УДК 510.589
Костючко С.М.
Луцький національний технічний університет

МОДЕЛЬ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ЧУТЛИВОСТИ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Костючко С.М. Модель параметричної чутливости нелінійних систем. Дана робота презентує метод дослідження параметричної чутливости нелінійних систем. Обчислення проводиться методами теорії електромагнітних кіл. Рівняння стану записані в нормальній формі Коші. Розглянута потреба введення матриці допоміжних змінних. Застосовується апарат загальної теорії нелінійних диференціальних рівнянь. Використовуються методи часового простору.
Ключові слова: математична модель, нелінійна система, параметрична чутливість, матриця.

Костючко С.Н. Модель параметрической чувствительности нелинейных систем. Данная работа представляет метод исследования параметрической чувствительности нелинейных систем. Вычисление производится методами теории электромагнитных цепей. Уравнения состояния записаны в нормальной форме Коши. Рассмотрена необходимость введения матрицы вспомогательных переменных. Применяется аппарат общей теории нелинейных дифференциальных уравнений. Используются методы временного пространства.
Ключевые слова: математическая модель, нелинейная система, параметрическая чувствительность, матрица.

Kostiuchko S.M. Parametric sensitivity model of nonlinear systems. This paper presents a method for investigating the parametric sensitivity of nonlinear systems. The calculation is made by methods of the electromagnetic circles theory. State equations are recorded in a normal Cauchy form. The necessity of introducing a matrix of auxiliary variables is considered. The apparatus of the nonlinear differential equations general theory is used. Time space methods are used.
Key words: mathematical model, nonlinear system, parametric sensitivity, matrix.

Вступ

Сучасна теорія та практика при проектуванні та експлуатації нелінійних систем потребує новітніх підходів та методів математичного моделювання для обчислення параметричної чутливості. При оптимальному проектуванні технічних систем проводять дослідження про вплив сталих параметрів на характеристики об'єкта. Саме функція чутливості демонструє цей вплив. Апарат теорії чутливості застосовуються для розв'язання досить широкого класу задач.

Сучасна теорія параметричної чутливості нелінійних систем ґрунтується на загальній теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Математична модель.

Кутова швидкість в усталеному стані матиме вигляд сталої величини. Саме на цьому етапі і виникає практичний інтерес до параметричної чутливості нелінійних систем. В разі необхідності кутову швидкість відносять до елементів колонки постійних параметрів $\boldsymbol{\lambda}$, яку знаходимо методом прискореного пошуку вимушених періодичних станів на попередньому етапі аналізу. Колонка невідомих матиме вигляд

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{I}\,. \tag{1}$$

Розрахунок функції параметричних чутливостей згідно з (1) проводимо згідно

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\,. \tag{2}$$

Використовуючи колонку допоміжних невідомих $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Psi}$, знайдемо функцію допоміжних чутливостей (2). Вибір косокутних координат проводимо, орієнтуючись на рівняння стану

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{dt} = \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Psi} - \mathbf{R}\mathbf{I}\,. \tag{3}$$

Диференціюючи (3) по $\boldsymbol{\lambda}$ отримаємо функцію $\boldsymbol{\chi}$:

$$\frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} = -(\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R}\mathbf{A})\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} - \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\Psi} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\mathbf{I}\,. \tag{4}$$

При взятті похідної $\partial\mathbf{U}/\partial\boldsymbol{\lambda}$ треба пам'ятати, що напруги обмотки ротора, як правило є нульовими, а статора звичайними фізичними величинами

© Костючко С.М.

$$u_{SA} = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi);\; u_{SB} = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi - 120^0)\,, \qquad (5)$$

де U_m, ω_0, φ – амплітуда, кругова частота та початкова фаза джерела напруги.

Елементами колонки $\boldsymbol{\lambda}$ є будь-які постійні параметри, які можуть бути функціями інших конструкційних постійних параметрів. Беручи похідні по $\boldsymbol{\lambda}$ за правилами диференціювання складних функцій обчислюємо параметричні чутливості згідно згаданих вище параметрів.

$\boldsymbol{\chi}$ знаходимо в процесі інтегрування (4). Важливим етапом є необхідність встановлення зв’язку між $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$, адже це дасть можливість перейти до функції основних параметричних чутливостей $\mathbf{S}$.

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{L}' \cdot \mathbf{I}\,, \qquad (6)$$

де $\mathbf{L}'$ – матриця статичних індуктивностей

$$\mathbf{L}' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline l_S + l_\tau & & l_\tau & \\ \hline & l_S + l_\tau & & l_\tau \\ \hline l_\tau & & l_R + l_\tau & \\ \hline & l_\tau & & l_R + l_\tau \\ \hline \end{array}\,, \qquad (7)$$

де $l_S = 1/\alpha_S$, $l_R = 1/\alpha_R$ – індуктивності розсіяння обмоток статора й ротора; $l_\tau = 1/\tau$ – основна індуктивність машини.

Продиференціювавши (6) по $\boldsymbol{\lambda}$, отримаємо

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}'^{-1}\left(\boldsymbol{\chi} - \frac{\partial \mathbf{L}'}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\mathbf{I}\right). \qquad (8)$$

Обертаючи матрицю (7), матимемо

$$\mathbf{L}'^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \alpha_S(\alpha_R + \tau) & & -\alpha_S\alpha_R & \\ \hline & \alpha_S(\alpha_R + \tau) & & -\alpha_S\alpha_R \\ \hline -\alpha_S\alpha_R & & \alpha_R(\alpha_S + \tau) & \\ \hline & -\alpha_S\alpha_R & & \alpha_R(\alpha_S + \tau) \\ \hline \end{array}\,. \qquad (9)$$

T одержують з рівняння

$$T = \frac{1}{\tau + \alpha_S + \alpha_R}\,, \qquad (10)$$

де α_S, α_R – обернені індуктивності розсіяння обмоток статора й ротора.

Матриця статичних індуктивностей у фазних координатах матиме вигляд

$$\mathbf{L}' = \begin{array}{|c|c|} \hline (l_S + l_\tau)\cdot 1 & l_\tau \boldsymbol{\Pi} \\ \hline \boldsymbol{\Pi}^{-1} l_\tau & l_R + \boldsymbol{\Pi}^{-1} l_\tau \boldsymbol{\Pi} \\ \hline \end{array}\,. \qquad (11)$$

Існують такі початкові умови $\mathbf{x}(0)$, які дають змогу виключити перехідну реакцію. Їх знаходимо використовуючи спільний алгоритм пошуку періодичного розв’язку рівняння (4) – метод прискореного пошуку вимушених періодичних станів.

Використовуючи косокутні координати, наведемо розширений вигляд рівняння електромаґнетного стану виконавчого пристрою.

© Костючко С.М.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_{SA} \\ i_{SB} \\ i_{RA} \\ i_{RB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_S(1-\alpha_S(T+b_A i_A)) & -\alpha_S^2 b_B i_A & -\alpha_S\alpha_R(T+b_A i_A) & -\alpha_S\alpha_R b_B i_A \\ -\alpha_S^2 b_A i_B & \alpha_S(1-\alpha_S(T+b_A i_A)) & -\alpha_S\alpha_R b_A i_B & -\alpha_S\alpha_R(T+b_B i_B) \\ -\alpha_S\alpha_R(T+b_A i_A) & -\alpha_S\alpha_R b_B i_A & \alpha_S(1-\alpha_S(T+b_A i_A)) & -\alpha_R^2 b_B i_A \\ -\alpha_S\alpha_R b_A i_B & -\alpha_S\alpha_R(T+b_B i_B) & -\alpha_R^2 b_A i_B & \alpha_S(1-\alpha_S(T+b_A i_A)) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{SA}-((2r_{SA}+r_{SC})i_{SA}+(r_{SC}-r_{SB})i_{SAB})/3 \\ u_{SB}-((r_{SC}-r_{SA})i_{SA}+(2r_{SB}+r_{SC})i_{SAB})/3 \\ -\omega(\psi_{RA}+2\psi_{RB})/\sqrt{3}-r_R i_{RA} \\ \omega(2\psi_{RA}+\psi_{RB})/\sqrt{3}-r_R i_{RB} \end{bmatrix}; \quad (12)$$

причому

$$\psi_{RA} = (i_{SA} + i_{RA})/\tau + i_{RA}/\alpha_R; \quad \psi_{RB} = (i_{SB} + i_{RB})/\tau + i_{RB}/\alpha_R. \quad (13)$$

На практиці користуватися періодичними розв’язками $\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(t+T)$, як функціональною залежністю є дуже незручно та складно. Здебільшого для такого дослідження користуються постійними числами. Такі числа можна знайти як середнє квадратичне функції $\mathbf{S}(t)$

$$S = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(t)^2\,dt}\,. \quad (14)$$

Інтеграл матриці береться як матриця інтегралів її окремих елементів.

Висновки

На відмінно від електричних кіл, теорія електромаґнетних кіл дає змогу записати диференціальні рівняння стану в нормальній формі Коші, що значно спрощує подальший аналіз математичних моделей нелінійних систем.

Задача аналізу виконавчих об’єктів нелінійних систем, при взаємодії електромаґнетних і механічних процесів, має практичне розв’язання лише в часовому просторі. Методи позачасового простору дають можливість знаходити лише електромаґнетні процеси при фіксованих значеннях механічних змінних.

1. Костючко С.М., Чабан В.Й. Параметрична чутливість нелінійних систем. Монографія. – Львів: Простір "М". – 2018. – 144 с. – ISBN 978-617-7501-42-7.
2. Tchaban V. The theory of electromagnetic circuits / V. Tchaban, O. Tchaban, Z. Tchaban, S. Kostiuchko / Computing in Science and Technology / edited by Tadeusz Kwater, Boguslaw Twarog. – Rzeszow, 2012/2013. – P. 34-55. – ISBN 978-83-7338-895-6.
3. Tchaban V. Mathematical modeling of nonsymmetrical transient and steady-state processes of induction motors / Vasil Tchaban, Serg Kostiuchko, Tadeusz Kwater / Computing in Science and Technology / edited by Tadeusz Kwater, Wlodzimier Zuberek. – Rzeszow, 2011. – P. 129-146. – ISBN 978-83-7583-378-2.
4. Костючко С.М. Розрахунок перехідних процесів двофазного асинхронного мотора. // Науковий журнал “Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво” – Луцьк: Видавництво ЛНТУ. – Вип. 27. – 2017. – С. 32-36
5. Чабан О.В., Костючко С.М., Міскевич О.І., Киричук А.А. Верифікація на основі числового експерименту двох методів дослідження параметричної чутливості. // Науковий журнал “Комп’терно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво” – Луцьк: Видавництво ЛНТУ. – Вип. 24-25. – 2016. – С. 119-123
6. Чабан В. Параметрична чутливість виконавчого мотора комп’ютерної системи управління / В. Й. Чабан, С. М. Костючко // Комп’ютерні системи та мережі: Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2013. – № 773. – С. 137-142.
7. Костючко С. Метод допоміжної параметричної чутливості виконавчих об’єктів систем керування / С. М. Костючко, В. Й. Чабан // Інформаційні системи та мережі: Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2014. – № 805. – С. 144-149.
8. Лишук В. Застосування методу Ейлера в задачах динаміки // Лишук В. Селепина Й., Ящинський Л., Костючко С. // Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – Луцьк, 2018. – №30-31. – С. 227-231.

© Костючко С.М.