

УДК 004.415.3

Пех П.А., Кобук Р.Ф.

Луцький національний технічний університет

## С++BUILDER ПРОГРАМНО-ДЕМОНСТРАЦІЙНИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ ПЕРЕТИНІВ ПРЯМИМИ ЛІНІЯМИ

Пех П. А., Кобук Р. Ф. С++Builder програмно-демонстраційний комплекс для дослідження дослідження рівнянь з параметрами методом перетину прямими лініями. В статті запропоновано програмно-демонстраційний комплекс засобами середовища С++Builder для дослідження рівнянь з параметрами методом перетинів прямими лініями. Наведені також результати розв'язування кількох рівнянь.

**Ключові слова:** С++Builder проект, метод перетинів, перетин горизонтальними лініями, перетин бісекторними лініями, графічне розв'язування рівнянь.

Пех П. А., Кобук Р. Ф., С++Builder програмно-демонстраційний комплекс для дослідження рівнянь з параметрами методом перетинів прямими лініями. В статті запропоновано програмно-демонстраційний комплекс засобами С++Builder для дослідження рівнянь з параметрами методом перетинів прямими лініями. Приведені також результати розв'язування кількох рівнянь.

**Ключевые слова:** С++Builder проект, метод перетинів, перетин горизонтальными линиями, перетин бисекторными линиями, графическое решение уравнений.

**Pekh Petro, Kobuk Roman. Software C++ Builder software=demonstration complex to study equations with parameters by the cross-section method.** In the article the software-demonstration complex developed in C ++ Builder environment is offered for research of equations with parameters by straight lines cross-sections method. The results of solving several equations are also given.

**Keywords:** C ++ Builder project, the intersections method, the intersection of horizontal lines method, the cross section of the bisector lines method, the graphic solution of the equations.

**Постановка задачі.** Алгебраїчні та трансцендентні рівняння з параметрами досить поширені в науковій та технічній областях. Здебільшого з допомогою параметрів враховують особливості форми конструкцій, міцність матеріалів і тому подібні речі, в той час, як з допомогою змінних та функцій описують процеси, що досліджуються. Можна також стверджувати, що на теперішній час немає єдиної методики, як досліджувати рівняння з параметрами. Як правило, розв'язування рівняння з параметрами – це кожного разу оригінальне дослідження, кожне з яких потребує такого ж оригінального підходу. Зупинимось, однак, на деяких спільних рисах досліджень рівнянь з параметрами. Розв'язуючи рівняння з параметрами, необхідно:

- досліджувати область допустимих значень як невідомого  $D(f)$ , так і параметра  $D(a)$  рівняння;
- досліджувати область зміни значень функції  $f(x)$  і параметра  $a$ , враховувати всі можливі обмеження цих значень;
- забезпечувати рівносильність можливих перетворень рівняння;
- враховувати умови монотонності зміни значень функцій, що входять до складу рівняння.

Розглянемо кілька типових задач, у яких потрібно розв'язати алгебраїчне або трансцендентне рівняння з параметром, і покажемо, як зазначені вище підходи можуть бути використані у кожному з них.

**Задача 1.** Знайти всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння

$$\sin(x + 4a) + \sin((x^2 - 6x - 7a)/2) = 4x - x^2 - a$$

не має дійсних розв'язків.

Якщо позначити  $y = (x^2 - 6x - 7a)/2$ , то рівняння прийме такий вигляд:

$$\sin(x + 4a) + \sin y = 4x - (2y + 6x + 7a) - a.$$

Або ж:  $2y + \sin y = (-x - 4a) + \sin(-x - 4a)$ .

Далі вводимо у розгляд функцію  $f(t) = 2t + \sin t$ , яка є монотонно зростаючою на всій числовій осі, що дозволяє знайти розв'язок даного рівняння, записавши це рівняння у вигляді  $f(y) = f(-x - 4a)$ . Звідси:  $y = -x - 4a$ . Отже, тут ми використали допоміжну функцію  $f(t)$  і факт її монотонного зростання на всій числовій осі.

**Задача 2.** Знайти всі значення параметра  $k$ , при кожному з яких рівняння

$$(1 + (2 - k)\sin t) / (\cos t - \sin t) = 2k$$

має хоча б один розв'язок на інтервалі  $(0; \pi/2)$ .

Очевидною є заміна  $x = \cos t$ ;  $y = \sin t$  і дослідження цього рівняння через нововведені змінні.

**Задача 3.** Дослідити розв'язки рівняння залежно від значень параметра  $a$ :

$$(a - 3)x^2 - 2(3a - 4)x + 7a - 6 = 0.$$

Тут варто знайти дискримінант  $D$ , і з умови  $D \geq 0$  визначити інтервал зміни параметра  $a$ , за якого рівняння має дійсні корені.

Задачі на дослідження рівнянь з параметрами можна умовно поділити на дві групи:

- задачі, у яких потрібно знайти кількість розв'язків залежно від значень параметра, або довести, що ці розв'язки не існують;
- задачі, у яких потрібно знайти розв'язки рівняння залежно від значень параметра.

Всі наведені вище підходи до розв'язування рівнянь з параметрами є традиційними, простіше кажучи, аналітичними [1]. Наша мета – пришвидшити процес розв'язку рівнянь за рахунок використання комп'ютерних технологій. Він базується на тому, що будь-яке рівняння можна подати у вигляді  $f(x) = 0$ . Тому розв'язок рівняння можна звести до побудови графіка функції  $f(x)$  на певному діапазоні зміни значень аргументу за вибраних значень параметрів, що входять до складу рівняння, і визначення точок перетину графіка функції з віссю абсцис. Тому, поєднуючи аналітичні дослідження з паралельною побудовою за допомогою програми графіка досліджуваної функції, можна набагато швидше і ефективніше розв'язати рівняння з параметром.

Метою нашого дослідження є розроблення засобами C++Builder середовища програмно – демонстраційного комплексу для розв'язування рівнянь з параметрами типу  $f(x) = \varphi(x, a)$  методом перетинів прямими лініями шляхом використання сучасних інформаційних технологій. Вибраний для досліджень тип рівнянь з параметрами відрізняється тим, що в лівій частині рівняння знаходиться функція  $f(x)$ , що не містить параметрів, а в правій частині – функція  $\varphi(x, a)$  з параметром  $a$ . До того ж, як це витікає з назви статті, ця функція має своїм графіком сімейство прямих ліній. Точки перетину графіка функції  $f(x)$  зі сімейством прямих ліній, які описуються функцією  $\varphi(x, a)$ , є шуканими розв'язками рівняння.

Варто зазначити, що проблема розв'язування задач з параметрами привертала увагу багатьох дослідників, однак залучення для вирішення цієї проблеми новітніх інформаційних технологій розпочалося порівняно недавно. На нашу думку, запропонований нам підхід може бути рекомендований як для більш ефективного розв'язування зазначеного класу рівнянь, так і для потреб навчального процесу.

**Основна частина.** Планом передбачалося проведення досліджень у три етапи:

- вибір методу розв'язування рівняння;
- розроблення програмного комплексу засобами середовища C++Builder для розв'язування рівнянь з параметрами;
- перевірка адекватності отриманої моделі шляхом порівняння розв'язків з тими, що отримані аналітично.

**Метод перетинів розв'язування рівнянь з параметрами.**

**Перетин функції  $y = f(x)$  сімейством горизонтальних прямих ліній  $\varphi(x, a) = a$ .**

Для кожного дійсного значення параметра  $a$  розв'язати рівняння [1]:

$$(x + 1) \cdot |x - 1| = a.$$

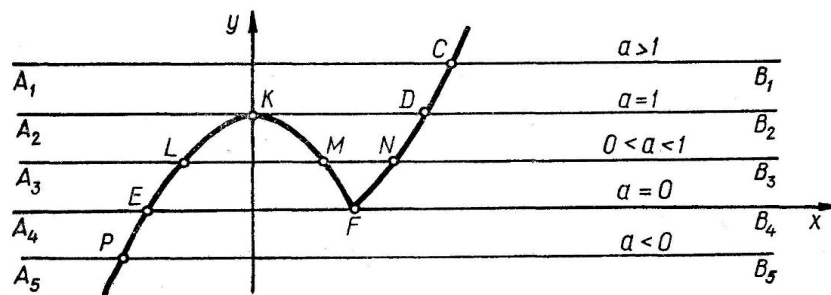


Рис.1 – Метод перетинів горизонтальними лініями

У даному випадку:  $f(x) = y_1 = (x + 1) \cdot |x - 1|$  і  $\varphi(x, a) = y_2 = a$ .

Виходячи з означення абсолютної величини, функцію  $y_1$  можна подати у вигляді:

$$y_1 = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{якщо } x \geq 1, \\ 1 - x^2, & \text{якщо } x < 1. \end{cases}$$

Графіком функції  $y_1$  є парабола, яка на проміжку  $x \geq 1$  вітками направлена вгору і з вершиною в точці  $(0; -1)$ , а на проміжку  $x < 1$  вітками направлена вниз і з вершиною в точці  $(0; 1)$ .

Функція  $y_2 = a$  визначає сімейство горизонтальних прямих ліній, паралельних осі абсцис.

Залежно від значення параметра  $a$ , задане в умові рівняння може мати один, два або три розв'язки. Ці розв'язки відображаються на малюнку у вигляді точок перетину графіків функцій  $f(x) = y_1 = (x + 1) \cdot |x - 1|$  та  $\varphi(x, a) = y_2 = a$ .

Загалом задане в умові рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = a, & \text{якщо } x \geq 1, \\ 1 - x^2 = a, & \text{якщо } x < 1. \end{cases}$$

Якщо  $a < 0$  (пряма  $A_5B_5$ ), то заданому рівнянню задовільняє тільки один (менший) корінь другого рівняння сукупності, тобто  $x_1 = -\sqrt{1 - a}$  (точка  $P$ ).

Якщо  $a = 0$  (пряма  $A_4B_4$ ), то заданому рівнянню задовільняє два корені відповідного квадратного рівняння: спільний корінь обох рівнянь сукупності  $x_1 = 1$  (точка  $F$ ), і корінь другого рівняння сукупності  $x_2 = -1$  (точка  $E$ ).

Якщо  $0 < a < 1$  (пряма  $A_3B_3$ ), то заданому рівнянню задовільняють три корені відповідного квадратного рівняння: більший корінь першого рівняння сукупності  $x_1 = \sqrt{a + 1}$  (точка  $N$ ) і обидва корені другого рівняння сукупності  $x_2 = -\sqrt{1 - a}$  (точка  $L$ ) та  $x_3 = \sqrt{1 - a}$  (точка  $M$ ).

Якщо  $a = 1$  (пряма  $A_2B_2$ ), то заданому рівнянню задовільняють два корені відповідного квадратного рівняння: більший корінь першого рівняння сукупності  $x_1 = \sqrt{2}$  (точка  $D$ ) і корінь другого рівняння сукупності  $x_2 = 0$  (точка  $K$ ).

Якщо  $a > 1$  (пряма  $A_1B_1$ ), то заданому рівнянню задовільняє тільки один (більший) корінь першого рівняння сукупності, тобто  $x_1 = \sqrt{a + 1}$  (точка  $C$ ).

**Перетин функції  $y = f(x)$  сімейством прямих ліній - бісектрис  $\varphi(x, a) = a$ .**

Для кожного дійсного значення параметра  $a$  розв'язати рівняння [1]:

$$|x - 1| + |x + 1| = x - a.$$

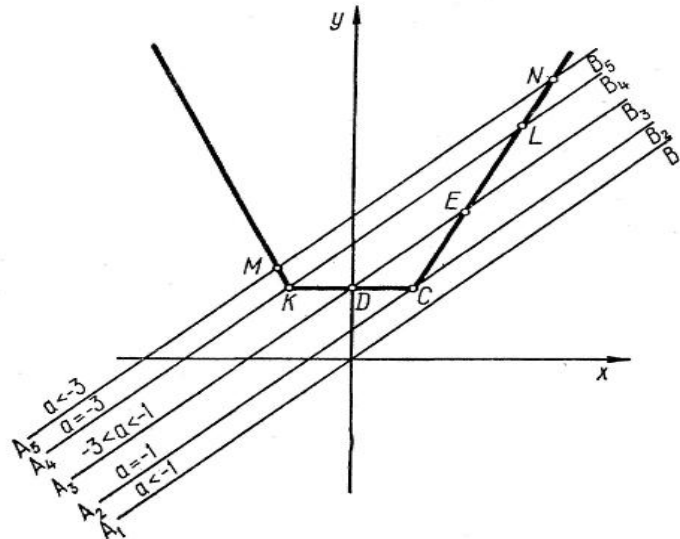


Рис.2 – Метод перетинів лініями-бісектрисами

У даному випадку:  $f(x) = y_1 = |x - 1| + |x + 1|$  і  $\varphi(x, a) = y_2 = x - a$ .

Виходячи з означення абсолютної величини, функцію  $y_1$  можна подати у вигляді:

$$y_1 = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x < -1; \\ 2, & \text{якщо } -1 \leq x < 1; \\ 2x, & \text{якщо } x \geq 1; \end{cases}$$

Функція  $y_2 = x - a$  визначає сімейство прямих ліній, паралельних прямій  $y = x$ , яка є бісектрисою першого та третього координатних кутів – звідси і назва методу.

Загалом задане в умові рівняння рівносильне сукупності таких рівнянь:

$$\begin{cases} 2x = a - x, & \text{якщо } x < -1; \\ 2 = x - a, & \text{якщо } -1 \leq x < 1; \\ 2x = x - a, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Якщо  $a > -1$  (пряма  $A_1B_1$ ), то задане рівняння не має розв'язків.

Якщо  $a = -1$  (пряма  $A_2B_2$ ), то заданому рівнянню задовільняє тільки один спільний корінь другого і третього рівнянь сукупності, тобто  $x_1 = 1$  (точка  $C$ ).

Якщо  $-3 < a < -1$  (пряма  $A_3B_3$ ), то заданому рівнянню задовільняють два корені: один корінь другого рівняня сукупності, тобто  $x_1 = 2 + a$  (точка  $D$ ), і корінь третього рівняння сукупності, тобто  $x_2 = -a$  (точка  $E$ ).

Якщо  $a = -3$  (пряма  $A_4B_4$ ), то заданому рівнянню задовільняють два корені: один корінь є спільним для другого та третього рівняння сукупності, тобто  $x_1 = -1$  (точка  $K$ ), і корінь третього рівняня сукупності, тобто  $x_2 = 3$  (точка  $L$ ).

Якщо  $a < -3$  (пряма  $A_5B_5$ ), то заданому рівнянню задовільняють два корені: один корінь з першого рівняння сукупності, тобто  $x_1 = a/3$  (точка  $M$ ), і корінь з третього рівняння сукупності, тобто  $x_2 = -a$  (точка  $N$ ).

#### **Розроблення програмно-демонстраційного комплексу.**

Основою програмного комплексу є реалізована у середовищі C++Builder програмний продукт, що складається з семи форм, одна з яких є головною і виконує роль головного меню (рис. 4). Як бачимо з вигляду головної форми, на ній розміщено ряд командних кнопок, призначення кожної з яких – реалізувати ту чи іншу задачу проекту, тобто – розв'язати те чи інше рівняння. Сам же розв'язок забезпечується розробленим нами програмним кодом. На рис. 4 та рис. 5 показано форми, які забезпечують виклад теоретичного матеріалу та реалізацію методів.

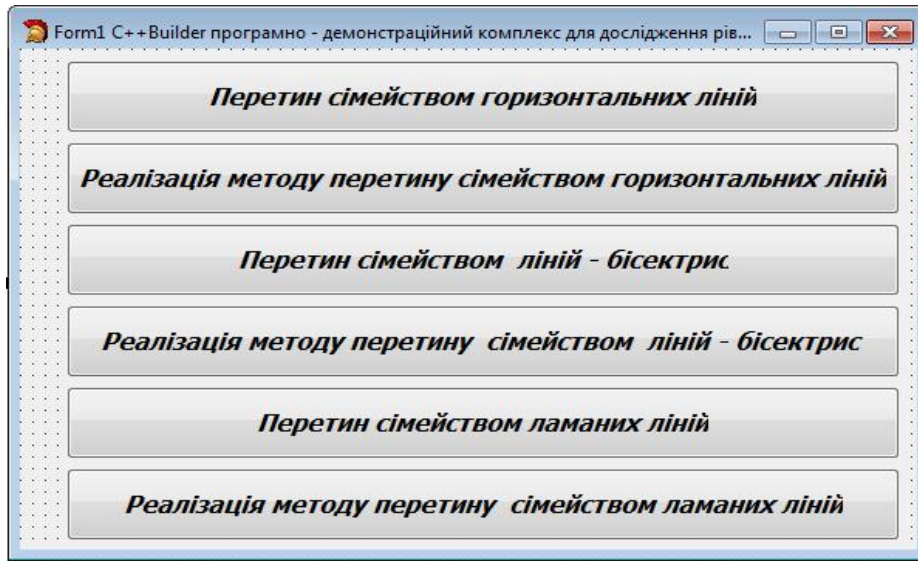


Рис. 3 – Головна форма проекту

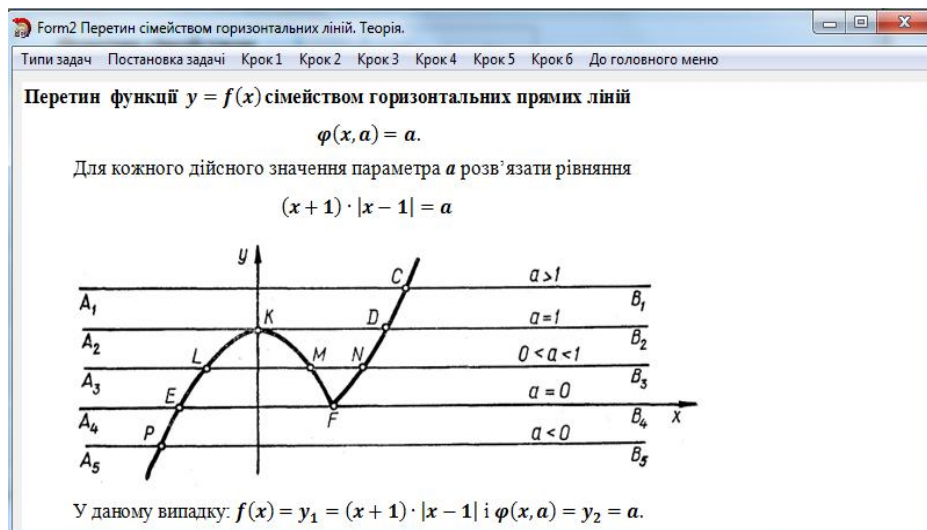


Рис. 4 – Форма проекту з теоретичними викладками

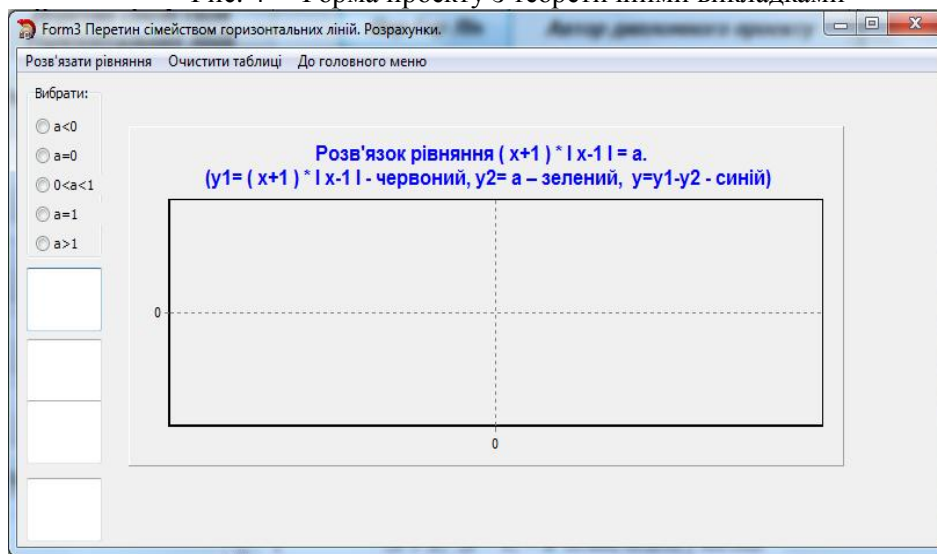


Рис. 5 – Форма проекту з реалізацією методу



Результати розв'язування рівняння  $(x + 1) \cdot |x - 1| = a$  методом перетинів горизонтальними лініями (рис. 6 - рис. 10).

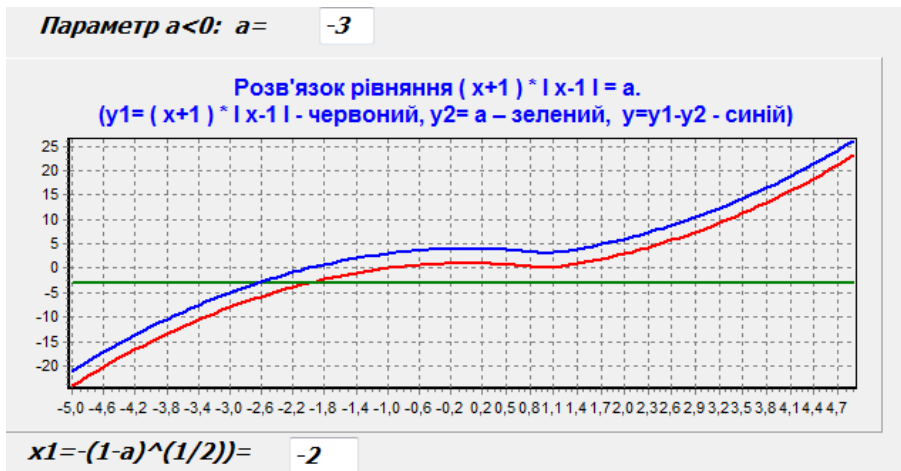


Рис. 6 – Розв'язок рівняння  $(x + 1) \cdot |x - 1| = a$ , якщо  $a < 0$ .

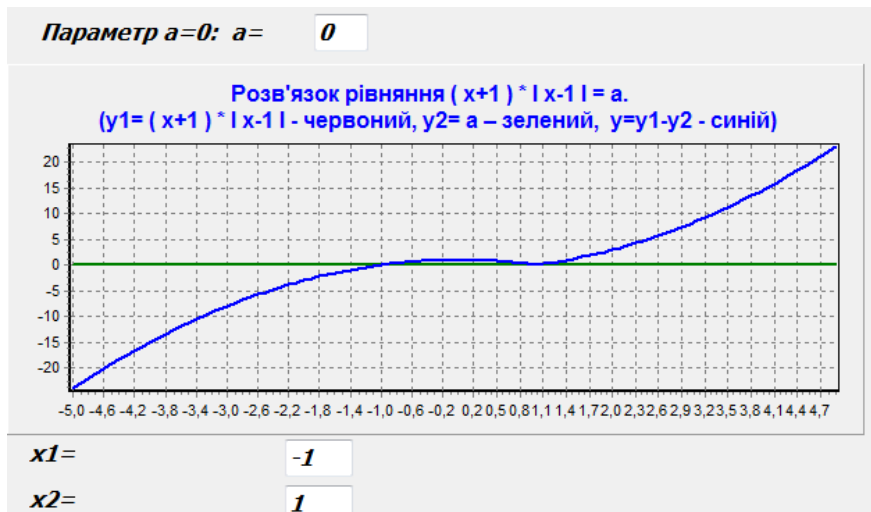


Рис. 7 – Розв'язок рівняння  $(x + 1) \cdot |x - 1| = a$ , якщо  $a = 0$ .

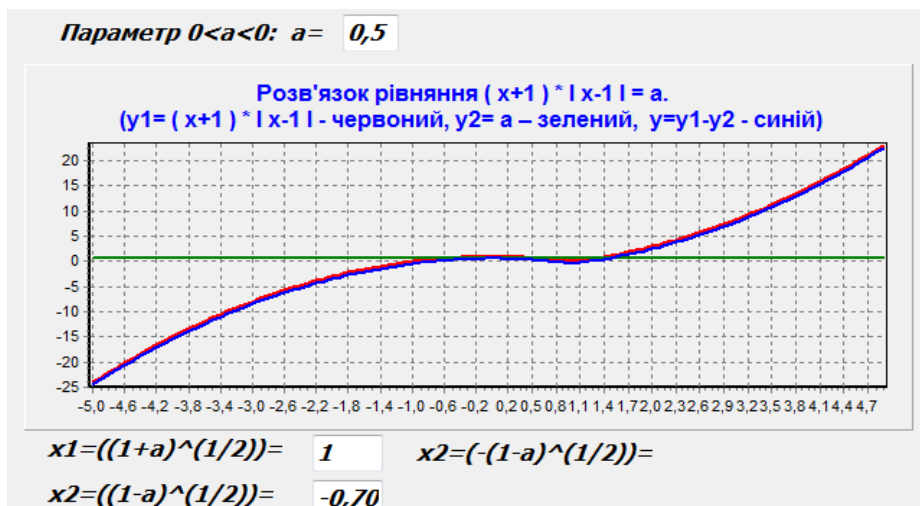


Рис. 8 – Розв'язок рівняння  $(x + 1) \cdot |x - 1| = a$ , якщо  $0 < a < 1$ .

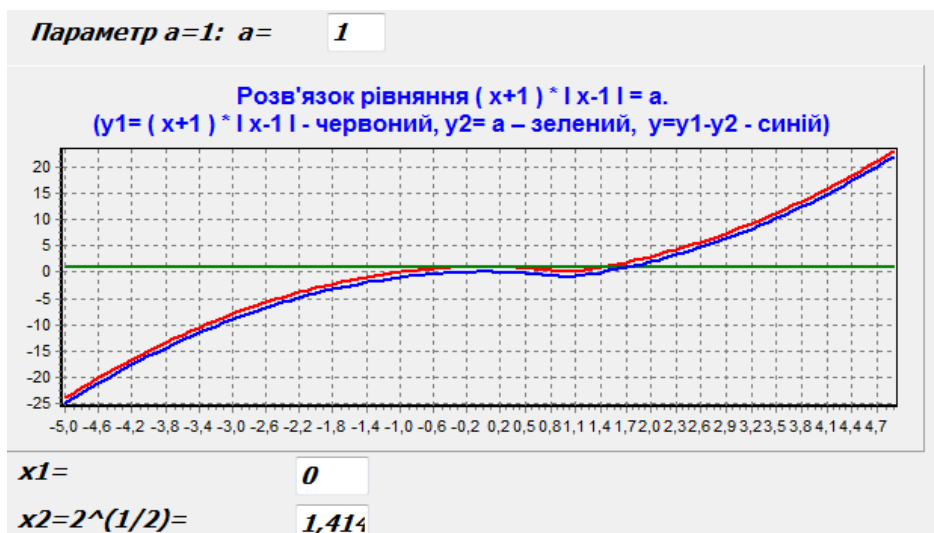


Рис. 9 – Розв'язок рівняння  $(x + 1) \cdot |x - 1| = a$ , якщо  $a = 1$ .

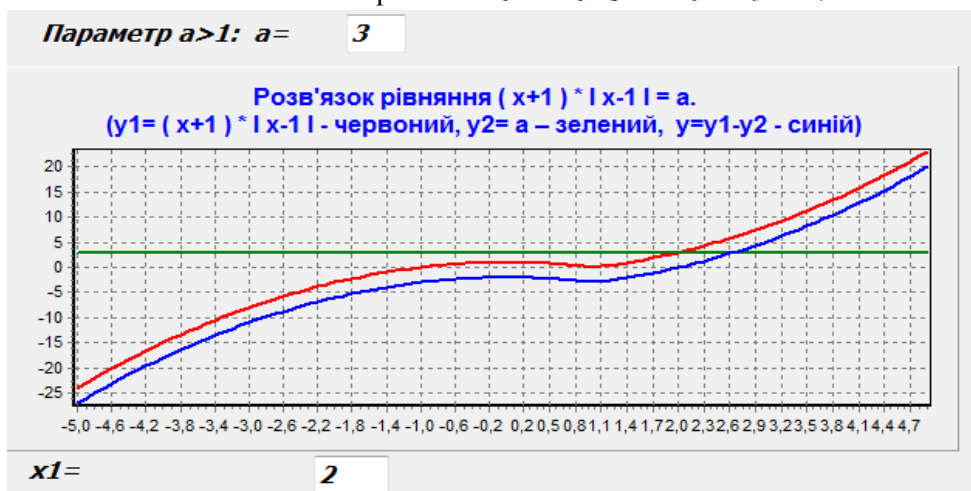


Рис.10 – Розв'язок рівняння  $(x + 1) \cdot |x - 1| = a$ , якщо  $a > 1$ .

Результати розв'язування рівняння  $|x - 1| + |x + 1| = x - a$  методом перетинів бісекторними лініями (рис. 11 - рис. 15).

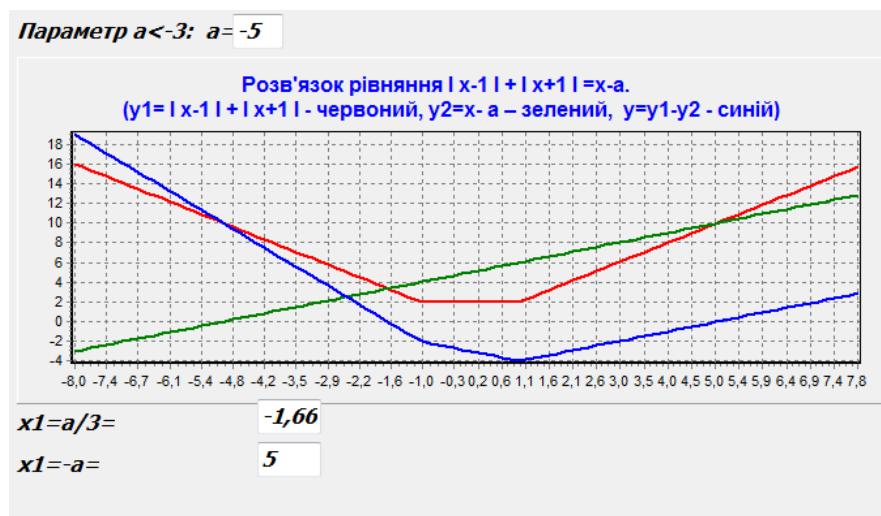


Рис. 11 – Розв'язок рівняння  $|x - 1| + |x + 1| = x - a$ , якщо  $a < -3$ .

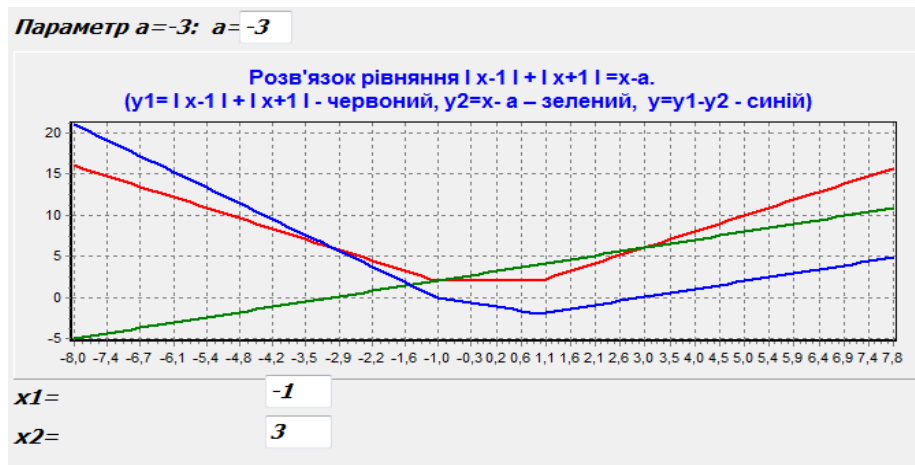


Рис. 12 – Розв'язок рівняння  $|x - 1| + |x + 1| = x - a$ , якщо  $a = -3$ .

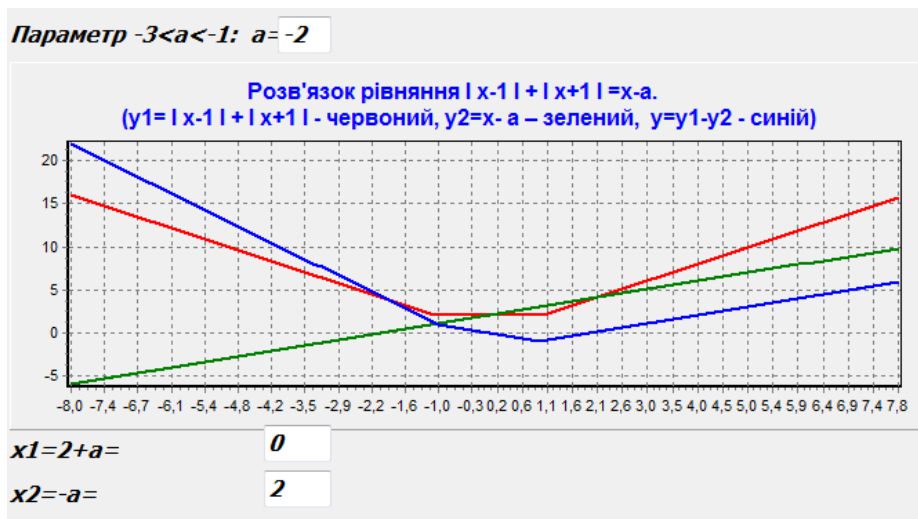


Рис.13 – Розв'язок рівняння  $|x - 1| + |x + 1| = x - a$ , якщо  $-3 < a < -1$ .

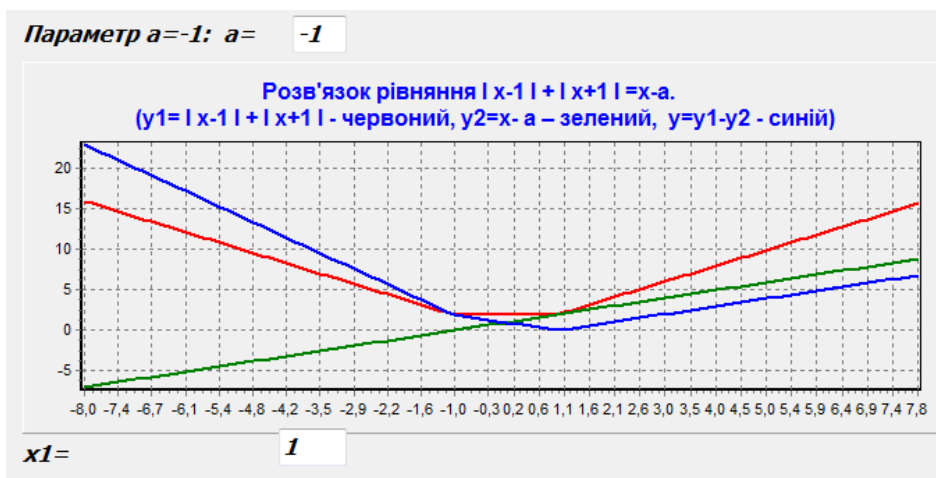


Рис.14 – Розв'язок рівняння  $|x - 1| + |x + 1| = x - a$ , якщо  $a = -1$ .



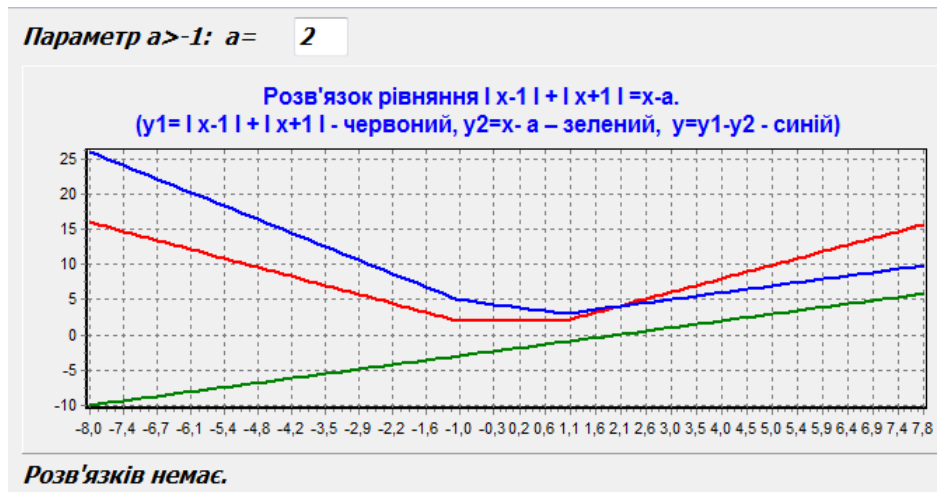


Рис.15 – Розв'язок рівняння  $|x - 1| + |x + 1| = x - a$ , якщо  $a > -1$ .

**Висновки.**

1. В роботі розроблено C++Builder програмно-демонстраційний комплекс, у якому сучасними програмними засобами розв'язується актуальна задача дослідження рівнянь з параметрами методом перетинів прямими лініями з залученням розроблених авторами програмно-демонстраційного комплексу. Ця задача полягає у визначенні коренів рівняння за різних можливих значень параметрів. Наведені окремі результати такого дослідження.

2. Розроблений C++Builder програмно-демонстраційний комплекс може бути використаний як в навчальному процесі при викладанні відповідної теми, так і з метою більш швидкого і ефективного розв'язування рівнянь з параметрами, які традиційно викликають певні труднощі.

1. Шарова Л.И. Уравнения и неравенства: Пособие для подготовительных отделений. –К.:Вища школа, 1981.-290 с.
2. Прус А.В., Швець А.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчальний посібник. –Житомир: «Рута», 2016. –468 с.
3. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. М.: Экзамен, 2009. – 286 с.
4. Горнштейн С.В., Полонський В.Б., Якір М.С. Завдання з параметрами. К.: РИА Текст: МП ОКО, 1992. – 290 с.
5. Пех П.А. Програмний C++ комплекс та результати дослідження швидкодії алгоритмів сортування методом імітаційного моделювання / Бортник К.Я., Яручик О.В.// Комп'ютерно- інтегровані технології: освіта, наука, виробництво: Науковий журнал. –Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2017.Випуск № 27. ст.. 54 – 60.
6. Пех П.А. Програмний C++ комплекс для дослідження процесу функціонування автоматизованих ліній та його верифікація / Войтович А.О.// Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво: Науковий журнал. –Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2017.Випуск № 27. ст.. 60 – 66.