УДК 517.51
Грінченко Л.Г.
Луцький національний технічний університет

НАЙКРАЩІ РІВНОМІРНІ НАБЛИЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНИМИ БАГАТОЧЛЕНАМИ

Грінченко Л.Г. Найкращі рівномірні наближення неперервних функцій узагальненими багаточленами. В роботі запропоновано два способи наближеної побудови багаточленів найкращого наближення. Розроблено підхід, який дозволяє за допомогою скінченної кількості кроків побудувати багаточлен найкращого наближення до функції $f(x)$ на множині, яка складається з скінченної кількості точок.

Ключові слова: багаточлени найкращого наближення, узагальнені багаточлени, багаточлени Чебишева.

Гринченко Л.Г. Наилучшие равномерные приближения непрерывных функций обобщенными многочленами. В работе предложено два способа приближенного построения многочленов наилучшего приближения. Представлен подход, который позволяет с помощью конечного количества шагов построить многочлен наилучшего приближения к функции $f(x)$ на множестве, которое состоит из конечного количества точек.
Ключевые слова: многочлены наилучшего приближения, обобщенные многочлены, многочлены Чебышева.

L. Grinchenko. Best universal approximations of continuous functions by generalized multiplications. Two methods of approximate construction of polynomials of best approximation are proposed. An approach is presented which, using a finite number of steps, allows us to construct a polynomial of best approximation to a function $f(x)$ on a set that consists of a finite number of points.
Key words: polynomials of best approximation, generalized polynomials, Chebyshev polynomials.

В практиці обчислювань, особливо при роботі на електронних обчислювальних машинах, часто доводиться зустрічатися з багатократними обчисленнями заданої функції $f(x)$, наприклад з обчисленнями значень елементарних функцій $e^x, \ln x, \sin x, \cos x$ і т.д. Вводити в машину ці функції у вигляді таблиць недоцільно, так як таблиці заповнюють пам'ять машини і на вибірку потрібних значень витрачається набагато більше часу. Доцільніше кожен раз обчислювати потрібне значення функції з заданою точністю ε, використовуючи якийсь алгоритм для її обчислення. Дуже часто для цього замінюють розглядувану функцію $f(x)$ іншою, легко обчислюваною функцією $\varphi(x)$ (наприклад, багаточленом), значення якої на всьому розглядуваному відрізку $[a;b]$ зміни x відрізняються від значень $f(x)$ не більше ніж на ε, і в процесі обчислень працюють з функцією $\varphi(x)$.

Основні результати.

1. Дано клас R функцій, визначених на відрізку $[a;b]$, і деяка підмножина $\overline{R}$ функцій цього класу. Для заданої функції $f(x) \in R$ і заданого числа $\varepsilon > 0$ відшукано функцію $\varphi(x) \in \overline{R}$, для якої має місце нерівність

$$\left| f(x) - \varphi(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in [a;b].$$

В якості R розглядається множина C неперервних функцій, а в якості $\overline{R}$ – деяка множина алгебраїчних або узагальнених багаточленів.

2. Для даної функції $f(x) \in R$ знайдено функцію $\varphi_0(x) \in \overline{R}$, для якої має місце рівність

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - \varphi_0(x) \right| = \inf_{\varphi \in \overline{R}} \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - \varphi(x) \right|,$$

тобто знайдено функцію найкращого наближення.

Нехай $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ – деякі $n+1$ лінійно незалежні функції із C. В якості $\overline{R}$ візьмемо сукупність лінійних комбінацій $\Phi(x)=\sum_{i=0}^{n} C_i\varphi_i(x)$ з дійсними коефіцієнтами. Елемент $\Phi_0(x)$, який належить $\overline{R}$, буде елементом найкращого наближення для $f\in R$, якщо

$$\sup_{x\in F}\left|f(x)-\Phi_0(x)\right|$$

набуває найменшого можливого значення.

Не існує скінченного алгоритму побудови багаточленів найкращого наближення для будь-якої заданої функції $f(x)$. Тому велике значення набувають методи наближеної побудови таких багаточленів. Подамо два способи побудови багаточленів.

Перший спосіб наближеної побудови багаточлена найкращого наближення. Нехай для функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a;b]$, необхідно побудувати багаточлен, близький до багаточлена найкращого наближення $P_n(x)$ в $H_n(P)$. Для побудови такого багаточлена візьмемо на відрізку $[a,b]$ $m+1$ точку ($m>n+1$)

$$x_j=a+j\frac{b-a}{m}\quad (j=0,1,2,\ldots,m). \tag{1}$$

Позначимо цю множину через F. Будуємо багаточлен найкращого наближення до $f(x)$ на F в $H_n(P)$. Цей багаточлен позначимо через $P_{n,m+1}(x)$. При $m\to\infty$ послідовність багаточленів $\left\{P_{n,m+1}(x)\right\}_{m=n+1,\ldots}$ рівномірно на $[a,b]$ збігається до $P_n(x)$.

Позначимо через $2L$ коливання функції $f(x)$ на $[a;b]$. Можна вважати, що

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=-\min_{x\in[a,b]} f(x),\ \text{тобто}\ -L\le f(x)\le L.$$

Бачимо, що

$$\left|P_{n,m+1}(x_j)\right|<L+E_n(f)\quad (j=0,1,2,\ldots,m). \tag{2}$$

Нехай $\left|P_{n,m+1}(x)\right|$ досягає на $[a;b]$ максимуму M_{m+1} в точці x^*. Серед точок x_j $(j=0,1,2,\ldots,m)$ знайдеться точка, віддалена від x^* не більше ніж на $\frac{b-a}{2m}$. Нехай це точка x_k. Тоді

$$P_{n,m+1}(x^*)-P_{n,m+1}(x_k)=(x^*-x_k)\left[\frac{d}{dx}P_{n,m+1}(x)\right]_{x=\xi}, \tag{3}$$

де ξ лежить між x^* і x_k.

Скористаємося нерівністю Маркова, яка стверджує, що якщо $P(x)$ – багаточлен степеня n, а $M=\max_{x\in[a,b]}\left|P(x)\right|$, то при $x\in[a;b]$

$$\left|P'(x)\right|<\frac{2n^2M}{(b-a)}. \tag{4}$$

Використовуючи цю нерівність, отримаємо:

$$\left|\frac{dP_{n,m+1}(x)}{dx}\right|<\frac{2n^2M_{m+1}}{b-a}. \tag{5}$$

Із (2), (3), (5) маємо:

$$M_{m+1}-L-E_n\left(f\right)\le P_{n,m+1}\left(x^*\right)-P_{n,m+1}\left(x_k\right)\le\frac{2n^2M_{m+1}}{b-a}\frac{b-a}{2}=\frac{n^2}{m}M_{m+1}.$$

Таким чином,

$$M_{m+1}\left(1-\frac{n^2}{m}\right)\le L+E_n\left(f\right).$$

Якщо $m>n^2$, то

$$M_{m+1}\le\frac{L+E_n\left(f\right)}{1-\frac{n^2}{m}}. \tag{6}$$

Нехай x – довільна фіксована точка відрізка $\left[a,b\right]$, а x_j – найближча до неї точка із розглядуваної системи $x_0,x_1,x_2,\dots,x_m$.

Знову, застосовуючи нерівність Маркова (4) і оцінку (6) для M_{m+1}, маємо:

$$\left|P_{n,m+1}\left(x\right)-P_{n,m+1}\left(x_j\right)\right|=\left(x-x_j\right)\left[\frac{dP_{n,m+1}\left(\xi\right)}{dx}\right]\le\frac{b-a}{2m}\frac{2n^2M_{m+1}}{b-a}\le\frac{n^2}{m}\frac{\left(L+E_n\left(f\right)\right)}{1-\frac{n^2}{m}}=$$

$$=\left[L+E_n\left(f\right)\right]\frac{n^2}{m-n^2}. \tag{7}$$

Далі, на $\left[a,b\right]$ знайдеться точка $\overline{x}$, в якій має місце рівність

$$\Delta\left(f,P_{n,m+1}\right)=\max_{x\in\left[a,b\right]}\left|f\left(x\right)-P_{n,m+1}\left(x\right)\right|=\left|f\left(\overline{x}\right)-P_{n,m+1}\left(\overline{x}\right)\right|.$$

Нехай x_j – найближча до неї із розглядуваних точок (1). Тоді

$$\nabla\left(f,P_{n,m+1}\right)=\left|f\left(\overline{x}\right)-P_{n,m+1}\left(\overline{x}\right)\right|\le\left|f\left(x_j\right)-P_{n,m+1}\left(x_j\right)\right|+\left|f\left(\overline{x}\right)-f\left(x_j\right)\right|+$$

$$+\left|P_{n,m+1}\left(x_j\right)-P_{n,m+1}\left(\overline{x}\right)\right|\le E_n\left(f\right)+\omega\left(\frac{b-a}{2m}\right)+\left[L+E_n\left(f\right)\right]\frac{n^2}{m-n^2}, \tag{8}$$

де через $\omega\left(\delta\right)$ позначено модуль неперервності функції $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$. Модулем неперервності функції $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$ називають величину

$$\omega\left(\delta\right)=\sup_{\left|x'-x''\right|\le\delta}\left|f\left(x''\right)-f\left(x'\right)\right|\quad(x',x''\in\left[a,b\right]).$$

Позначаючи суму останніх двох членів в правій частині нерівності (8) через ε_m:

$$\varepsilon_m=\omega\left(\frac{b-a}{2m}\right)+\left[L+E_n\left(f\right)\right]\frac{n^2}{m-n^2}, \tag{9}$$

будемо мати:

$$\Delta\left(f,P_{n,m+1}\right)\le E_n\left(f\right)+\varepsilon_m. \tag{10}$$

Для оцінки близькості $P_{n,m+1}\left(x\right)$ до багаточлена найкращого наближення, тобто величини

$$\Delta\left(f,P_{n,m+1}\right)-E_n\left(f\right),$$

можна скористатися таким прийомом. Знаходимо

$$\tilde{M}_{m+1} = \max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - P_{n,m+1}(x) \right|$$

і $E_n(f,F)$, де F – множина точок $x_0, x_1, \dots, x_m$. Тоді

$$\Delta\left(f, P_{n,m+1}\right) - E_n(f) \le \tilde{M}_{m+1} - E_n(f,F). \tag{11}$$

Подамо другий спосіб наближеної побудови багаточлена найкращого наближення. Цей спосіб полягає в наступному. За початкове наближення багаточлена найкращого наближення до неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ в $H_n(P)$ береться деякий багаточлен $P_{n,0}(x) \in H_n(P)$, такий, що на відрізку $[a,b]$ повинна існувати система із $(n+2)$ точок $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, в яких різниця $\Delta_0(x_i) = f(x_i) - P_{n,0}(x_i)$ має почергові знаки. Досліджуючи на екстремум функцію $\Delta_0(x)$, знаходимо таку комбінацію точок

$$x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \ldots < x_{n+2}^{(0)}, \tag{12}$$

на якій $\Delta_0\left(x_i^{(0)}\right)$ має почергові знаки при зростанні i від 1 до $n+2$, а найбільше і найменше значення $\left|\Delta_0\left(x_i^{(0)}\right)\right|$ відповідно рівні L_0 і A_0, де $L_0 = \max_{x\in[a,b]} \left|\Delta_0(x)\right|$, а A_0 – найкраща нижня межа для $E_n(f)$, яку можна отримати із дослідження $\Delta_0(x) = f(x) - P_{n,0}(x)$.

Багаточлен $P_{n,0}(x)$ доцільно будувати як багаточлен найкращого наближення до функції $f(x)$ на множині точок $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n+2}$, де

$$y_i = \frac{b-a}{2}\cos\frac{(n+i)\pi}{n+1} + \frac{a+b}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+2). \tag{13}$$

(Це – точки, відповідні точкам екстремуму багаточлена Чебишева $T_{n+1}(t)$ на відрізку $[-1,+1]$, якщо з допомогою перетворення $y = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$ відрізок $[-1,+1]$ перетворити у відрізок $[a,b]$). Далі, шукається поправка $P_0(x)$ до цього багаточлена як багаточлен найкращого наближення в $H_n(P)$ до функції $\Delta_0(x) = f(x) - P_{n,0}(x)$ на множині точок F_0 (12). Значення багаточлена $P_0(x)$ в точках $x_i^{(0)}$ визначаються із системи

$$\Delta_0\left(x_1^{(0)}\right) - P_0\left(x_1^{(0)}\right) = -\left[\Delta_0\left(x_2^{(0)}\right) - P_0\left(x_2^{(0)}\right)\right] = \left[\Delta_0\left(x_3^{(0)}\right) - P_0\left(x_3^{(0)}\right)\right] =$$
$$= \ldots = (-1)^{n+1}\left[\Delta_0\left(x_{n+2}^{(0)}\right) - P_0\left(x_{n+2}^{(0)}\right)\right] = \alpha\rho\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n+2}^{(0)}\right) = \alpha\rho_0, \tag{14}$$

де

$$\begin{cases} \alpha = sign\Delta_0\left(x_1^{(0)}\right); \\ \rho_0 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n+2} d_{n,i}^{(0)}\left|\Delta_0\left(x_i^{(0)}\right)\right|}{\sum\limits_{i=1}^{n+2} d_{n,i}^{(0)}}; \\ d_{n,i}^{(0)} = \dfrac{1}{\left(x_i^{(0)}-x_1^{(0)}\right)\left(x_i^{(0)}-x_2^{(0)}\right)\ldots\left(x_i^{(0)}-x_{i-1}^{(0)}\right)\left(x_{i+1}^{(0)}-x_i^{(0)}\right)\ldots\left(x_{n+2}^{(0)}-x_i^{(0)}\right)}. \end{cases} \tag{15}$$

Знайшовши $P_0(x)$, отримаємо перше наближення багаточлена найкращого наближення:

$$P_{n,1}(x) = P_{n,0}(x) + P_0(x).$$

Досліджуючи на екстремум функцію

$$\Delta_1(x) = f(x) - P_{n,1}(x) = \Delta_0(x) - P_0(x)$$

знаходимо множину точок F_1:

$$x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < x_3^{(1)} < \ldots < x_{n+2}^{(1)},$$

В яких $\Delta_1\left(x_i^{(1)}\right)$ має чергуючи знаки, а найбільше і найменше значення серед $\left|\Delta_1\left(x_i^{(1)}\right)\right|$ рівні відповідно L_1 і A_1 (L_1 і A_1 мають такий самий зміст для $\Delta_1(x)$, що і L_0 і A_0 для $\Delta_0(x)$). Потім будуємо багаточлен найкращого наближення $P_1(x)$ до функції $\Delta_1(x)$ на множині F_1, використовуючи (14) і (15) із заміною $x_i^{(0)}$ на $x_i^{(1)}$. Багаточлен

$$P_{n,2}(x) = P_{n,1}(x) + P_1(x) = P_{n,0}(x) + P_0(x) + P_1(x)$$

Буде наступним наближенням. Оцінку точності наближення можна проводити так само, як і в першому способі, тобто обчислюючи

$$\tilde{M}_m = \max_{x\in[a,b]}\left|f(x) - P_{n,m}(x)\right|.$$

1. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы Москва: Наука, 1966. — 248 с.
2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Пер. с англ. М.. Кайнера; под ред. А. М. Лопшица. – М.:ГИФМЛ, 524 стр 1961.
3. Фадеев, Д.К.; Фадеева, В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры Издательство: Физматгиз 736 страниц; 1963 г.
4. Хаусхолдер А.С. Основы численного анализа Пер. с англ. — М.: Изд-во ин. лит-ры, 1956. — 320 с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) М.: «Наука», 1975. – 632 с.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы М.: Наука, 1989. — 432 с.
7. В. А. Шаповаленко, Л. М. Буката, О. Г. Трофименко. «Чисельні методи та моделювання на ЕОМ: навчальний посібник. Модуль 1. Чисельне обчислення функцій, характеристик матриць і розв'язування нелінійних рівнянь та систем рівнянь. Частина 1.». - 2010.
8. Задачин В. М. З-15 Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с. (Укр. мов.)
9. Самарский А. А. Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2005. — 288 с