

УДК 519.688

Самчук О.Г., Пастернак Я.М., д.ф.-м.н.  
Луцький національний технічний університет

## МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У ДОВГИХ ЛІНІЯХ

**Самчук О.Г., Пастернак Я.М. Моделирование переходных процессов в длинных линиях.** Запропоновано операторну модель довгої лінії на основі її заміни чотириполосником із певною передатною функцією. Вказано на переваги запропонованої моделі порівняно із традиційною на основі використання ланцюгової схеми.

**Ключові слова:** довга лінія; перехідний процес; операторний метод

**Самчук А.Г., Пастернак Я.М. Моделирование переходных процессов в длинных линиях.** Предложено операторную модель длинной линии на основе её замены четырехполосником с заданной передатной функцией. Указаны преимущества предложенной модели по сравнению с традиционной на основе использования цепочной схемы.

**Ключевые слова:** длинная линия; переходный процесс; операторный метод

**Samchuk O.H., Pasternak Ia.M. Modelling of transient processes in long lines.** The paper proposes operator model of long line based on its replacement with 4-pole element with given transfer function. The advantages of corresponding model are shown comparing to usage of traditional chain curciut scheme.

**Keywords:** long line; transient process; operator approach

**Вступ.** Теорія електричних кіл, зокрема довгих ліній, розвивається і сьогодні. Це пов'язано з активним розвитком комп'ютерних мереж, адже глобальна павутина заповнила увесь світ, як у глобальному (оптоволоконні канали зв'язку між державами), так і локальному масштабі (Ethernet мережі підприємств, що використовують в своїй основі коаксіальні кабелі чи виті пари) [1].

Розробка мереж на основі виті пари пов'язана із побудовою розрахункових моделей перехідних процесів, що відбуваються у ній, адже саме вони впливають на пропускну здатність каналу та на утворення шумів [2]. На разі стосовно витих пар розроблено 7 категорій кабелів із пропускну здатністю до 10 Гбіт/с [3]. Також заплановано розробку 8 категорії витих пар із пропускну здатністю до 100 Гбіт/с.

При цьому важливо здійснити аналіз кусково-однорідних ліній, адже у точці з'єднання відбувається відбивання хвиль, що в свою чергу негативно впливає на пропускну здатність каналу зв'язку [4]. Це зумовлює науковий пошук цілісних математичних моделей та методів аналізу довгих ліній, зокрема і з використанням наближених аналітичних методів [5]. Одним з них є спосіб заміни довгої лінії послідовністю із  $R$ ,  $L$ ,  $C$  елементів (метод скінченних елементів). Проте він має свої недоліки, зокрема, для високих несучих частот сигналу така схема потребує великої кількості ланок.

Тому на даний час досі існує потреба побудови наближених аналітичних методів моделювання довгих ліній, що дали би можливість скоротити кількість використаних елементів за збереження бажаної точності моделювання.

**Побудова моделі.** Розглянемо схему моделювання системи з розподіленими параметрами на прикладі однорідної довгої лінії. Врахуємо, що моделювати можна тільки зв'язок між певними, наперед заданими точками об'єкту із розподіленими параметрами. Досліджуватимемо співвідношення між вхідним та вихідним сигналами, а саму систему подамо у вигляді паралельного з'єднання двох чотириполосників – чотириполосника із зосередженими параметрами  $B$  та чотириполосника  $D$ . Чотириполосник  $B$  вважатимемо моделлю об'єкта із розподіленими параметрами. Відсутність у моделі чотириполосника  $D$  вноситиме деяку похибку – похибку моделювання.

У рівняння, що описують чотириполосник, входять чотири коефіцієнти, що можна знайти розглядом двох режимів – холостого ходу і короткого замикання.

Напруга в кінці лінії має вигляд

$$U_{\text{вих}}(p) = E(p) \frac{2e^{-\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}} = E(p)W(p),$$

де  $W(p)$  – передача по напрузі розімкнутої в кінці лінії протяжністю  $l$ ;

$$\gamma = \sqrt{LC} \sqrt{(p + \alpha)^2 - \beta^2}.$$

Дослідимо передатну функцію  $W(p)$ . Її полюси визначаються із рівняння

$$1 + e^{-2\gamma l} = 0 \quad (1)$$

Позначивши

$$2\gamma l = \kappa + j\vartheta; \quad 2l\sqrt{LC} = a, \quad \sigma + \alpha = b; \quad p = \sigma + j\omega$$

отримаємо

$$a^2(b^2 - \omega^2 - \beta^2) + 2ja^2\omega b = \kappa^2 - \vartheta^2 + 2j\kappa\vartheta.$$

Прирівнюючи дійсну та уявну частини цієї рівності, отримаємо систему двох рівнянь стосовно невідомих  $\kappa$  та  $\vartheta$ :

$$a^2[b^2 - \omega^2 - \beta^2] = \kappa^2 - \vartheta^2; \quad a^2\omega b = \kappa\vartheta. \quad (2)$$

Розв'язки, що задовольняють рівняння (2) мають такий загальний вигляд:

$$\begin{aligned} \kappa &= a\sqrt{\frac{1}{2}\left[(b^2 - \omega^2 - \beta^2) + \sqrt{(b^2 - \omega^2 - \beta^2)^2 + 4\omega^2 b^2}\right]}; \\ \vartheta &= a\sqrt{\frac{1}{2}\left[-(b^2 - \omega^2 - \beta^2) + \sqrt{(b^2 - \omega^2 - \beta^2)^2 + 4\omega^2 b^2}\right]}. \end{aligned} \quad (3)$$

Рівність (1) виконується за таких умов:

$$\kappa = 0, \quad \vartheta = 2\pi n + \pi. \quad (4)$$

Із (3) та (4) знаходимо полюси функції передачі

$$p_n = -\alpha \pm j\sqrt{\left[\frac{(2n+1)\pi}{a}\right]^2 - \beta^2}; \quad n = 0, \dots, \infty.$$

Введемо значення натурального числа  $n_1$  так, що

$$\omega_{\max} \leq \sqrt{\left[\frac{(2n_1+1)\pi}{a}\right]^2 - \beta^2},$$

де  $\omega_{\max}$  – максимальна частота сигналу, що враховується при моделюванні.

Передачу  $W(p)$ , таким чином, можна побудувати, розкладаючи її за полюсами

$$W(p) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{p - p_n}.$$

Визначивши

$$A_n = \lim_{p \rightarrow p_n} \left[ \frac{2e^{-\gamma l}}{\frac{\partial}{\partial p}(1 - e^{-2\gamma l})} \right] = \frac{(-1)^n (2n+1)\pi}{2l^2 LC(\pm j\omega_n)}$$

і підставивши у попередню формулу, отримаємо

$$\begin{aligned} W(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)\pi}{2l^2 LC(j\omega_n)} \left[ \frac{1}{p + \alpha - j\omega_n} - \frac{1}{p + \alpha + j\omega_n} \right] = \\ &= \frac{\pi}{l^2 LC} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(p + \alpha)^2 + \omega_n^2}. \end{aligned}$$

Запишемо передачу  $W(p)$  у такому вигляді:

$$W(p) = W_B(p) + W_D(p),$$

де прийmemo

$$W_B(p) = \frac{\pi}{l^2 LC} \sum_{n=0}^{n'} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(p+\alpha)^2 + \omega_n^2};$$

$$W_D(p) = \frac{\pi}{l^2 LC} \sum_{n=n'+1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(p+\alpha)^2 + \omega_n^2};$$

де  $W_B(p)$  – передача системи  $B$ ;  $W_D(p)$  – передача системи  $D$ .

**Оцінювання похибки моделювання.** Похибкою моделювання вважатимемо відмінність у певній смузі частот частотної характеристики моделі від частотної характеристики об'єкту.

Частотна характеристика  $W(j\omega)$  одержується з  $W(p)$  заміною  $p$  на  $j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{\pi}{l^2 LC} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)(\omega_n^2 + \alpha^2 - \omega^2 + 2j\omega\alpha)}{(\alpha^2 + \omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}.$$

Для спрощення дослідження довгої лінії при обмеженій частоті вхідного сигналу можна використовувати тільки систему  $B$  із частотною характеристикою

$$W_B(j\omega) = \frac{\pi}{l^2 LC} \sum_{n=0}^{n'} (-1)^n \frac{(2n+1)(\omega_n^2 + \alpha^2 - \omega^2 + 2j\omega\alpha)}{(\alpha^2 + \omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}.$$

Залишається визначити, яку похибку в обчислення вносиме таке спрощення задачі.

Амплітудна характеристика систем  $D$  може бути представлена у вигляді

$$|W_D(j\omega)| = \sqrt{P_D^2(\omega) + Q_D^2(\omega)},$$

де

$$P_D(\omega) = \frac{\pi}{l^2 LC} \sum_{n=n'+1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)(\omega_n^2 + \alpha^2 - \omega^2)}{(\alpha^2 + \omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2};$$

$$Q_D(\omega) = \frac{2\pi}{l^2 LC} \sum_{n=n'+1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)\omega\alpha}{(\alpha^2 + \omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}.$$

Оцінювання рядів здійснюватимемо при  $n' \geq n_1$ .

Підставляючи значення  $\omega_n$  бачимо, що знакопочерезні ряди  $P_D(\omega)$  та  $Q_D(\omega)$  збіжні, а їхні величини не перевищують за модулем абсолютної величини першого члена [6]:

$$|P_D(\omega)| < \frac{\pi}{l^2 LC} \frac{(2n'+3)(\omega_{n'}^2 + \alpha^2 - \omega^2)}{(\alpha^2 + \omega_{n'}^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2};$$

$$|Q_D(\omega)| < \frac{2\pi}{l^2 LC} \frac{(2n'+3)\omega\alpha}{(\alpha^2 + \omega_{n'}^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2};$$

$$|W_D(\omega)| < \frac{\pi(2n'+3)}{l^2 LC} \left[ (\alpha^2 + \omega_{n'}^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}}; \quad (5)$$

Фазовий зсув можна просто оцінити з геометричних міркувань (див. рис. 1):

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi \leq \frac{|W_D(j\omega)|}{|W_B(j\omega)|} \approx \frac{|W_D(j\omega)|}{|W(j\omega)|}. \quad (6)$$

де  $\Delta\varphi$  – амплітудна похибка фази частотної характеристики  $W(j\omega)$  при її заміні на модельну  $W_B(j\omega)$ .

Таким методом, як і вище, можна знайти частотну характеристику системи  $B$  та оцінити, яку похибку вносиме заміна нею частотної характеристики об'єкту.

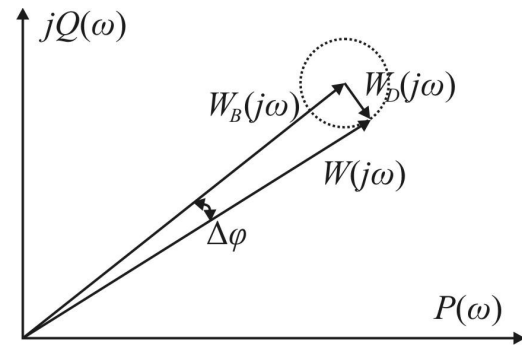


Рисунок 1 – Оцінка фазового зсуву моделі

**Переваги моделі.** Розглянемо, для прикладу, моделювання лінії з параметрами [7]:

$$L = 0,277 \text{ мкГн/м}; R = 2,74 \cdot 10^3 \text{ Ом/м}; C = 100 \text{ пФ/м}; G = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ мо/м}; \\ l = 250 \text{ м.}$$

Заданою відносною похибкою моделювання  $M$  для діапазону частот  $0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$ , а саме приймемо

$$M = 0,01; \omega_{\max} = 10^7 \text{ 1/м.}$$

Порівнюватимемо запропоновану модель із підходом заміни довгої лінії ланцюговою схемою за порядком  $r$  характеристичного рівняння їх функцій передачі при однакових похибках моделювання. Навантаження, для простоти знаходження  $r$ , вважатимемо активним.

Розглянемо спочатку модель лінії у вигляді ланцюгової схеми. Кількість чотириполіусників  $N$  знаходитимемо відповідно до формули:

$$N \geq \frac{\omega_c l}{V} \sqrt{\frac{2\Delta\omega - M\omega_c}{6M\omega_c}} = 39,$$

де  $\omega_c = \Delta\omega = 5 \cdot 10^6 \text{ 1/с.}$

Таким чином, передачу ланцюгової схеми можна розкласти за полюсами, кількість яких дорівнюватиме

$$r = 2N.$$

Отже, у нашому випадку

$$r \geq 78.$$

Моделювання лінії чотириполіусником  $B$  довільної структури, відповідно до сказаного вище, вимагає визначення числа  $n'$ , тобто кількості полюсів передатної функції даного чотириполіусника. Найпростіше визначити його в якому-небудь граничному випадку. Наприклад, для розімкненої в кінці лінії:

$$M \geq \frac{|W_D|}{|W|} > \frac{(2n_1 + 3)n_1^2}{(2n' + 3)(n' + 1 - n_1)(n' + n_1 + 2)}. \quad (7)$$

Формула (7) отримана шляхом спрощення формули (5). Підставляючи числові значення параметрів лінії, знаходимо для вказаного діапазону частот і відносної похибки моделювання величину  $n' = 15$ .

Отже, порядок характеристичного рівняння функції передачі чотириполіусника  $B$  повинен бути не меншим

$$r \geq 2n' = 30.$$

Даний приклад засвідчує те, що дослідження довгої лінії вигідніше проводити, моделюючи її запропонованим чотириполіусником  $B$ , ніж ланцюговою схемою.

**Висновки.** Запропоновано новий спосіб моделювання довгих ліній, що базується на обмеженні кількості полюсів функції передачі системи. Обчислено похибку таго моделювання при заданому частотному спектрі сигналу. Шляхом порівняння з відомою моделлю довгої лінії у вигляді системи із заданою структурою висвітлено переваги запропонованої моделі. Вказано на можливість застосування розробленої моделі при проектуванні нових категорій витих пар із високою пропускнуою здатністю, а також при розрахунку відповідальних комп'ютерних мереж.

1. Chen W.Y. Home Networking Basics. – New York: Prentice Hall, 2004.
2. McBee D.B., David Groth J. Cabling : the complete guide to network wiring (3rd ed.). – San Francisco: SYBEX, 2004.
3. "Standards - ISO/IEC JTC 1/SC 25 - Interconnection of information technology equipment". ISO.org. Retrieved 2016-10-02.
4. Standler R.B. Protection of Electronic Circuits from Overvoltages. – New York: Courier Dover Publications, 2002.
5. Reeve W.D. Subscriber Loop Signaling and Transmission Handbook. – Chicago: IEEE Press, 1994.
6. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – Т. 1. – М.: Гостехиздат, 1957.
7. Заездный А.Г. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – М.: Гостехиздат, 1957.