

УДК 539.3:620.191.33

Поліщук М.М. к.т.н.

Луцький національний технічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ ПОДРІБНЕННЯ

Поліщук М.М. Математичне моделювання технологічного процесу подрібнення. У статті на основі моделі механіки твердого тіла, що деформується, досліджується процес подрібнення грудок сапропелю прямокутної форми. Отримане в результаті моделювання з використанням методу інтегральних перетворень. Проводиться чисельне дослідження напружений-деформованого поля в грудках сапропелю залежно від швидкості навантаження і геометричних параметрів. Знайдений просторово-часовий розподіл головної дотичної напруги, яка вирішальним чином впливають на процес руйнування і міру подрібнення.

Ключові слова. Навантаження, теорія подрібнення, моделювання, ударне навантаження, інтегральні перетворення, головна дотична напруга

Полищук Н.Н. Математическое моделирование технологического процесса измельчения. В статье на основе модели механики твердого деформируемого тела, исследуется процесс измельчения комков сапропеля прямоугольной формы. Получено в результате моделирования с использованием метода интегральных преобразований. Проводится численное исследование напряженно-деформированного состояния в комках сапропеля в зависимости от скорости нагрузки и геометрических параметров. Найденный пространственно-временное распределение главной касательных напряжений, которая решающим образом влияют на процесс разрушения и степень измельчения.

Ключевые слова. Нагрузка, теория измельчения, моделирование, ударная нагрузка, интегральные преобразования, главная касательные напряжения

Polishchuk M.M. Mathematical modeling of the technological process of grinding. In the article on the basis of the model of the mechanics of a deformable solid, the process of crushing the pieces of sapropel of a rectangular shape is investigated. Obtained as a result of simulation using the method of integral transformations. Numerical study of strain-deformed retention in sapropel lobes is conducted, depending on the loading speed and geometric parameters. The spatial-temporal distribution of the main tangential voltage, which decisively influences the process of destruction and the degree of grinding, is found.

Keywords. Load, crushing theory, simulation, impact load, integral transformation, main tangential voltage

Вступ. Математичне моделювання подрібнення, яке використовується на даний час в гірничій справі, харчовій промисловості та лісовому господарстві передбачає, що подрібнення супроводжується руйнуванням міжмолекулярних чи міжатомних зв'язків, а тому для його кількісного опису можна використовувати енергетичні підходи [1, 2]. Зокрема, для моделювання процесу подрібнення необхідну для руйнування роботу зовнішніх зусиль часто пов'язують із площею новоутворених поверхонь та об'ємом матеріалу.

На відміну від твердих тіл, ґрунти є за своєю суттю багатокомпонентними сумішами і їх руйнування відбувається насамперед за рахунок втрати адгезії окремих компонент і вирішальним чином визначається їх складом, вологістю, температурою, тощо. Хоча в загальному випадку вищезначена проблема стосується складних, геометрично та фізично нелінійних моделей механіки, багато важливих закономірностей та ефектів, що передують процесу руйнування ґрунтових сумішей можна виявити та дослідити з використанням лінійної моделі теорії пружності [3].

Постановка проблеми Родючість ґрунтів є визначальною умовою ведення сільськогосподарського виробництва в сучасних умовах. На сьогоднішній день кількість земель сільськогосподарського призначення скорочується, в основному із-за неможливості підтримувати їх родючість. Основним постачальником органічних добрив до недавнього часу була тваринницька галузь. Але за останні 20 років її обсяги значно зменшилися, що призвело до зниження норм внесення органічних добрив в цілому на окремих територіях в 5 разів [4]. Світові технології вирощування сільськогосподарських культур орієнтовані тільки на вдосконалення технічних систем і їх оптимізації з метою отримання максимальної кількості вихідної продукції [5, 6, 7] нехтуючи при цьому екологічними наслідками господарювання на землі. Тому виникає необхідність в пошуку нових видів органічних добривах, а також нових технологій їх виготовлення і внесення в ґрунт. Одними з таких можуть стати озерні сапропелі прісноводних водойм.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Основною проблемою використання сапропелю в природному стані є його висока вологість (92 - 96 %). Для подальшого використання як органічних добрив його вологість повинна складати не більше 60 %. Зниження вологості сапропелю призводить до втрат поживних речовин [8, 9, 10]. Застосування озерних сапропелів в якості органічної речовини методом поверхневого внесення, вимагає витримувати норму внесення в межах 40 - 60 тонни/га, що є неефективним [10, 11, 12, 13]. Спроби створення нових видів добрив на основі сап-

ропелю стикаються з труднощами пов'язаними з відсутністю технічних засобів їх виробництва [14,15].

Отримані результати проведених автором досліджень вказують на певні особливості зміни властивостей проморожених озерних сапропелів, що перебувають тривалий час під впливом умов середовища. За наявності підвищеної вологості у складі сапропелю є тверді включення, що необхідно враховувати при виборі способу їх внесення в ґрунту. У разі локального внесення проморожених озерних сапропелів такі тверді включення можуть нести негативну дію на ефективність вирощування сільськогосподарських культур.

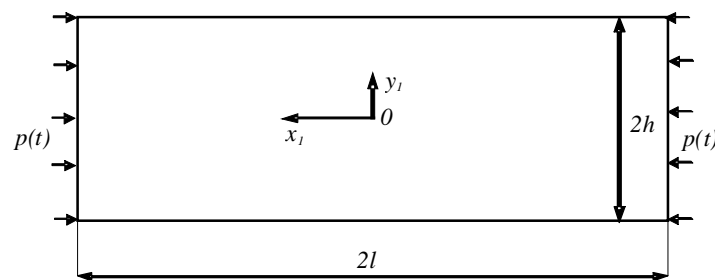
У зв'язку з цим виникла необхідність розробки і впровадження в практику простої, надійної і ефективної технології подрібнення сапропелю безпосередньо перед його внесенням.

Математичне моделювання технологічного процесу подрібнення, використовуване нині в гірській справі, харчовій промисловості і лісовому господарстві передбачає, що подрібнення супроводжується руйнуванням міжмолекулярних або міжатомних зв'язків, а тому для його кількісного опису можна використати енергетичні підходи [13, 14]. Для моделювання процесу подрібнення необхідну для руйнування роботу зовнішніх зусиль часто зв'язують з площею утворених в результаті руйнування нових поверхонь і об'ємом подрібненого матеріалу.

На відміну від твердих тіл, ґрунти і, зокрема, сапропель є за своєю суттю багатокомпонентними сумішами і їх руйнування відбувається, передусім, за рахунок втрати адгезії окремих компонент і, вирішальним чином, визначається їх складом, вологістю, температурою і т.д... У загальному випадку вищезгадані проблеми відносяться до складних, геометрично і фізично нелінійним моделям механіки суцільних середовищ. Проте, цілий ряд важливих закономірностей і ефектів, передуючих процесу руйнування ґрунтових сумішей і багато в чому йому сприяючих, можна виявити і досліджувати з використанням лінійної моделі теорії пружності [15].

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.
 В якості об'єкту досліджень пропонується вибрати фрагмент сапропелю у формі прямокутника, до двох протилежних сторін якого прикладається високоінтенсивна самеурівноважене навантаження. Крім того, внаслідок ефекту прилипання сапропелю до лопати ротора, на цих же поверхнях відсутні переміщення в напрямку дотичної. Дві інших поверхні прямокутника вважаються вільними від навантаження.

Розглянемо прямокутник з розмірами $2h \times 2l$ по x_1 та y_1 відповідно (рис. 1). З моменту часу $t = 0$ до його сторін $x_1 = \pm l$ докладаються нормальні зусилля $p(t)$. На ці ж сторони ставиться умова відсутності дотичної складової вектору переміщення. Інші поверхні $y = \pm h$ впродовж усього процесу деформації залишаються вільними від навантаження.



Для зручності проведення математичних викладень і виявлення найбільш характерних параметрів, що визначають динамічний напружено-деформований стан, введемо в розгляд безрозмірні змінні і величини $x = x_1 / l$, $y = y_1 / l$, $\tau = c_1 t / l$, $x_0 = h / l$, $\kappa^2 = c_1 / c_2 = (\lambda + 2\mu) / \mu$, де c_1 , c_2 , - швидкості поширення хвиль стискування і зрушення в матеріалі сапропелю λ μ - пружні постійні.

В термінах цих змінних, вважаючи, що до моменту часу $t = 0$ грудка знаходилася в стані спокою, завдання формулюється таким чином:
 рівняння руху пружного середовища

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2} - (\kappa^2 - 1) \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad (2)$$

початкові умови

$$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0, \quad u_y = \frac{\partial u_y}{\partial \tau} = 0, \quad \tau = 0; \quad (3)$$

умови на навантажених поверхнях

$$\sigma_{xx}(\pm 1, y, \tau) = \mp p(\tau), \quad u_y(\pm 1, y, \tau) = 0; \quad (4)$$

умови на вільних поверхнях

$$\sigma_{xx}(x, \pm y_0, \tau) = 0, \quad \sigma_{xy}(x, \pm y_0, \tau) = 0, \quad (5)$$

де $\theta(x, y, \tau) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$ - об'ємне розширення $u_x(x, y, \tau)$ $u_y(x, y, \tau)$ - компоненти вектору пружного переміщення

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{xx}; \quad \sigma_{yy} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{yy}; \\ \sigma_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy}; \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (6)$$

- компоненти тензора напруги і тензора деформацій.

$$\text{З умов(4), враховуючи, що } \theta(\pm 1, y, \tau) \equiv \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \Big|_{x=\pm 1} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=\pm 1}$$

отримаємо

$$\mu^{-1} \sigma_{xx}(\pm 1, y, \tau) = \kappa^2 \theta(\pm 1, y, \tau). \quad (7)$$

ПОБУДОВА РІШЕННЯ ЗАДАЧІ

Застосуємо до рівняння(1) інтегральне перетворення Лапласа по тимчасовій змінній і кінцевій \cos - перетворення Фур'є по змінній x [16]. Враховуючи симетрію завдання, нульові початкові умови(3), співвідношення(7) і умови(4), замість рівняння(1), після перетворень отримаємо

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_n}{dy^2} - (\xi_n^2 + s^2) \bar{\theta}_n = (-1)^{n+1} \frac{2\xi_n}{\kappa\mu} \bar{p}(s), \quad (8)$$

де $\xi_n = \pi(2n+1)/2a$ $\bar{\theta}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \cos(\xi_n x) \int_0^\infty \theta(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx$ - зображення по Лапласу і Фур'є.

Замість рівняння(2) відповідно отримаємо

$$\frac{d^2 \bar{v}_n}{dy^2} - (\xi_n^2 + \kappa^2 s^2) \bar{v}_n = (1 - \kappa^2) \frac{d\bar{\theta}_n}{dy}, \quad (9)$$

де $\bar{v}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \cos(\xi_n x) \int_0^\infty u_y(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx$. Рішення рівняння(7), враховуючи, що $\bar{\theta}_n(y, s)$ є парною функцією змінної y має вигляд

$$\bar{\theta}_n = A_n(s) \cosh(\gamma_1 y) + \frac{(-1)^n 2\xi_n \bar{p}(s)}{\mu \kappa^2 \gamma_1^2} \quad (10)$$

при $\gamma_1 = \sqrt{\xi_n^2 + s^2}$.

З обліком(10), рішення рівняння(9) отримаємо у виді

$$\bar{v}_n = B_n(s) \sinh(\gamma_2 y) + \frac{\gamma_1}{s^2} A_n(s) \sinh(\gamma_1 y) \quad (11)$$

при $\gamma_2 = \sqrt{\xi_n^2 + \kappa^2 s^2}$.

Іншу компоненту вектору переміщення

$$\bar{u}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \sin(\xi_n x) \int_0^\infty u_x(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx$$

знайдемо, враховуючи співвідношення $\bar{u}_n = \frac{1}{\xi_n} \left(\bar{\theta}_n - \frac{d\bar{v}_n}{dy} \right)$ у виді

$$\bar{u}_n(y, s) = -B_n(s) \xi_n^{-1} \gamma_2 \cosh(\gamma_2 y) - \frac{\xi_n}{s^2} A_n(s) \cosh(\gamma_1 y) + \frac{(-1)^n 2\bar{p}(s)}{\mu \kappa^2 \gamma_1^2}. \quad (12)$$

Величини $A_n(s)$ і $B_n(s)$ знайдемо з граничних умов(5), які в трансформантах по Лапласу і Фур'є і в термінах знайдених вище виразів матимуть вигляд

$$\begin{aligned} (\kappa^2 - 2) \bar{\theta}_n + 2 \frac{d\bar{u}_n}{dy} &= 0, \\ -\xi_n \bar{v}_n + \frac{d\bar{u}_n}{dy} &= 0, \quad y = \pm y_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Враховуючи вирази(10) -(12) з умов(13) знайдемо

$$\begin{aligned} A_n(s) &= \frac{s^2 (\xi_n^2 + \gamma_2^2) \sinh(\gamma_2 y_0) \bar{p}_n(s)}{\gamma_1^2 \Delta(\xi, s)}; \\ B_n(s) &= \frac{-2\xi_n^2 \sinh(\gamma_1 y_0) \bar{p}_n(s)}{\gamma_1 \Delta(\xi, s)} \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\Delta(\xi, s) = 4\xi_n^2 \gamma_1 \gamma_2 \sinh(\gamma_1 y_0) \cosh(\gamma_2 y_0) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \cosh(\gamma_1 y_0) \sinh(\gamma_2 y_0),$$

$$\bar{p}_n(s) = \frac{(-1)^n 2\xi_n (\kappa^2 - 2) \bar{p}(s)}{\mu \kappa^2}.$$

Остаточню по відомих $A_n(s)$ і $B_n(s)$ отримаємо

$$\bar{v}_n(y, s) = \gamma_1^{-1} \Delta^{-1} \left[(\xi_n^2 + \gamma_2^2) \sinh(\gamma_2 y_0) \sinh(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \sinh(\gamma_1 y_0) \sinh(\gamma_2 y) \right] \bar{p}_n; \quad (15)$$

$$\bar{u}_n(y, s) = \left(\frac{1}{(\kappa^2 - 2)\xi_n} + \frac{\xi_n}{\Delta} \left[2\gamma_1 \gamma_2 \sinh(\gamma_1 y_0) \times \cosh(\gamma_2 y) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2) \sinh(\gamma_2 y_0) \cosh(\gamma_1 y) \right] \right) \frac{\bar{p}_n}{\gamma_1^2}.$$

Обернення по Лапласу проведемо з використанням теореми розкладання [17]. Для цього розглянемо перше вираження(15) і знайдемо особливі точки знаменника. Очевидно, що корені вираження $\gamma_1 = 0$ не є особливими точками знаменника, а тому розглянемо рівняння

$$4\xi_n^2 \gamma_1 \gamma_2 \sinh(\gamma_1 y_0) \cosh(\gamma_2 y_0) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \cosh(\gamma_1 y_0) \sinh(\gamma_2 y_0) = 0. \quad (16)$$

Корені характеристичного рівняння(16) є уявними і комплексно-зв'язаними. Тому доцільно провести заміну $s = i\eta$ і, відповідно отримати $\gamma_1 = \sqrt{\xi_n^2 - \eta^2}$ $\gamma_2 = \sqrt{\xi_n^2 - \kappa^2 \eta^2}$.

Очевидно, що корені $\eta_{n,k}$ залежать від дискретної величини ξ_n а тому є можливими три випадки їх розміщення :

$$0 \leq |\eta_{n,k}| \leq \frac{\xi_n}{\kappa}; \quad \frac{\xi_n}{\kappa} < |\eta_{n,k}| \leq \xi_n; \quad |\eta_{n,k}| > \xi_n \quad (17)$$

Для першого інтервалу характеристичне рівняння зберігає вид(16) і має кінцеве число коренів $\eta_{n,k,1}$. Для інтервалу $\kappa^{-1}\xi_n < |\eta_{n,k}| \leq \xi_n$ характеристичне рівняння набирає вигляду:

$$4\xi_n^2 \gamma_1 \tilde{\gamma}_2 \sinh(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) - (\xi_n^2 + \tilde{\gamma}_2^2)^2 \cosh(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) = 0, \quad (18)$$

при $\tilde{\gamma}_2 = \sqrt{\kappa^2 \eta^2 - \xi_n^2}$. Воно має кінцеве число k_2 коренів $\eta_{n,k,2}$.

І, відповідно, для інтервалу $|\eta_{n,k}| > \xi_n$ рівняння

$$4\xi_n^2 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + (\xi_n^2 + \tilde{\gamma}_2^2)^2 \cos(\tilde{\gamma}_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) = 0 \quad (19)$$

при $\tilde{\gamma}_1 = \sqrt{\eta^2 - \xi_n^2}$ має нескінченну кількість коренів $\eta_{n,k,3}$.

Для звернення виразів(15) з використанням теореми розкладання слід вичислити похідну від знаменника (17). Для цього отримаємо значення похідної від вираження для різних інтервалів розміщення коренів характеристичного рівняння :

$$0 < |\eta| \leq \frac{\xi_n}{\kappa}, \Delta' \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,1}} \equiv \tilde{\Delta}_1(n, k) = \pm i \eta_{n,k,1} \left\{ 4\xi_n^2 \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sinh(\gamma_1 x_0) \cosh(\gamma_2 x_0) + \frac{\kappa^2 \gamma_1}{\gamma_2} \times \right. \right. \\
 \times \sinh(\gamma_1 x_0) \cosh(\gamma_2 x_0) + x_0 \gamma_2 \cosh(\gamma_1 x_0) \cosh(\gamma_2 x_0) + \kappa^2 x_0 \gamma_1 \sinh(\gamma_1 x_0) \sinh(\gamma_2 x_0) \left. \right] - \\
 - 4\kappa^2 (\xi_n^2 + \gamma_2^2) \cosh(\gamma_1 x_0) \sinh(\gamma_2 x_0) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \frac{x_0}{\gamma_1} \sinh(\gamma_1 x_0) \sinh(\gamma_2 x_0) - \\
 \left. - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \frac{\kappa^2 x_0}{\gamma_2} \cosh(\gamma_1 x_0) \cosh(\gamma_2 x_0) \right\}. \quad (20)$$

$$\frac{\xi_n}{\kappa} < |\eta| \leq \xi_n, \Delta' \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,2}} \equiv \tilde{\Delta}_2(n, k) = \mp \eta_{n,k,2} \left\{ 4\xi_n^2 \left[\frac{\tilde{\gamma}_2}{\gamma_1} \sinh(\gamma_1 x_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 x_0) - \right. \right. \\
 - \frac{\kappa^2 \gamma_1}{\tilde{\gamma}_2} \sinh(\gamma_1 x_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 x_0) + x_0 \tilde{\gamma}_2 \cosh(\gamma_1 x_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 x_0) + \kappa^2 x_0 \gamma_1 \sinh(\gamma_1 x_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 x_0) \left. \right] - \\
 - 4\kappa^2 (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2) \cosh(\gamma_1 x_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 x_0) - (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 \frac{x_0}{\gamma_1} \sinh(\gamma_1 x_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 x_0) + \\
 \left. + (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 \frac{\kappa^2 x_0}{\tilde{\gamma}_2} \cosh(\gamma_1 x_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 x_0) \right\}. \quad (21)$$

$$|\eta| > \xi_n, \Delta' \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,3}} \equiv \tilde{\Delta}_3(n, k) = \mp \eta_{n,k,3} \left\{ 4\xi_n^2 \left[\frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}_1} \sin(\tilde{\gamma}_1 x_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 x_0) + \right. \right. \\
 + \frac{\kappa^2 \tilde{\gamma}_1}{\tilde{\gamma}_2} \sin(\tilde{\gamma}_1 x_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 x_0) + x_0 \tilde{\gamma}_2 \cos(\tilde{\gamma}_1 x_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 x_0) - \kappa^2 x_0 \tilde{\gamma}_1 \sin(\tilde{\gamma}_1 x_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 x_0) \left. \right] - \\
 - 4\kappa^2 (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2) \cos(\tilde{\gamma}_1 x_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 x_0) - (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 \frac{x_0}{\tilde{\gamma}_1} \sin(\tilde{\gamma}_1 x_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 x_0) + \\
 \left. + (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 \frac{\kappa^2 x_0}{\tilde{\gamma}_2} \cos(\tilde{\gamma}_1 x_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 x_0) \right\}. \quad (22)$$

Друге вираження (15), окрім коренів характеристичного рівняння (16) як особливі точки знаменника має ще корені рівняння $\gamma_1 = 0$: $s = \pm i\xi$.

Враховуючи це, остаточне вираження для компонент вектору переміщення матиме вигляд

$$u_x(x, y, \tau) = -\frac{4}{\mu} \left(1 - \frac{2}{\kappa^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n^2 \sin(\xi_n x) \times \\
 \times \left\{ \sum_{k=1}^{k_1} \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \sinh(\gamma_1 y_0) \cosh(\gamma_2 y) - (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,1}^2) \sinh(\gamma_2 y_0) \cosh(\gamma_1 y)}{\gamma_1^2 \tilde{\Delta}_1(n, k)} f(\eta_{n,k,1}, \tau) + \right. \\
 + \sum_{k=1}^{k_2} \frac{2\gamma_1 \tilde{\gamma}_2 \sinh(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y) - (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,2}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \cosh(\gamma_1 y)}{\gamma_1^2 \tilde{\Delta}_2(n, k)} f(\eta_{n,k,2}, \tau) + \\
 \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y) + (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,3}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_1 y)}{\tilde{\gamma}_1^2 \tilde{\Delta}_3(n, k)} f(\eta_{n,k,3}, \tau) \right\} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 u_y(x, y, \tau) = & -\frac{4}{\mu} \left(1 - \frac{2}{\kappa^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n \cos(\xi_n x) \times \\
 & \times \left\{ \sum_{k=1}^{k_1} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,1}^2) \sinh(\gamma_2 y_0) \sinh(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \sinh(\gamma_1 y_0) \sinh(\gamma_2 y)}{\gamma_1 \tilde{\Delta}_1(n, k)} f(\eta_{n,k,1}, \tau) + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{k_2} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,2}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \sinh(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \sinh(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y)}{\gamma_1 \tilde{\Delta}_2(n, k)} f(\eta_{n,k,2}, \tau) + \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,3}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_1 y) - 2\xi_n^2 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y)}{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\Delta}_3(n, k)} f(\eta_{n,k,3}, \tau) \right\},
 \end{aligned} \tag{24}$$

де

$$f(\eta, \tau) = \int_0^{\tau} p(\tau - t) \sin(\eta t) dt \tag{25}$$

При відомих компонентах вектору переміщення(23) компоненти тензора деформацій і тензора напруги обчислюються по формулах(6). При цьому можна показати, що усі ряди в рішенні(23) є такими, що рівномірно сходяться, а тому операції диференціювання при відшукуванні компонент тензора деформацій і тензора напруги можна виконувати безпосередньо під знаком суми.

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

У умовах, які моделюють подрібнення, динамічне навантаження з визначеним, залежним від швидкості обертання лопатей ротора монотонно зростає від нульового до свого граничного значення. Нами, при числових розрахунках використовувалася залежність $p(t) = p^* (1 - \exp(-at))^2$ яка для безрозмірного часу τ матиме вигляд

$$p(\tau) = p^* (1 - \exp(-\tau_0 \tau))^2 \tag{26}$$

при $\tau_0 = (l \cdot a) / c_1$.

Така залежність дозволяє погоджувати початкові і крайові умови, а також у багатьох випадках досить точно наблизити реальну залежність динамічного навантаження від часу(мал. 2).

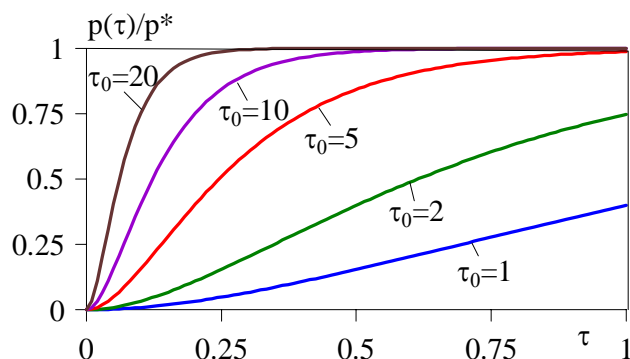


Рис 2. Залежність навантаження від часу

Обчислення інтеграла(25) для залежності навантаження(26) дозволяє знайти функцію $f(\eta, \tau)$:

$$f(\eta, \tau) = \frac{1}{\eta} - \frac{2\eta \exp(-\tau_0 \tau)}{\eta^2 + \tau_0^2} + \frac{\eta \exp(-2\tau_0 \tau)}{\eta^2 + 4\tau_0^2} + \cos(\eta \tau) \left(\frac{2\eta}{\eta^2 + \tau_0^2} - \frac{\eta}{\eta^2 + 4\tau_0^2} - \frac{1}{\eta} \right) + \sin(\eta \tau) \left(\frac{2\tau_0}{\eta^2 + 4\tau_0^2} - \frac{2\tau_0}{\eta^2 + \tau_0^2} \right). \quad (27)$$

Для такого виду навантаження робився розрахунок напруженого стану в грудці сапропелю прямокутної форми для різних значень τ_0 і різних співвідношень ширини і довжини прямокутника. На рис.3-5 представлені результати розрахунку напруженого стану в грудці сапропелю квадратної форми ($l = h$) при різних значеннях швидкості навантаження.

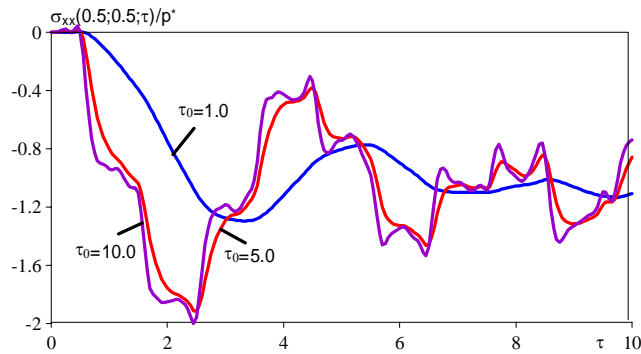


Рис. 3. Подовжня напруга, залежно від швидкості навантаження

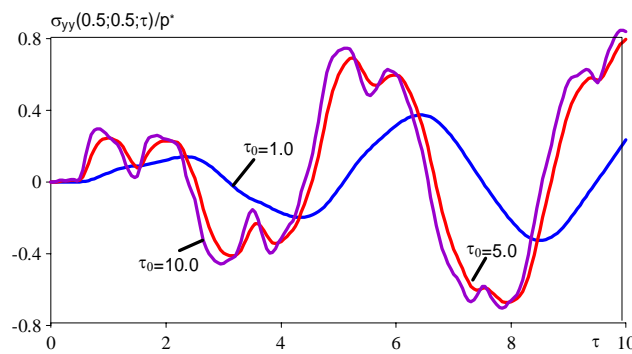


Рис. 4. Поперечна напруга, залежно від швидкості навантаження

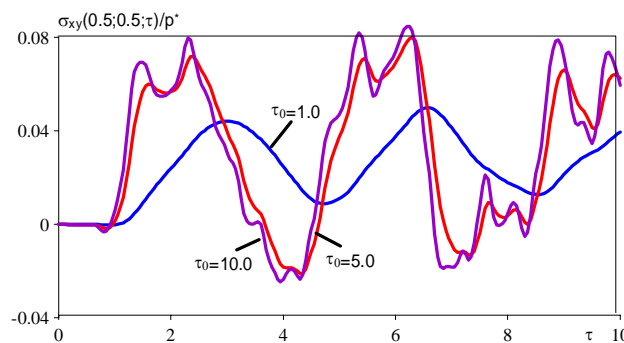


Рис. 5. Дотична напруга, залежно від швидкості навантаження

З малюнків можна зробити висновок, що при достатній ($\tau_0 \geq 5$) швидкості навантаження подовжня динамічна напруга по амплітуді удвічі перевищує відповідну статичну, поперечну напругу в певні моменти часу складають до 80% статичних, а дотична напруга тільки до 8%. Схожі результати отримані і при розрахунках напруженого стану в інших точках і при інших співвідношеннях висоти і ширини грудки. Причому зміна співвідношення між висотою і шириною грудки у будь-яку сторону призводить до зменшення рівня дотичної напруги.

Цей факт дозволяє стверджувати, що в такому формулюванні завдання, осі вибраної системи координат можна вважати головними осями тензора напруги в усіх точках прямокутної області. Це, у свою чергу, значно полегшує розрахунок головної дотичної напруги в матеріалі.

Відомо [3], що в цьому випадку максимальні по модулю дотичні напруги діятимуть на майданчиках похилих до осей координат під кутом 45° і складають

$$T_{\max} = \left| \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right|. \quad (28)$$

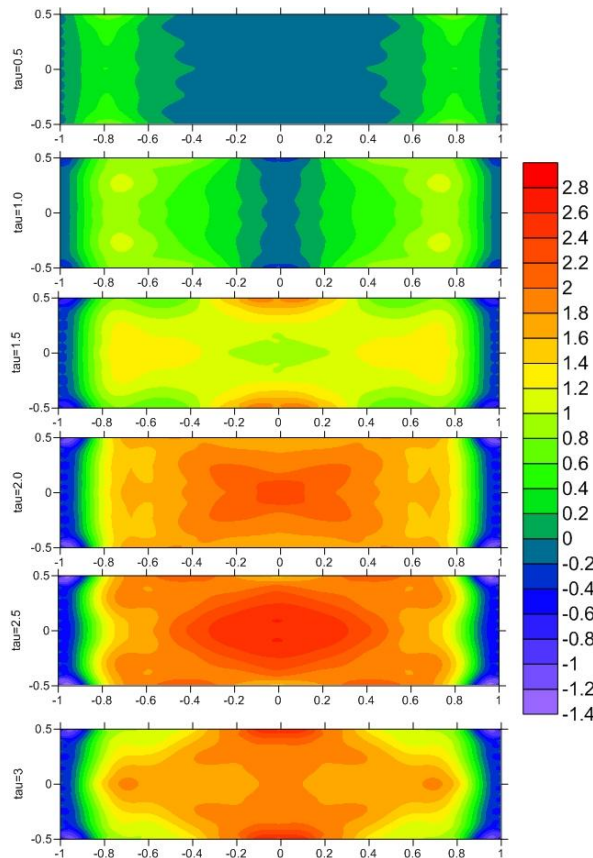


Рис. 6. Розподіл головної дотичної напруги в сапропелі при $h = 0.5l$

На рис. 6 представлені результати розрахунку просторово-часового розподілу віднесених до p^* головної дотичної напруги в елементі сапропелю, що має прямокутну форму із співвідношенням висоти до ширини $2 : 1$, при $\tau_0 = 5$ для різних значень безрозмірного часу.[16]

Висновки та перспективи подальшого дослідження. З приведеного можна зробити деякі висновки якісного і кількісного характеру. У перші моменти часу після додатка навантаження зони дії максимальних дотичних зусиль концентруються в локальних областях, розташування яких дозволяє прогнозувати руйнування зразка на 6-8 частин при досягненні дотичними зусиллями граничного значення. У ці моменти часу воно співвимірне з величиною зовнішнього навантаження. Якщо цих зусиль для руйнування недостатньо, то через проміжок часу $\tau_0 = 1$ ($t = 0.2ms$) внаслідок накладення набігаючих хвиль вони подвоюються, а після приходу відбитих хвиль зростають втричі в порівнянні з прикладеним навантаженням. Проте, зона дії цих зусиль сконцентрована поблизу центру зразка, що дозволяє прогнозувати його подрібнення на 2-4 частини. Схожі результати отримані і для інших геометричних співвідношень між висотою і шириною зразка. Таким чином, виходячи з модельних побудов, і проведених чисельних розрахунків можна стверджувати, що максимального значення головна дотична напруга досягає в областях розташованих поблизу центру зразка і складають до 300% від рівня зовнішнього навантаження.

Проте, для ретельнішого подрібнення бажано доводити зовнішнє навантаження до рівня граничного навантаження статичного завдання чистого зрушення, яке можна визначити експериментально.

1. Божидарнік В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999.,Т.1 - 532 с.
2. Панасюк В. В. Механіка квазіхрупкого руйнування матеріалів. – К.: Наук. думка, 1991., - 416 с.
3. Божидарнік В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994., - 580 с.
4. Поліщук М.М., Бабарика С.Ф. Дослідження процесу подрібнення промороженого сапропелю. // Сільськогосподарські машини. - 36. наук. ст. Вип. 24. - Луцьк: Ред. - вид. відділ ЛНТУ, 2013. - С. 298-305.
5. Бабарика С.Ф. Обґрунтування параметрів робочих органів машин для поверхневого внесення сапропелів. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. Тернопіль, 2012. 203 с.
6. Поліщук М.М. 2012р. Зміна фізико-механічних властивостей промороженого сапропелю з часом// "Актуальні задачі сучасних технологій": збірник тез доповідей міжнародної науково-технічної конференції молодих учених та студентів, 19-20 грудня., м. Тернопіль - Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. Івана Пулюя, 2012. С 17-18.
7. Поліщук М.М. Визначення тягового опору ложеформувача проморожених сапропелів// Сільськогосп. машини: 36. наук. ст. – Вип. 23. – Луцьк: Ред. - вид. відділ ЛНТУ, 2012. – 86 с.
8. Дідух В.Ф., Поліщук М.М. Дослідження умов локального внесення проморожених сапропелів//Механізація та електрифікація сільського господарства. Випуск 97 Т.1. – Глеваха, 2013. – С. 97 – 105.
9. Дідух В.Ф., Поліщук М.М. Тенденції розвитку технологій формування врожаю сільськогосподарських культур// Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету. Серія: Технічні науки / Редакція: Калетнік Г.М. (головний редактор) та інші. - Вінниця, - Випуск 11 т. 2 (66), 2012. - С 161-165.
10. Didukh V., Polishchuk M. Investigatijn of manufacture of organic fertilizers based on sapropel / /MOTROL. Commission of Motorization and Energetic in Agriculture – Lublin. Vol. 15, No 4. 2013 – P 225-230.
11. Сацюк В.В., Поліщук М.М., Голій О.В. До теорії визначення початкової швидкості руху частинки добрив на поверхні лопаті подрібнюючого бітера.// Сільськогосподарські машини:-36. Наук. ст. – Вип 25. – Луцьк: Ред. - вид. відділ Луцького НТУ, 2013 – С. 118-121.
12. Дідух В.Ф., Кірчук Р.В., Поліщук М.М. Обґрунтування профілю скребка транспортера.// Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. Випуск 145. «Технічний сервіс машин для рослинництва». – Х.: Віровець А.П. «Апостроф», 2014 – С. 82-90.
13. Бакум М.В. Сільськогосподарські машини. Ч.2. Машини для внесення добрив. У 2-х томах– Харків: ХНТУСГ, – Т. 1. 2008 – 285с.
14. Кругляков, М.Л. Техніка плодороддя (Удобрения и новые машины для внесения их в почву). / М.Л. Кругляков, А.М. Кругляков. – М.: Знание, 1964.
15. Шевчук М.Й. Сапропелі України. Запас, якість і використання органо-мінеральних добрив // Вісник аграрної науки, №2, 2000. – С. 24 – 28.
16. Didukh V. MATHEMATICAL SIMULTION OF THE SAPRAPEL GRINDING BY MEANS OF THE SHOCK LOANDS / V. Didukh, M. Polishchuk, I. Turchyn // Econtechmod. An international quarterly journal. Vol. 03 № 3. Poland. Lublin – Lviv 2014. – P. 3-9.
17. Meyers, M.A. Dynamics behavior of materials. –New York: Wiley, 1994. 283 p.
18. Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.-L., Forest, S. Non-Linear Mechanics of Materials.-Hardcover, 2010 433 p.
19. Meleshko, V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. Appl. Mech. Rev. Vol 56, No 1: 33-85 – 53 p.
20. Poruchikov, V.B. Methods of the classical theory of elastodynamics. – Berlin, New York: Springer-Verlag, 1993 – 319 p.