериментальними точками  $f(x)$  являє собою константу, яка дорівнює значенню випадкової величини на лівій (рис.1) або рідше правій границі.

Мінус такого підходу заключається в тому, що ні отримана інтерполяція, ні її похідна не являються неперервними функціями. Трохи складніше виглядає кусково-лінійна інтерполяція, яка представляє шукану залежність у вигляді ламаної лінії. Інтерполяційна функція  $f(x)$  складається із відрізків прямих, які з'єднують дані «від точки до точки».

Формула кусково-лінійної інтерполяції, яка, в свою чергу, є многочленом Лагранжа і виглядає наступним чином:

$$f(x) = y_i \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \quad (1.1)$$

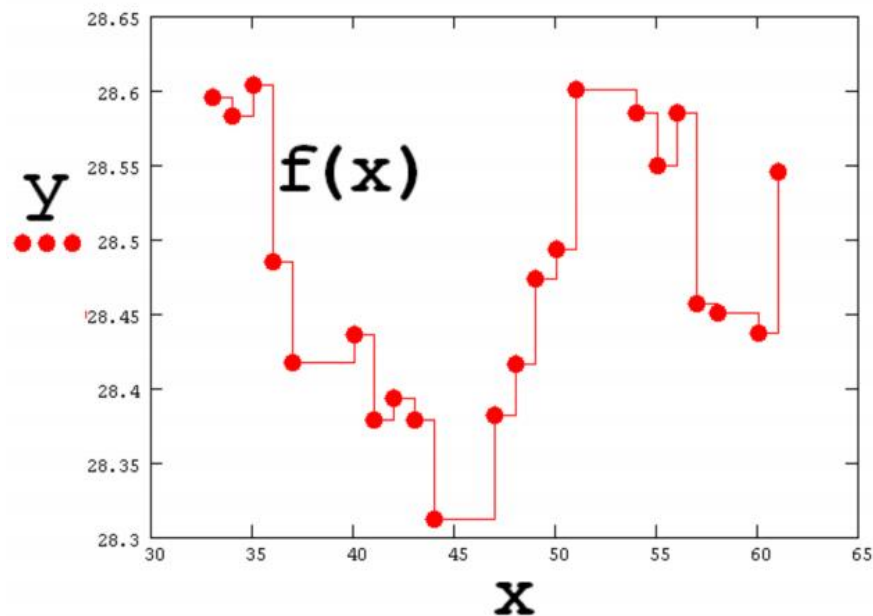


Рис.1. Кусково-лінійна інтерполяція

Сплайн інтерполяція. У більшості практичних застосуваннях бажано з'єднати експериментальні точки не ламаною лінією, а гладкою кривою. Краще за все для цих цілей підходить інтерполяція сплайнами, тобто фрагментами поліномів.

Сенс сплайнінтерполяції полягає в тому, що в кожному проміжку між вузловими точками(на кожному кроці інтерполяції) здійснюється апроксимація у вигляді певної поліноміальної залежності  $f(x)$  [6,7].

При цьому для кожного кроку виходить свій поліном, причому його коефіцієнти підбираються такими, щоб на границях кроку виконувались умови зшивки. А саме, якщо застосовуються сплайни у вигляді поліномів ступеня  $m$ , то нескладно показати, що їх коефіцієнти можна вибрати так, щоб забезпечити неперервність похідних порядку до  $(m - 1)$ -й включно [8].

Найчастіше застосовуються кубічні сплайни, тобто поліноми третього степеню (кубічні параболи):

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1.2)$$

На рис.2 представлений приклад кубічної сплайн інтерполяції.

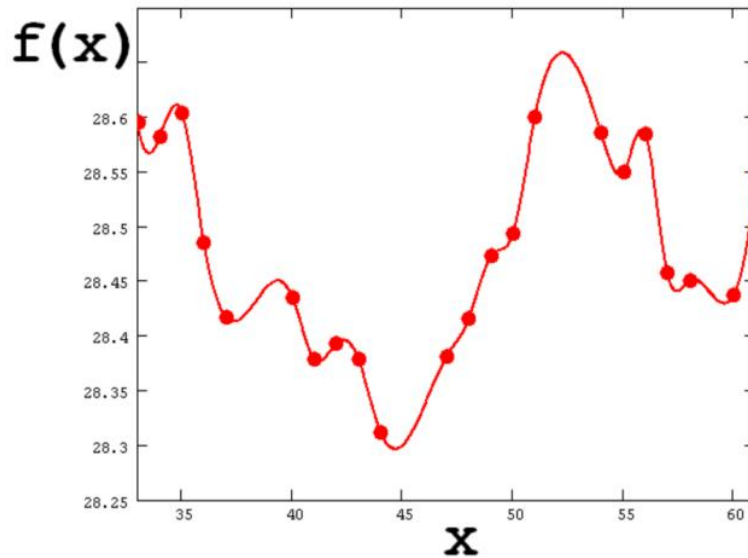


Рис.2. Кубічна сплайн-інтерполяція

Багатовимірна інтерполяція означає побудова функції, яка проходить через точки, що задані не на площині, а в просторі (трьох-, чотирьохвимірному і т.д.).

Таким чином, замість залежності  $y_i = y(x_i)$ , яку ми апроксимуємо функцією  $f(x)$ , потрібно побудувати інтерполяції по заданих  $\omega(x_i, y_i \dots)$ , тобто знайти функцію декількох координат  $f(x, y \dots)$ .

В двовимірному випадку аргументів всього два (наприклад,  $x$  та  $y$ ). Якщо вузли розташовані в формі правильної сітки, наприклад, у двовимірному випадку, у вигляді прямокутної сітки, то із побудовою багатовимірної інтерполяції принципіальних проблем не виникає [8].

Найпростіші типи інтерполяції – це кусково-постійна (проілюстровано на рис. 3) і кусково-планарна (принцип її побудови проілюстрований на рис. 4, на якому зображений графік функції, що інтерполюється на елементарному фрагменті сітки).

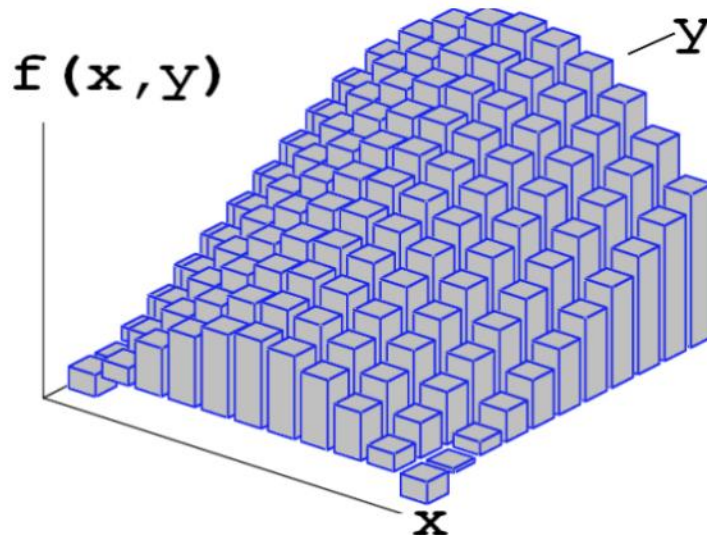


Рис.3. Кусково-постійна двовимірна інтерполяція

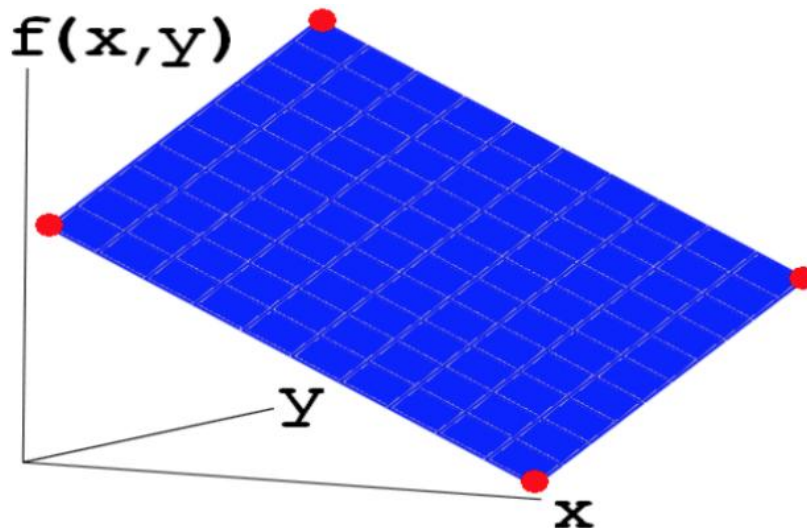


Рис.4. Кусково-планарна інтерполяція

Розглянемо детерміновані і геостатистичні методи інтерполяції.

Серед детермінованих методів інтерполяції використовуються такі методи, як метод зважених відстаней (Inverse Distance Weighting, IDW); локальна поліноміальна інтерполяція (Local Polynomial Interpolation, LPI) і метод радіальних базисних функцій (Radial Basis Functions, RBF), а серед геостатистичних – простий кригінг (Simple Kriging, SK), ординарний кригінг (Ordinary Kriging, OK), універсальний кригінг (Universal Kriging, UK) і емпіричний байєсовський кригінг (Empirical Bayesian Kriging, EBK).

IDW є одним з найбільш часто застосовуваних детермінованих методів інтерполяції при побудові мап рельєфу. Його зручно використовувати, щоб фіксувати ступінь локальної зміни поверхні, необхідну для аналізу. IDW визначає значення комірки за допомогою лінійно-зваженого набору комбінацій точок вибірки. Призначена вага є функцією відстані від вхідної точки до місця розташування вихідних комірок.

Чим більше відстань, тим менший вплив на інтерпольовану клітинку надає вихідне значення. Так як IDW не передбачає обчислення стандартних помилок інтерполяції, обґрунтування використання цієї моделі є проблематичним. Інтерпольоване значення при застосуванні методу IDW визначається за формулою:

$$z(x_0) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{h_{ij}^\beta}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_{ij}^\beta}} \quad (1.3)$$

де  $z(x_0)$  - інтерпольоване значення;

$n$ -загальна кількість значень даних вибірки;

$x_i$ -і-значення даних;

$h_{ij}$ -відстань між інтерпольованим значенням і значенням даних вибірки;

$\beta$  – вагове значення.

Інтерполяція за методом локальних поліномів генерує безліч поліномів, кожен з яких підбирається до певної околиці. Околиця пошуку може бути визначена розміром і формою, числом сусідів відомих значень і конфігурацією сектора пошуку. Інтерполяція за методом локальних поліномів чутлива до розміру околиці пошуку, аневеликі околиці пошуку можуть створювати на інтерпольованій поверхні порожні області.

Дуже часто даний метод інтерполяції використовують при інтерполяції значень для поверхні з мінливою формою рельєфу.

Радіальні базисні функції (RBF) являють собою жорсткі інтерполятори, які створюють згладжені поверхні. Вони дають хороші результати для плавно мінливих значень.

Оскільки інтерполятори є жорсткими, радіальні базисні функції можуть бути локально чутливі до випаданих значень (тобто поверхня буде містити локально високі або низькі значення). Метод RBF являє собою сімейство з п'яти методів детермінованої точної інтерполяції: тонкоплівковий сплайн (TPS), сплайн з напругою (SPT), повністю регуляризований сплайн (CRS), багатоквадратична функція (MQ) і зворотня багато квадратична функція (IMQ).

Ординарний кригінг (ОК) припускає, що принаймні частину просторових варіацій, спостережуваних в природних явищах, можна змоделювати за допомогою випадкових процесів з використанням просторової автокореляції. Прийоми роботи кригінга можуть бути використані для опису та моделювання просторових структурних закономірностей, пророкування значень в невимірних місцях, оцінки похибки, пов'язаної з прогнозованими значеннями в невимірних місцях.

Для даного типу інтерполяції справедливі наступні рівняння:

$$z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i), \quad (1.4)$$

$$\sigma_k^2 = \mu + \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_0 - x_i), \quad (1.5)$$

де  $\lambda_i$ -ваги;  $\mu$ -постійна Лагранжа;  $\gamma(x_0 - x_i)$  - значення варіограми, відповідне відстані між  $x_0$  і  $x_i$ .

Універсальний кригінг (УК) використовується тоді, коли передбачається, що в даних є якась домінуюча тенденція (тренд), яку можна змоделювати за допомогою детерміністичної поліноміальної функції. Він може використовувати або варіограми, або коваріації (математичні форми, використовувані для вираження автокореляції), застосовувати перетворення враховувати похибку вимірювання. Інтерпольоване значення при застосуванні універсального кригінга визначається за формулою (1.6):

$$z(S) = \mu(S) + \varepsilon(S), \quad (1.6)$$

де  $\mu(s)$  - це деяка детермінована функція, описувана поліномом другого порядку;

$\varepsilon(s)$  - випадкова помилка, яка обчислюється шляхом віднімання полінома другого порядку з оригінальних даних.

Перевагою кригінгу є те, що він дає не тільки інтерпольовані значення, але й оцінку можливої помилки цих значень [9].

Простий кригінг (СК) передбачає використання для інтерполювання значень тієї ж моделі, що і кригінг універсальний, проте в його випадку показник  $M(s)$  є відомою константою.

Емпіричний байєсівський кригінг (ЕВК) відрізняється від інших методів кригінга використанням внутрішньої випадкової функції в якості моделі кригінга. У ЕВК можна аналізувати емпіричний розподіл оцінок параметрів, оскільки в кожному місці розташування розраховується безліч варіограм. Процес ЕВК неявно припускає, що оціночна напівваріантність є істинною варіограмою для інтерполяційної області і лінійним пророкуванням, яке включає в себе змінне просторове загасання.

У результаті виходить надійний нестационарний алгоритм просторових інтерполяційних геофізичних поправок. Для кожного розташування інтерполяція розраховується з використанням нової варіограми розподілу [10].

Порівняльна характеристика методів інтерполяції представлена у табл. 1.

Таблиця 1. Порівняльна характеристика методів інтерполяції для побудови мап рельєфу наземної навігації

	Назва методу	Відмінні особливості
1	Метод зворотних відстаней	Є досить швидким, але має тенденцію генерувати структури навколо точок спостережень з високими значеннями функції.
2	Метод Кригінга	Найбільш гнучкий і часто використовуваний, задається за замовчуванням. На множинах великого розміру він працює досить повільно.
3	Метод мінімуму кривизни	Генерує гладкі поверхні і для більшості множин експериментальних даних працює досить швидко.
4	Метод поліноміальної регресії	Використовується для виділення великих трендів і структур. Працює дуже швидко для множин будь-якого розміру, але не є точним інтерполяційним методом, оскільки згенерована поверхня не проходить через експериментальні точки.
5	Метод радіальних базисних функцій	Так само, як і метод Кригінга, є дуже гнучким і генерує гладку поверхню, що проходить через експериментальні точки.
6	Метод Шепарда	Подібний до методу зворотних відстаней, але як правило, не генерує структури типу "бичаче око", особливо коли заданий згладжуючий параметр.
7	Метод триангуляції з лінійною інтерполяцією	Генерує явні трикутні грані на графіку поверхні. Працює швидко якщо кількість значень задана від 250 до 1000.

**Висновки та перспективи подальшого дослідження.** Таким чином, в результаті написання статті були розглянуті основні методи інтерполяції, які можна застосувати для побудови мап рельєфу для наземної навігації. Кожен із розглянутих методів має свої переваги і недоліки і може бути використаний для різного типу задач побудови. Перспективи подальшого дослідження – визначення оптимального методу інтерполяції для кожного виду задач побудови мап рельєфу для наземної навігації.

1. В.П.Боровиков. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: для профессионалов (2-е издание) [Текст], СПб.: Питер, 2003. – 688 с.: ил
2. Дж. Форсайт, М.Мальком, К. Моулер. Машинные методы математических вычислений. [Текст] Изд-во "Мир". Москва. 1980.
3. Литвин О.М., Першина Ю.І. Reconstruction of 3-Objects with use of interpolation of function [Текст] / Conf. on Automation, Control, and Information Technology // Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів, Новосибірск. – 2005 р. – 274-276 с.
4. Литвин О.М. Інтерлінація та інтерфлетация функцій і структурний метод В.Л.Рвачова // Математичні методи і фізико-механічні поля – 2007. –50, №4 – С. 25-35.
5. Ancillary information improves kriging on soil organic carbon data for a typical karst peak cluster depression landscape / W. Zhang, K. L. Wang, H. S. Chen [and all] // J. Sci. Food Agric. – 2012. – Vol. 92. – P. 1094–1102.
6. Екстраполяція [Електронний ресурс] / Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Екстраполяція>
7. Інтерполяція сплайнами [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://statistica.ru/branches-maths/interpolyatsiya-splaynami-teor-osnovy/>.
8. Fedorov, V. V. Kriging and other estimators of spatial field characteristics (with special reference to environmental studies) / V. V. Fedorov // Atmospheric Environment. – 1986. – Vol. 23. – P. 175–184
9. Gouri, S. B. Comparison of GIS-based interpolation methods for spatial distribution of soil organic carbon (SOC) / S. B. Gouri, P. K. Shit, R. Maiti // Journal of the Saudi Society of Agricultural Sciences. – 2016. – Vol. 2. – P. 1–13.
10. Одномерная табличная интерполяция [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://old.exponenta.ru/soft/matlab/potemkin/book2/chapter8/interp1.asp>