УДК 514.18
Верещага В.М., д.т.н.[1], Адоньєв Є.О., к.т.н.[2]
[1] - Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Б. Хмельницького
[2] - Запорізький національний університет

КОМПОЗИЦІЙНИЙ МЕТОД УТВОРЕННЯ Б-ПОВЕРХОНЬ

Верещага В.М., Адоньєв Є.О. Композиційний метод утворення Б-поверхонь. Введено поняття «Б-поверхня» (Балюби поверхня). Показані принципи композиційного методу утворення Б-поверхонь та доведено необхідність його подальшої розробки. Сформульовано ознаки та правила створення точкових рівнянь, які описують Б-поверхні. Показано властивості, що їх визначають, та можливості щодо перетворень Б-поверхонь, вказано напрями їхнього застосування.
Ключові слова: геометричне моделювання, точкове рівняння, параболічна поверхня, композиція, суперпозиція.

Верещага В.М., Адоньев Е.А. Композиционный метод образования Б-поверхностей. Введено понятие «Б-поверхность» (Балюбы поверхность). Показаны принципы композиционного метода образования Б-поверхностей и доказана необходимость его дальнейшей разработки. Сформулированы признаки и правила построения точечных уравнений, которые описывают Б-поверхности. Показаны свойства, которые их определяют и возможности преобразований Б-поверхностей, увказаны направления их применения.
Ключевые слова: геометрическое моделирование, точечное уравнение, параболическая поверхность, композиция, суперпозиция.

Vereschaha V.M., Adoniev Y.O. Compositional method of B-surfaces formation. The notion of "B-surface" (Balyuby surface). The following principles of compositional method of B-surfaces formation and the necessity of its further development. Formulated signs and rules for creating point equations that describe the B-surface. Showing properties that define them, and the possibilities for transformation of B-surfaces specified areas of their application.
Keywords: geometric modeling, point equation, parabolic surface, composition, superposition.

Постановка проблеми. Традиційні геометро-математичні методи утворення поверхонь, моделювання процесів та дослідження явищ і станів виконується з використанням способів комбінаційного характеру, у яких складові - математичні елементи є взаємно залежними, при цьому, застосовуються різні техніки для знаходження кореляцій між складовими [10]. Наявність взаємної залежності між елементами геометро-математичної моделі завжди висуває до неї певні обмеження за кількістю факторів , за розмірами матриць, тощо, а це призводить до створення неадекватних моделей, розрахунки за якими, здебільшого, будуть мати похибки, в результаті чого будуть прийматися помилкові рішення. Для підвищення адекватності моделі розробляються різні способи виявлення головних факторів, елементів, компонент, складових геометричного характеру, тощо, що надає певні покращення моделі, однак, при цьому, не знімається обмеження з кількості вихідних факторів, що характеризують процес [6, 7]. Тому актуальною є проблема розробки методу моделювання, який мав би можливість, при створенні моделі, включати максимально необхідну кількість факторів досліджуваного процесу. На нашу думку, розв’язок проблеми збільшення вихідної інформації у моделюванні криється у розробці композиційних моделей, у яких не існує взаємно обумовленого зв’язку між її елементами.

Огляд літературних джерел. Ідея розробки композиційних методів моделювання поверхонь виникла після досконалого пізнання та осмислення точкового числення Балюби-Найдиша [1]. Були опрацьовані принципи побудови у точковому численні поверхонь типу “Лупа” [8, 9], які не сформовані у вигляді повноцінного методу моделювання, але задають певні напрямки досліджень і використовуються у даній роботі. Тому точкове БН-числення, в тому числі, методика побудови параболічних поверхонь [2, 4, 5] стало підґрунтям для виникнення композиційного методу моделювання, який запропоновано авторами і уперше розглядається у цій статті.

Ціль та завдання статті. На прикладі Б-поверхні розглянути основи та необхідність розробки композиційного методу геометричного моделювання, показати його переваги та означити перспективи застосування.

Основна частина. Розглянемо параболічну поверхню Балюби (БПП), що задана точками x_{11}, …, x_{33}, тобто x_{ij}, для $1 \le i, j \le 3$ (рис.1).

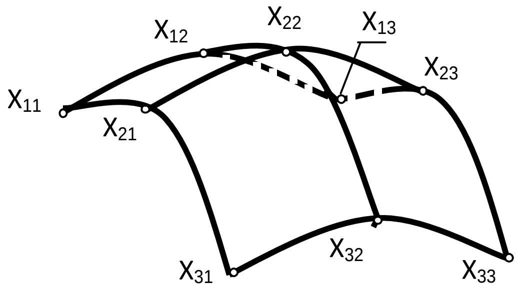

Рис. 1. Схема БПП у просторі

Нехай у повздовжньому напрямі визначені параболи M_1, M_2 та M_3 з однаковими параметрами

$$p_1=4u^2-3u+2;\ \ q_1=5u^2+4; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} M_1=(x_{11}-x_{12})p_1+(x_{13}-x_{12})q_1+x_{12}; \\ M_2=(x_{21}-x_{22})p_1+(x_{23}-x_{22})q_1+x_{22}; \\ M_3=(x_{31}-x_{32})p_1+(x_{33}-x_{32})q_1+x_{32}; \end{gathered} \tag{2}$$

а у поперечному напрямі параметри

$$p_2=2v^3-v^2-1;\ \ q_2=v^2-4v+2, \tag{3}$$

що є однаковими для усіх N_1, N_2, N_3 парабол:

$$\begin{gathered} N_1=(x_{11}-x_{21})p_2+(x_{31}-x_{21})q_2+x_{21}; \\ N_2=(x_{12}-x_{22})p_2+(x_{32}-x_{22})q_2+x_{22}; \\ N_3=(x_{13}-x_{23})p_2+(x_{33}-x_{23})q_2+x_{23}. \end{gathered} \tag{4}$$

Враховуючи (1) та (3), можемо записати:

$$r_1=-9u^2+3u-5;\ r_2=-2v^3+4v. \tag{5}$$

З урахуванням (5) можемо (2) та (3) записати у наступному вигляді:

$$\begin{gathered} M_1=x_{11}p_1+x_{12}r_1+x_{13}q_1; \\ M_2=x_{21}p_1+x_{22}r_1+x_{23}q_1; \\ M_3=x_{31}p_1+x_{32}r_1+x_{33}q_1; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} N_1=x_{11}p_2+x_{21}r_2+x_{31}q_2; \\ N_2=x_{12}p_2+x_{22}r_2+x_{32}q_2; \\ N_3=x_{13}p_2+x_{23}r_2+x_{33}q_2. \end{gathered} \tag{7}$$

Складемо схему утворення елементів-функцій a_{ij}:

$$\begin{array}{ccc|c} p_1 & r_1 & q_1 & p_2 \\ p_1 & r_1 & q_1 & r_2 \\ p_1 & r_1 & q_1 & q_2 \end{array} \tag{8}$$

Тоді визначимо елементи-функції як добутки:

$$\begin{gathered} a_{11}=p_1p_2=(4u^2-3u+2)(2v^3-v^2-1); \\ a_{12}=r_1p_2=(-9u^2+3u-5)(2v^3-v^2-1); \\ a_{13}=q_1p_2=(5u^2+4)(2v^3-v^2-1); \\ a_{21}=p_1r_2=(4u^2-3u+2)(-2v^3+4v); \end{gathered}$$

$$a_{22}=r_1r_2=(-9u^2+3u-5)(-2v^3+4v);\tag{9}$$
$$a_{23}=q_1r_2=(5u^2+4)(-2v^3+4v);$$
$$a_{31}=p_1q_2=(4u^2-3u+2)(v^2-4v+2);$$
$$a_{32}=r_1q_2=(-9u^2+3u-5)(v^2-4v+2);$$
$$a_{33}=q_1q_2=(5u^2+4)(v^2-4v+2);$$

Точкове рівняння параболічної поверхні Балюби (БПП) матиме вигляд

$$M=\sum_{i,j=1}^{3}x_{ij}a_{ij}\tag{10}$$

Розрахуємо функції-параметри a_{ij}, результати розрахунків для значень u, v= 0; 0.2; 0.4; 0.5; 0.6; 0.8; 1.0, зведемо у таблицю 1:

Таблиця 1. Результати розрахунків функцій-параметрів

	u, v						
a_{ij}	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
a_{11}	-2	-1,59744	-1,48608	-1,5	-1,52192	-1,33056	0
a_{12}	5	4,87424	5,40768	5,75	5,97632	5,14976	0
a_{13}	-4	-4,3008	-4,9536	-5,25	-5,3824	-4,4352	0
a_{21}	0	1,22304	2,11968	2,625	3,22752	4,70016	6
a_{22}	0	-3,73184	-7,71328	-10,0625	-12,67392	-18,19136	-22
a_{23}	0	3,2928	7,0656	9,1875	11,4144	15,6672	18
a_{31}	4	1,9344	0,8064	0,375	-0,0656	-1,2096	-3
a_{32}	-10	-5,9024	-2,9344	-1,4375	0,2576	4,6816	11
a_{33}	8	5,208	2,688	1,3125	-0,232	-4,032	9
$\sum a_{ij}$	1	1	1	1	1	1	1

Покажемо графічно (рис. 2) результати розрахунків a_{ij}, що наведені у табл. 1.

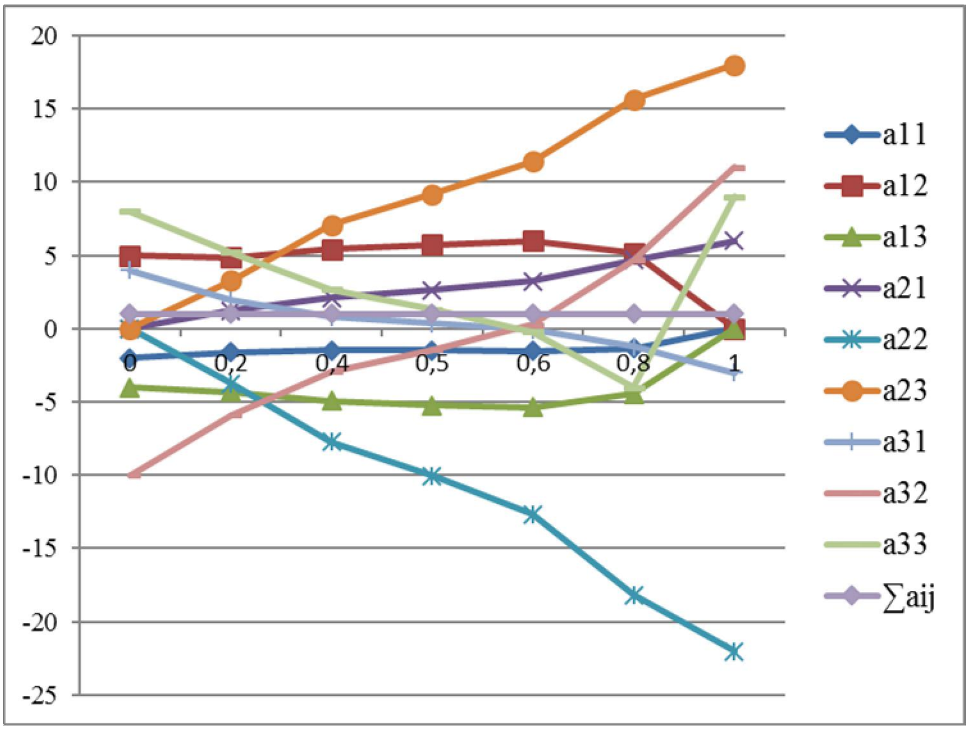

Рис. 2. Графіки функцій-параметрів a_{ij}.

Як бачимо, суперпозиція $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}$ для усіх значень параметрів *u*, *v*, які прийнято у табл. 1, дорівнює одиниці (останній рядок табл. 1).

Чому при будь-яких значеннях p_1, q_1, p_2, q_2 суперпозиція функцій-параметрів a_{ij} буде дорівнювати одиниці? Виходячи з теорії точкового БН-числення [1], точкові рівняння для усіх геометричних фігур мають область значення $0 \le t \le 1$. Тому, якщо параметри p_i, q_i можемо обирати довільно (аналогічно, як дві координати точки на площині), то третій параметр r_i необхідно обирати із умови $p_i+q_i+r_i=1$. Якщо, врахувавши це та використавши схему утворення функцій-параметрів (елементів) a_{ij} (8), то можемо записати:

$$\begin{Vmatrix} p_1 p_2 & r_1 p_2 & q_1 p_2 \\ p_1 r_2 & r_1 r_2 & q_1 r_2 \\ p_1 q_2 & r_1 q_2 & q_1 q_2 \end{Vmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Якщо розглядати окремо кожний рядок матриці (11), то бачимо, що кожен з них дорівнює добутку одиниці на відповідний параметр p_2, r_2,q_2:

$$(p_1+q_1+r_1)p_2=1\cdot p_2;$$
$$(p_1+q_1+r_1)r_2=1\cdot r_2;$$
$$(p_1+q_1+r_1)q_2=1\cdot q_2.$$

Враховуючи, що $p_2+r_2+q_2=1$, маємо: $1\cdot p_2+1\cdot r_2+1\cdot q_2=p_2+r_2+q_2=1$, а звідси випливає, що суперпозиція $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} = 1.$

Твердження1. Суперпозиція функцій-параметрів a_{ij} у будь-якої параболічної поверхні Балюби (Б-поверхні) завжди дорівнює одиниці.

Наявність такої ознаки Б-поверхонь вказує на те, що параметри p_1, q_1 першого напряму *u* на цій поверхні можуть бути обрані довільно, але вибір r_1 потрібно робити, дотримуючись певної функціональної залежності.

Для другого напряму Б-поверхні – *v* також параметри p_2, q_2 обираються довільно, а параметр r_2 є взаємно зумовленим з параметрами p_2 та q_2 (тобто їхньою комбінацією).

Розглянемо другу властивість Б-поверхонь. Якщо визначити відношення першого рядка до другого матриці (11), то отримаємо матрицю-рядок:

$$\left\{ \frac{p_1 p_2}{p_1 r_2} \quad \frac{r_1 p_2}{r_1 r_2} \quad \frac{q_1 p_2}{q_1 r_2} \right\} = \{1 \quad 1 \quad 1\} \frac{p_2}{r_2}. \tag{12}$$

Отриманий результат з (12) свідчить про те, що елементи першого та другого рядків матриці (11) є пропорційними один до одного з коефіцієнтом пропорційності $\frac{p_2}{r_2}$.

Аналогічним чином покажемо пропорційність елементів другого та третього рядків матриці (11):

$$\left\{ \frac{p_1 r_2}{p_1 q_2} \quad \frac{r_1 r_2}{r_1 q_2} \quad \frac{q_1 r_2}{q_1 q_2} \right\} = \{1 \quad 1 \quad 1\} \frac{r_2}{q_2}. \tag{13}$$

Покажемо, що пропорційними є відношення між елементами першого та другого, другого та третього стовпчиків матриці (11):

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{p_1 p_2}{r_1 p_2} \\ \dfrac{p_1 r_2}{r_1 r_2} \\ \dfrac{p_1 q_2}{r_1 q_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{p_1}{r_1}; \qquad \begin{Bmatrix} \dfrac{r_1 p_2}{q_1 p_2} \\ \dfrac{r_1 r_2}{q_1 r_2} \\ \dfrac{r_1 q_2}{q_1 q_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{r_1}{q_1}; \tag{14}$$

Також пропорційними є перший та третій рядки та стовпчики. Як відомо [3], достатньо пропорційності лише між двома рядками або стовпчиками з (11), тоді визначник *detA* цієї матриці буде дорівнювати нулю:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 0 .$$

Твердження 2. Визначник, складений із функцій-параметрів a_{ij} будь-якої Б-поверхні дорівнює нулю.

Зауважимо, що і перше, і друге твердження, кожне окремо, є необхідною, але недостатньою умовою для визначення Б-поверхонь. Отже, твердження 3 визначає і необхідну, і достатню умови.

Твердження 3. Якщо суперпозиція $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}$ елементів матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ дорівнює одиниці, тобто $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} = 1$, а визначник *detA*=0, то поверхня, що побудована на будь-яких вихідних даних x_{11}, …, x_{33} є Б-поверхнею.

Кожна точка M_{ij} (10) Б-поверхні вираховується як сума частин a_{ij} від одиниці, що помножена на відповідну координату x_{ij}, тобто є композицією частин значень координат вихідних точок. Оскільки вихідні дев’ять дійсних точок є незалежними, то їх можна обрати таким чином, щоб Б-поверхня стала площиною, кривою лінією, прямою або точкою. Існуючі геометро-математичні методи надають поверхні, що мають комбінаційний характер утворення, тобто такі, що описані рівнянням або системою рівнянь, де зміна вихідних даних може привести до зміни самого рівняння.

І навпаки, Б-поверхні мають композиційний характер, у яких незалежні координати (точки), як елементи пазлу, складають картину на основі нескінченої кількості композицій. Б-поверхні, в залежності від того, дискретно чи неперервно визначені їхні параметри, є дискретними або неперервними.

На нашу думку, Б-поверхні є новим типом поверхонь композиційного характеру.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Відкрито новий тип поверхонь композиційного характеру – Б-поверхні, вперше сформульовані їхні ознаки та правила створення точкових рівнянь, що їх описують. Показано властивості щодо виродження Б-поверхонь у площтну, криву або пряму лінії і, навіть, у точку, що дало можливість розробити спосіб розгортання-згортання чарунок, на базі якого буде розроблено метод моделювання багатофакторних процесів.

1. Балюба И.Г., Найдыш В.М. Точечное исчисление / Под ред. В.М. Верещаги: Учебное пособие. – Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б. Хмельницького. 2015. – 234 с.
2. Балюба И.Г. Точечное уравнение параболической дуги кривой второго порядка / И.Г. Балюба, А.И. Бумага // Збірник тез доповідей і повідомлень VI Міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів, студентів. – Макіївка: ДонНАБА, 2007 – с. 64.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М., 1980, 976 с.

4. Бумага А.И. Теоретические основы конструирования геометрических объектов многомерного пространства в БН-исчислении / А.И. Бумага, А.В. Найдыш, Е.В. Конопацкий, О.А. Чернышова // Научные итоги: достижения, перспективы, гипотезы: Сб. докл. XVIII юбилейной междунар. научн.-практ. конф. (28 ноября 2013 г.) – Вып. 18. С. 151-154.
5. Бумага А.І. Точкове рівняння дуги параболи другого порядку. Геометрическое и компьютерное моделирование: энергосбережение, экология, дизайн: Матер. IX Крымской междунар. науч.-практ. конф. (24-28 сентября 2012 г.). Симферополь. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Прикладна геометрія та інженерна графіка (спецвипуск). К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 49-52
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. ч. 1-2, - М., 1971-73.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976.
8. Кучеренко В.В. Реконструкція способом "Лупа" дискретно представленої поверхні земельної ділянки на основі рівномірної сітки у плані / В.В. Кучеренко, В.М. Верещага, І.Г. Балюба, Є.В. Конопацький // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип. 4, т. 55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012 – С. 143-147.
9. Кучеренко В.В. Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченої множини точок: дис. ... канд. техн. наук, 05.01.01 / Вадим Володимирович Кучеренко, Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь, 2013. – 232 с.
10. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия. тт. 2, 3, 4, 5. 1979 – 1984 гг.