УДК 519.9
Гінайло П.І., Лісковець С.М., Тимощук В.М., Грінченко Л.Г.
Луцький національний технічний університет

НЕОБХІДНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ БАГАТОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Гінайло П.І., Лісковець С.М., Тимощук В.М., Грінченко Л.Г. Необхідні умови екстремуму для лінійних багатозначних відображень. Отримані необхідні умови екстремуму для задачі оптимального керування, які описуються диференціальними багатозначними включеннями. При цьому враховується наявність додаткових параметрів, за допомогою яких можна впливати на функціонал і фазові обмеження задачі.
Ключові слова: екстремум, диференціальні включення, необхідні умови екстремуму, оптимальне керування, багатозначні відображення.

Гинайло П.И., Лисковец С.М., Тимощук В.Н., Гринченко Л.Г. Необходимые условия экстремума для линейных многозначных отображений. Получены необходимые условия экстремума для задачи оптимального управления, описываемые дифференциальными включениями. При этом учитывается наличие дополнительных параметров, с помощью которых можно влиять на функционал и фазовые ограничения задачи.
Ключевые слова: экстремум, дифференциальные включения, необходимые условия экстремума, оптимальное управление, многозначные отображения.

Ginaylo P. Liskovec S. Tymoshchook V., Grinchenko L. Necessary conditions for extremum with linear multivalued mappings. Necessary extremum conditions for optimal control problems described by differential inclusions meaningful are recerved. This takes into account the availability of additional parameters, which can affect the functional restrictions and phase problems.
Keywords: extremum, differential inclusion necessary extremum conditions, optimal control, ambiguous map.

Постановка наукової проблеми. Різноманітні задачі оптимального керування в останні роки знаходять широке застосування в самих різних областях сучасної науки і техніки. Усі фізичні процеси, що мають місце в техніці, як правило, керовані, тобто можуть здійснюватися різними способами, в залежності від потреб людини. Тому і виникає питання про знаходження найкращого або оптимального в тому чи іншому розумінні керуванні процесом. Побудові найбільш загальних необхідних умов екстремуму присвячено дуже багато робіт різних вчених. Це умови екстремуму дають можливість передбачити структуру розв'язку.

Аналіз досліджень. Новий напрямок досліджень в теорії необхідних умов екстремуму сприяв розвитку нового підходу до багатьох задач оптимального керування, в якому центральне місце займає поняття багатозначного відображення. Справа в тому, що задачу оптимального керування виявляється зручно трактувати як задачу оптимізації на множині траєкторій деякого диференціального включення. Поняття диференціального включення дозволяє охопити багато задач оптимального керування єдиним методом розв'язання. В основі теорії диференціальних включень лежить поняття багатозначного відображення.

Метою роботи є побудова необхідних умов екстремуму для диференціальних включень при наявності додаткових обмежень на координати траєкторії в динамічних задачах з багатозначними відображеннями.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.

Будемо розглядати скінчені простори $X = R^n$, $Y = R^m$. Нехай a − багатозначне відображення, $a(x) \subset R^n$.

Означення 1. Будь-яку абсолютно неперервну вектор-функцію $x(t) \in R^n$ що задовольняє майже скрізь включенню

$$\dot{x}(t) \in a(x(t)), \quad t \in [0,1]$$

назвемо траєкторією.

Зафіксуємо стандартний проміжок зміни одномірного аргументу $t \in [0,1]$.

Нехай для $t \in [0,1]$ визначена абсолютно неперервна функція $x(t) \in R^n$, майже скрізь диференційована. При цьому може статися, що для майже всіх t виконується відношення

$$\frac{d}{dt} x(t) \in a(x(t)) \tag{1}$$

яке називається диференціальним включенням, тобто це диференціальне рівняння з багатозначною правою частиною.

Розв'язком диференціального включення називається абсолютно неперервна вектор-функція $x(t)$, майже скрізь задовольняє відношення (1) на заданому інтервалі змінної t.

Якщо множина $a(x)$ складається лише з одного елемента, функції $f(x)$, тобто відображення $a(x)$ – однозначне, то дане включення переходить в звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}x(t) \in f(x).$$

Видно, що диференціальне включення є ніщо інше, як узагальнення диференціальних рівнянь.

До диференціальних включень приводять, наприклад, задача про функції, що задовольняють диференціальному рівнянню з заданою точністю

$$\left[\frac{dx(t)}{dt} - f\left(t, x(t)\right)\right] \le \varepsilon$$

диференціальні нерівності

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \ge 0.$$

Якщо вектор-функція $f(x,u) \in R^n$ визначена для $x \in R^n$ і $u \in U$, де U – деяка підмножина з R^s, то багатозначне відображення $a(x)$ можна визначити так

$$a(x) = f(x,u) = \{y: \quad y = f(x,u), \ u \in U\}.$$

Тоді диференціальне включення (1) переходить у співвідношення

$$\frac{d}{dt}x(t) \in f\left(x(t), u\right),$$

або

$$\frac{d}{dt}x(t) \in f\left(x(t), u(t)\right), \quad u(t) \in U. \tag{2}$$

Такі рівняння (2) зазвичай зустрічаються в задачах керування. Тут $x(t)$ шукана вектор-функція, а $u = u(t)$ – керування, тобто вектор-функція, яку можна вибрати довільно серед всіх допустимих керувань.

Із вище сказаного слідує, що диференціальне включення (1) може мати множину розв'язків. В зв'язку з цим в задачах оптимального керування знаходиться оптимальний розв'язок, який задовольняє задані умови. В подальших дослідженнях при розв'язку цього питання будемо використовувати теорему 1.

Теорема 1. Якщо $a(x)$ – випуклозначне замкнуте обмежене відображення, напівнеперервне зверху по x, і $dom\, a$ складається з кулі радіуса

$$r = \left(1 + \|x_0\| e^c - 1\right)$$

де c – константа така, що

$$\|a(x)\| \le c\left(1 + \|x\|\right)$$

то існує розв'язок $x(t)$ диференціального включення (1), яке задовольняє нерівність

$$\|x(t)\| \le \left(1 + \|x_0\| e^{ct} - 1\right), \quad x(0) = x_0.$$

При цьому розв'язок $x(t)$ визначений на всьому відрізку $[0,1]$ і задовольняє на цьому відрізку умову Ліпшиця.

Означення 2. Якщо $x(t) \in R^n, \quad t \in [0,1]$ – довільна крива, то її ε - околом називається множина точок x таких, що

$$\left\| x - x(t) \right\| \le \varepsilon$$

при деякому $t \in [0,1]$.

Оскільки диференціальне включення навіть при заданій початковій точці визначає не єдину траєкторію, що йому задовольняє, то має зміст ставити задачу знаходження серед усіх траєкторій диференціального включення таку, яка б володіла додатковими властивостями.

Питання про існування розв'язку оптимізаційної задачі задаватись не буде. Будемо припускати, що оптимальний розв'язок цієї задачі існує і будемо позначати його через $\tilde{x}(t)$. Тоді наша ціль заключається в тому, щоб знайти ті умови, які цей розв'язок задовольняють , тобто отримати необхідні умови екстремуму.

Сформулюємо таку задачу.

Серед усіх траєкторій $x(t), \quad t \in [0,1]$, які задовольняють майже скрізь диференціальному включенню

$$\dot{x}(t) \in a\left(x(t)\right), \quad t \in [0,1]$$

і умовам

$$x(0) \in N, \;\; x(1) \in M$$

знайти таку, яка мінімізує вираз

$$I\left(x(\cdot)\right) = \int_0^1 g\left(x(t), t\right) dt + \varphi_0\left(x(1)\right).$$

Ця задача розв'язується при наступних умовах на дані що входять до неї. Крайні умови цієї задачі задаються множинами N і M за допомогою кінцевої системи нерівностей і рівнянь

$$N = \left\{ x : \; \varphi_b(x) \le 0 \right\},$$
$$M = \left\{ x : \; \varphi_e(x) \le 0 \right\}$$

де

$$\varphi_b(x) = \max\left\{ \max_{i \in I^-} \varphi_b^i(x), \max_{i \in I^o}\left(\varphi_b^i(x)\right) \right\}.$$

Означимо також для $\delta \ge 0$ для множин:

$$N_\delta = \left\{ x : \; \varphi_b(x) \le c\delta \right\},$$
$$M_\delta = \left\{ x : \; \varphi_e(x) \le e\delta \right\}$$

де $\varphi_b(x)$, $\varphi_e(x)$ - функції, які задовольняють умови Ліпшиця.

В якості функцій $\varphi_b(x)$ і $\varphi_e(x)$ можуть також бути взяті функції відстані до множини $d(x/N)$ і $d(x/M)$.

Припущення А. Множини N і M замкнуті. Множини N_δ і M_δ, $\delta \ge 0$, в кожній точці володіють локальними шатрами $K_{N_\delta}(x)$ і $K_{M_\delta}(x)$, причому якщо послідовності

$$x_k \in N_{\delta_k}, \;\; x_k^* \in K_{\delta_k}^*(x_k)$$
$$x_k' \in M_{\delta_k}, \;\; x_k'^* \in K_{\delta_k}^*(x_k')$$

збігаються до x_0, x_0^* і до $x_{\grave{O}}$ та $x_{\grave{O}}^*$ відповідно, а $\delta_k \to 0$, то

$$x_0^* \in K_N^*(x_0),$$
$$x_{\grave{O}}^* \in K_M^*(x_{\grave{O}}).$$

Тут в якості $K_{N_\delta}(x)$ взятий конус

$$K_{N_\delta}(x) = \left\{ \bar{x} : \; \bar{x} = \gamma(x_1 - x), \quad \gamma > 0, \quad x_1 \in N_\delta \right\}.$$

Спряжений йому конус матиме вигляд

$$K^*_{N_\delta}(x)=\left\{x^*:\left\langle \overline{x},x^*\right\rangle \ge 0,\quad \overline{x}\in K_{N_\delta}(x)\right\}.$$

Аналогічно

$$K_{M_\delta}(x)=\left\{\overline{x}:\ \overline{x}=\gamma(x_1-x),\quad \gamma>0,\quad x_1\in M_\delta\right\}$$

$$K^*_{M_\delta}(x)=\left\{x^*:\left\langle \overline{x},x^*\right\rangle \ge 0,\quad \overline{x}\in K_{M_\delta}(x)\right\}.$$

Припущення В. Функції $g(x,t)$ і $\varphi_0(x)$ неперервні по x і t та задовольняють умову Ліпшиця

$$\left|g(x_1,t)-g(x_2,t)\right|<L\left\|x_1-x_2\right\|$$

$$\left|\varphi_0(x_1)-\varphi(x_2)\right|<L\left\|x_1-x_2\right\|$$

в будь-якій обмеженій області простору X. Константа L може залежати від цієї області, але не залежить від $t\in[0,1]$. При цьому $g(x,t)$ та $\varphi_0(x)$ допускають в кожній точці (x,t) верхню випуклу апроксимацію, а їх субдиференціали по $x\partial\big(g(x,t)\big)$ і $\partial\big(\varphi_0(x)\big)$ рівномірно обмежені в кожній обмеженій області і напівнеперервно зверху залежать від x і t.Припущення С. Відображення a випуклозначне і замкнуте, задовольняє умову Ліпшиця в ξ – трубці траєкторії $\tilde{x}(t),\ t\in[0,1]$, і множина $a(\tilde{x}(0))$ обмежена. Конуси $K_a(x,y)$ являються локальними шатрами і локально спряжене відображення $a^*\big(y^*:(x,y)\big)$ напівнеперервне зверху залежить від своїх аргументів рівномірно обмежене для всіх x з ξ – трубки траєкторії $\tilde{x}(\cdot)$ і $y\in a(x)$.Для сформульованої задачі при зроблених припущеннях отримані необхідні умови мінімуму.Теорема 2. Нехай виконані припущення А, В, С і $\tilde{x}(\cdot)$ мінімізує функціонал

$$I(x(\cdot))=\int_0^1 g(x(t),t)\,dt+\varphi_0(x(1))$$

серед всіх траєкторій, які задовольняють включення

$$\dot{x}(t)\in a(x(t)),\ t\in[0,1]$$

і крайні умови $x(0)\in N$, $x(1)\in M$.

Тоді існує число $\lambda_0\ge 0$, вектор $x^*_{\hat{a}}$ і функція $x^*(t),\ t\in[0,1]$ не рівні нулю одночасно, такі що:

1) $\quad x^*(1)+x^*_{\hat{a}}\in\lambda_0\partial\varphi(\tilde{x}(1))\quad x^*_{\hat{a}}\in K^*_M(\tilde{x}(1)),\quad x^*(0)\in K^*_N(\tilde{x}(0))$

функція $x^*(t)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$x^*(t)\in A^*\left(x^*(t);\ \tilde{x}(t)+\lambda\partial g(\tilde{x}(t),t)\right)$$

майже скрізь на відрізку $[0,1]$

2) $\quad \left\langle \tilde{x}(t),x^*(t)\right\rangle=W_a\left(\tilde{x}(t),x^*\right)$ майже скрізь на $[0,1]$.

Приклад 2. Нехай в нашій задачі об'єкт лінійний, тобто $a(x)=Ax+U$, де U – випукла замкнута множина в R^n, A – оператор діючий з простору X в простір Y. Нехай відображення Q – багатогранне, тобто

$$gfQ=\left\{(x,y):Bx-Cy\le d\right\},$$

де B і C – матриці розміром $r\times n$ і $r\times m$ відповідно, а $d-r$ – мірний вектор. Тут під нерівністю для векторів розуміють систему нерівностей для компонент.

Багатозначне відображення a тут буде випуклим, замкнутим і обмеженим.

Якщо $y=Ax+\omega,\ \omega\in U$, то спряжене до a відображення буде мати вигляд

$$a^*\left(y^*;(x,y)\right)=\begin{cases}A^*y^*, & \text{ÿêù î} \quad y^*\in\left[con\left(U-\omega\right)\right]^*\\ \varnothing, & \text{ÿêù î} \quad y^*\notin\left[con\left(U-\omega\right)\right]^*.\end{cases}$$

Якщо $(x_0, y_0)\in gfQ$, то спряжене відображення до Q обчислюється так

$$Q^*\left(y^*;(x_0,y_0)\right)=\left\{B^*\lambda : y^*=\lambda C^*,\ \lambda\geq 0,\ \left\langle Bx_0-Cy_0-d,\lambda\right\rangle\right\}\geq 0,$$

де B^* і C^* – транспоновані матриці B і C.

Тому умова 2 теореми 2.3 в цьому випадку може бути записано наступним чином

$$-p^*(t)=\lambda(t)\left[u^*(t)+æ(t)B^*\right]+A^*p^*(t)$$

$$v^*(t)=\lambda(t)C$$

$$\dot{\tilde{x}}=A\tilde{x}(t)+\tilde{\omega}(t),\ \tilde{\omega}(t)\in U$$

$$p^*(t)\in\left[con\left(U-\tilde{\omega}(t)\right)\right]^*.$$

Або, враховуючи визначення спряженого конуса і того, що

$$con\left(U-\tilde{\omega}(t)\right)=\left\{\lambda\left(\omega-\tilde{\omega}(t)\right):\ \omega\in U,\ \lambda>0\right\}$$

останнє відношення перепишеться у вигляді

$$\left\langle\omega-\tilde{\omega}(t),p^*\right\rangle\geq 0,\ \omega\in U.$$

Застосовуючи теорему 2.4, отримуємо

Теорема 2.8. Нехай відображення Q – багатогранне. Тоді для того, щоб траєкторія $\tilde{x}(t)$ і відповідне їй керування $\tilde{\omega}(t)$ мінімізували

$$\int_0^1 f\left(x(t),y(t)\right)dt$$

серед усіх траєкторій і керувань, які задовольняють рівняння

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\omega(t),\ \omega(t)\in U$$

крайнім умовам $x(0)\in N,\ x(1)\in M$ і умові $\left(x(t),y(t)\right)\in Q$, необхідно, щоб існувала функція $p^*(t)$, вектори $\lambda(t), æ(t)$ і вимірні функції $u^*(t),\ v^*(t)$ такі що:

$$p^*(0)\in K_N^*\left(\tilde{x}(0)\right),\quad -p^*(1)\in K_M^*\left(\tilde{x}(1)\right)$$

$$-p^*(t)=\lambda(t)\left[u^*(t)+æ(t)B^*\right]+A^*p^*(t)$$

$$v^*(t)=\lambda(t)C$$

$$\left\langle\omega-\tilde{\omega}(t),p^*(t)\right\rangle\geq 0,\ \omega\in u,$$

$$\lambda(t)\geq 0,\ æ(t)\geq 0,$$

$$\left(u^*(t),v^*(t)\right)\in\partial f\left(x(t),y(t)\right).$$

Висновки. Отримані необхідні умови екстремуму для задачі оптимального керування з диференціальними багатозначними включеннями. Розглянуті лінійні багатозначні відображення, при цьому враховано наявність додаткових параметрів, за допомогою яких можна впливати на функціонал і фазові обмеження задачі.

1. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
2. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1982. – 144 с.
3. Гінайло П.І. Задача оптимального керування для диференціальних включень з многозначними відображеннями. // Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – 2016. – № 24-25. – С. 68-72.
4. Гінайло П.І. Необхідні умови екстремуму для задачі оптимального керування з континуумом обмежень. // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямком „Інженерна механіка”), вип. 11, част.2, Луцьк, 2002, С.15–17.5. Гінайло П.І. Необхідні умови екстремуму для локально випуклої задачі. // Дванадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука. Київ, 15–17 трав. 2008 р. Матеріали конф., т. І. – К.: НТУУ “КПІ”. – 2008. – 572с.