УДК 539.3
Гуда О.В., Тимощук В.М.,. Крадінова Т.А
Луцький національний технічний університет

МЕТОД ВИВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ В НЕКЛАСИЧНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Гуда О.В., Тимощук В. М., Крадінова Т. А. Метод виведення рівнянь рівноваги в некласичній постановці. У даній роботі на основі варіаційного принципу Лагранжа для повної енергії пружної системи виведено рівняння рівноваги. Дані рівняння враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення.
Ключові слова: ізотропні та транстропні пластини, поперечний зсув, поперечне обтиснення, згинальні моменти, поперечні сили, прогин, напруження.
Форм. 12. Літ. 6.

Гуда О.В, Тымощук В.Н, Крадинова Т.А. Метод вывода уравнений равновесия в неклассической постановке. В данной работе с помощью вариационного принципа Лагранжа для полной энергии упругости получены уравнения равновесия, которые учитывают деформации поперечного сдвига и обжатия.
Ключевые слова: изотропные и транстропные пластины, поперечный сдвиг, поперечное обжатие, сгибальные моменты, поперечные силы, изгиб, напряжение.

Guda O.V, Tymoshchuk V.M., Kradinova T.A. The method of withdrawal equilibrium equations in the nonclassical setting. In this paper, which based on the Lagrange variational principle for the complete power of elastic systems, the equations of equilibrium were derived. These equations take into account the deformations of transverse shift and compression.
Key words: isotropic and transtropic plates, transverse shear, transverse compression, bending moments, transverse forces, deflection, stress,.

Постановка проблеми. Існують різні методи виводу диференціальних рівнянь рівноваги тонких пластин. Одним із основних і найпоширеніших методів виводу таких рівнянь є використання рівнянь рівноваги в моментах і зусиллях. Недоліком цього методу є невмотивованість запису граничних умов на краях пластини. Більш досконалими є варіаційні методи (Лагранжа, Рейсснера, змішаного методу), які дозволяють, разом із рівняннями рівноваги, виводити енергетично вмотивовані граничні умови. У багатьох працях вітчизняних та зарубіжних дослідників використовують розрахункові рівняння пластин та оболонок у некласичній постановці. Більшість існуючих некласичних теорій пластин і оболонок враховують деформацію поперечного зсуву, а деякі, частково, враховують ще і поперечне обтиснення. Проте, як показують дослідження, у розрахунках за дії контактних та локалізованих навантажень, слід ураховувати поперечне обтиснення якнайповніше, що дозволяє задовольняти більшості умов на поверхні

Аналіз останніх досліджень та публікацій. В основу некласичних (уточнених) моделей напружено-деформованого стану пластин середньої товщини в більшості випадків їх авторами покладаються кінетичні гіпотези для складових вектора переміщень, де тангенціальні складові переміщень змінюються лінійно (класична теорія тонких пластин, теорії типу Тимошенка, Е. Рейсснера) відносно поперечної координати або за законом кубічної параболи (теорії С.О. Амбарцумяна, В.З. Власова, Х.М. Муштарі, В.Г. Піскунова, О.О. Расказова, О.Ф. Рябова, Р. Крістенсена та ін.). Разом з тим, вплив поперечних деформацій у цих моделях (за виключенням В.Г. Піскунова) авторами враховувався частково. Пізніше вплив поперечного обтиснення почали враховувати в задачах про контактну взаємодію жорстких штампів із пластинками та оболонками [5]. Впливу поперечного обтиснення на вищі частоти коливань пластин і оболонок присвячено значно менше робіт. У багатьох випадках такі дослідження проводились у постановках просторової задачі теорії пружності.

Метою дослідження є виведення рівнянь руху транстропних пластин середньої товщини, які враховують як ефекти поперечного зсуву, так і деформацію поперечного обтиснення, поперечне нормальне напруження та інерцію обертання поперечних перерізів.

Основні результати дослідження. Для виведення рівнянь руху та граничних умов у круглій плиті використано варіаційний принцип Лагранжа для повної енергії пружної системи [2, 4]

$$\delta \Pi = \delta A, \tag{1}$$

де

$\delta \Pi = \iiint\limits_{V_p} \left(\sigma_r \cdot \delta\varepsilon_r + \sigma_\theta \cdot \delta\varepsilon_\theta + \sigma_z \cdot \delta\varepsilon_z + \tau_{r\theta} \cdot \delta\gamma_{r\theta} + \tau_{rz} \cdot \delta\gamma_{rz} + \tau_{\theta z} \cdot \delta\gamma_{\theta z} \right) dV_p$ – варіація потенціальної енергії деформації; $dV_p = rdrd\theta dz$ – елемент об'єму плити;

$\delta A = \iiint\limits_{V_p} \left(F_r \delta U + F_\theta \delta V + F_z \delta W \right) dV_p + \iint\limits_S \left(q^- \delta W^- - q^+ \delta W^+ \right) dS$ – варіація роботи об'ємних та поверхневих сил; $dS = rd\theta dr$ – елемент поверхні плити; $W^\pm$ – компоненти вектора пружного переміщення на зовнішніх поверхнях $z = \pm h$ плити; $F_r = -\rho \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}$; $F_\theta = -\rho \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}$; $F_z = -\rho \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ – проекції сил інерції на відповідні координатні осі, віднесені до одиниці об'єму, які формально виконують роль об'ємних сил; ρ – густина.

Використовуючи формули Коші для компонент деформації

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r},\ \varepsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r},\ \gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r},\ \gamma_{z\theta} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta},$$

та здійснюючи варіювання з урахуванням формул інтегрування частинами і співвідношень типу $\delta\left(\dfrac{\partial U}{\partial r}\right) = \dfrac{\partial}{\partial r}(\delta U)$, варіація потенціальної енергії буде

$$\delta \Pi = \iiint\limits_{V_p} \left[\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r \delta U) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sigma_\theta}{r}\delta V\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z \delta W) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\tau_{r\theta}}{r}\delta U\right) + \frac{\partial}{\partial r}(\tau_{r\theta}\delta V) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{rz}\delta U) + \frac{\partial}{\partial r}(\tau_{rz}\delta W) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{z\theta}\delta V) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\tau_{\theta z}}{r}\delta W\right) \right] dV_p -$$
$$- \iiint\limits_{V_p} \left(\frac{\tau_{r\theta}}{r}\delta V - \frac{\sigma_\theta}{r}\delta U + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\delta U + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}\delta V + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\delta W + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}\delta U + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}\delta V + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\delta U + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}\delta W + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\delta V + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}\delta W \right) dV_p =$$
$$= \iint\limits_{S_r} r\sigma_r \delta U d\theta dz + \iint\limits_{S_\theta} \sigma_\theta \delta V drdz + \iint\limits_{S_z} r\sigma_z \delta W d\theta dr + \tag{2}$$
$$+ \iint\limits_{S_\theta} \tau_{r\theta}\delta U drdz + \iint\limits_{S_r} r\tau_{r\theta}\delta V d\theta dz + \iint\limits_{S_z} r\tau_{rz}\delta U drd\theta + \iint\limits_{S_r} r\tau_{rz}\delta W d\theta dz + \iint\limits_{S_z} r\tau_{z\theta}\delta V drd\theta +$$
$$+ \iint\limits_{S_\theta} \tau_{z\theta}\delta W drdz - \iiint\limits_{V} \left(\frac{\sigma_r}{r}\delta U + \frac{\tau_{r\theta}}{r}\delta V + \frac{\tau_{rz}}{r}\delta W + \frac{\tau_{r\theta}}{r}\delta V - \right.$$
$$- \frac{\sigma_\theta}{r}\delta U + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\delta U + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}\delta V + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\delta W + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}\delta U + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}\delta V +$$
$$\left. + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\delta U + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}\delta W + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\delta V + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}\delta W \right) dV_p .$$

Варіація потенціалу зовнішніх сил

$$\delta A = -\rho \iiint\limits_{V_p} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\delta U + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\delta V + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\delta W \right) dV_p + \iint\limits_S q_2 \delta \tilde{W} ds . \tag{3}$$

Якщо підставити рівності (2) і (3) у варіаційне рівняння (1) та прирівняти до нуля в потрійному інтегралі вирази біля незалежних варіацій δU, δV, δW, то отримаємо диференціальні рівняння руху елемента об'єму пластини в циліндричних координатах:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}++\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.
\end{aligned}\tag{4}$$

Щоб отримати рівняння рівноваги через зусилля і моменти, а також граничні умови на краях пластинки, використано представлення напружень через внутрішні зусилля та моменти:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r=\frac{N_r}{2h}+\frac{M_r z}{I}+\frac{(1-\alpha)\tilde{E}}{G'}f_0(z)\left(\frac{\partial Q_r}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}+\frac{\nu}{r}Q_r\right)+\\
&+\frac{(1-\alpha)\tilde{E}h^2}{2E'}f_0(z)\left(\frac{\partial^2 q_2}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 q_2}{\partial\theta^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial q_2}{\partial r}\right)+\\
&+A'\left(q_1+q_2\left(f_0(z)-1\right)\right)+zA'\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2};\\
&\sigma_\theta=\frac{N_\theta}{2h}+\frac{M_\theta z}{I}+\frac{(1-\alpha)\tilde{E}}{G'}f_0(z)\left(\nu\frac{\partial Q_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}Q_r\right)+\\
&+\frac{(1-\alpha)\tilde{E}h^2}{2E'}f_0(z)\left(\nu\frac{\partial^2 q_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 q_2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial q_2}{\partial r}\right)+\\
&+A'\left(q_1+q_2\left(f_0(z)-1\right)\right)+zA'\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2};\\
&\tau_{r\theta}=\frac{N_{r\theta}}{2h}+\frac{H_{r\theta} z}{I}+\frac{(1-\alpha)\tilde{E}}{G'}f_0(z)\left(\frac{\partial Q_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}Q_\theta\right)+\\
&+\frac{(1-\alpha)\tilde{E}h^2}{2E'}f_0(z)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial q_2}{\partial\theta}+\frac{\partial q_2}{\partial r}\right);\\
&\tau_{rz}=\frac{G'}{K'}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)Q_r;\ \ \tau_{\theta z}=\frac{G'}{K'}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)Q_\theta;
\end{aligned}\tag{5}$$

де $f_0(z)=\frac{z}{4h^3}\left(0,6h^2-z^2\right)$.

Запишемо вирази для компонент пружних переміщень, у наступному вигляді [6]:

$$U(r,\theta,z)=u+\gamma_r z+\psi_r\left(\frac{z}{5}-\frac{z^3}{3h^2}\right);\quad V(r,\theta,z)=v+\gamma_\theta z+\psi_\theta\left(\frac{z}{5}-\frac{z^3}{3h^2}\right);\tag{6}$$

$$\begin{aligned}
W(r,\theta,z)&=w+\frac{2\alpha_0}{E'}q_1 z+\frac{3\alpha_0}{4hE'}\tilde{q}_2 z^2\left(1-\frac{z^2}{6h^2}\right)-A'\left(z\theta_0+\frac{z^2\theta_1}{2}-\frac{z^4\theta_3}{4h^2}\right)=\\
&=w+\frac{2\alpha_0}{E'}q_1 z+\frac{3\alpha_0}{4hE'}\tilde{q}_2 z^2\left(1-\frac{z^2}{6h^2}\right)-A'z\theta_0+\frac{1}{2}A'z^2\theta_3\left(3h^2+\frac{z^2}{2h^2}\right)+\frac{1}{2}A'z^2\Delta w,
\end{aligned}$$

де γ_r, γ_θ – узагальнені кути повороту; ψ_r, ψ_θ – функції поперечного зсуву.

Використовуючи формули (5), формули для деформацій та вирази для компонент пружних переміщень (6), знайдено вираз для варіації потенціальної енергії:

$$\delta\Pi = \iint_S \int_{-h}^{h} \left(\sigma_r \cdot \delta\varepsilon_r + \sigma_\theta \cdot \delta\varepsilon_\theta + \sigma_z \cdot \delta\varepsilon_z + \tau_{r\theta} \cdot \delta\gamma_{r\theta} + \tau_{rz} \cdot \delta\gamma_{rz} + \tau_{\theta z} \cdot \delta\gamma_{\theta z}\right) dzdS =$$

$$= \iint_S \left(N_r \delta\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + M_r \delta\left(\frac{\partial \gamma_r}{\partial r}\right) + \frac{N_\theta}{r}\delta u + \frac{M_\theta}{r}\delta\gamma_r + N_\theta \delta\left(\frac{\partial v}{r\partial\theta}\right) + M_\theta \delta\left(\frac{\partial \gamma_\theta}{r\partial\theta}\right) + \right.$$

$$+ N_{r\theta}\delta\left(\frac{\partial u}{r\partial\theta}\right) + H_{r\theta}\delta\left(\frac{\partial \gamma_r}{r\partial\theta}\right) + N_{r\theta}\delta\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) + H_{r\theta}\delta\left(\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial r}\right) - \frac{N_{r\theta}}{r}\delta v - \frac{H_{r\theta}}{r}\delta\gamma_\theta +$$

$$\left. + Q_r \delta\gamma_r + Q_r \delta\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r}\right) + Q_\theta \delta\gamma_\theta + Q_\theta \delta\left(\frac{\partial \tilde{w}}{r\partial\theta}\right)\right) dS .$$

Використовуючи формули інтегрування частинами та варіювання за незалежними змінними $u, v, \tilde{w}\ , \gamma_r, \gamma_\theta$, отримаємо для $\delta\Pi$ та δA:

$$\delta\Pi = -\iint_S \left[\left(\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} \right)\delta u + \left(\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + \frac{2N_{r\theta}}{r} \right)\delta v + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta} + \frac{Q_r}{r} + q_2 \right)\delta\tilde{w} + \left(\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r \right)\delta\gamma_r +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial H_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta} + \frac{2}{r}H_{r\theta} - Q_\theta \right)\delta\gamma_\theta \right] dS + \int_L \left[\left(N_r l + N_{r\theta} m \right)\delta u + \right. \qquad (7)$$

$$\left. + \left(N_{r\theta} l + N_\theta m \right)\delta v + \left(Q_r l + Q_\theta m \right)\delta\tilde{w} + \left(M_r l + H_{r\theta} m \right)\delta\gamma_r + \left(H_{r\theta} l + M_\theta m \right)\delta\gamma_\theta \right] dL.$$

$$\delta A = -2\rho h \iint_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 \gamma_r}{\partial t^2}\delta\gamma_r + \frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 \gamma_\theta}{\partial t^2}\delta\gamma_\theta \right) dS + \iint_S \tilde{q}_2 \delta\tilde{w} dS.$$

Тут L – межа контуру області S, l та m – напрямні косинуси нормалі до контуру пластини.

Прирівнюючи вирази біля незалежних варіацій в (7), отримано систему рівнянь руху через внутрішні сили та моменти:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + \frac{2N_{r\theta}}{r} = 2\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = \frac{2}{3}\rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma_r}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial H_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta} + \frac{2}{r}H_{r\theta} - Q_\theta = \frac{2}{3}\rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma_\theta}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta} + \frac{Q_r}{r} = -q_2 + 2\rho h \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2},
\end{aligned} \qquad (8)$$

де $\tilde{w} = w + \frac{1}{6}A'\Delta w h^2 + \frac{9\alpha_0 h A_2 q_2}{40E'}$; $\left\{N_r, N_\theta, N_{r\theta}, Q_r, Q_\theta\right\} = \int_{-h}^{h} \left\{\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}\right\} dz$;

$\left\{M_r, M_\theta, H_{r\theta}\right\} = \int_{-h}^{h} \left\{\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\right\} z dz$; $Q_r = K' \cdot \psi_r$; $Q_\theta = K' \cdot \psi_\theta$; q^+, q^- – навантаження на зовнішніх поверхнях пластини ($z = \pm h$), що направлені вниз, у напрямку осі Oz; G' – модуль поперечного зсуву матеріалу пластинки; ψ_r, ψ_θ – деформації поперечного зсуву серединної поверхні пластинки.

Рівняння (8) можна отримати з системи (4), якщо, наслідуючи С.О.Амбарцумяна [1], помножити всі рівняння системи (4) на dz, а перших два ще і на zdz та проінтегрувати їх в межах від $-h$ до h. Разом із тим, така методика не дозволяє отримати енергетично коректні граничні умови на краю пластинки.

Граничні умови отримуємо з контурного інтегралу, що входить у рівняння (7):

$$\left(N_r l + N_{r\theta} m\right)\delta u = 0;\quad \left(N_{r\theta} l + N_\theta m\right)\delta v = 0;\quad \left(Q_r l + Q_\theta m\right)\delta w = 0;$$
$$\left(M_r l + H_{r\theta} m\right)\delta\gamma_r = 0;\quad \left(H_{r\theta} l + M_\theta m\right)\delta\gamma_\theta = 0. \tag{9}$$

З системи рівнянь (9) можна отримати статичні або геометричні граничні умови, в залежності від того який множник прирівняти до нуля.

Підставивши в рівняння (4) замість внутрішніх сил та моментів їх вирази, з врахуванням попередніх зауважень, отримаємо рівняння руху через переміщення u, v, w_τ та кути повороту γ_r, γ_θ:

$$\begin{gathered}
\Delta u + \frac{1+\nu}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{v}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(u + 2\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) = -\frac{\nu''(1+\nu)}{E}\frac{\partial q_1}{\partial r} + 2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\\
\Delta v + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(v - 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = -\frac{2\nu''(1+\nu)}{E(1-\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial q_1}{\partial\theta} + 2\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};\\
\Delta\gamma_r + \frac{1+\nu}{2r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\gamma_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_r}{\partial\theta} + \frac{\gamma_\theta}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\gamma_r + 2\frac{\partial\gamma_\theta}{\partial\theta}\right) = \frac{4\psi_r}{5\varepsilon_\tau} - \frac{3}{5}\frac{\nu''(1+\nu)}{hE}\frac{\partial q_2}{\partial r} + \frac{\rho}{\tilde{E}}\frac{\partial^2\gamma_r}{\partial t^2} -\\
-A'\frac{\rho}{\tilde{E}}\frac{\partial^3\widehat{W}}{\partial r\partial t^2};\\
\Delta\gamma_\theta + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\gamma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\gamma_r}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\gamma_\theta - 2\frac{\partial\gamma_r}{\partial\theta}\right) = \frac{8\psi_\theta}{5\varepsilon_\tau(1-\nu)} - \frac{6}{5}\frac{\nu''(1+\nu)}{(1-\nu)hE'}\frac{1}{r}\frac{\partial q_2}{\partial r} +\\
+\frac{\rho}{\tilde{E}}\frac{\partial^2\gamma_\theta}{\partial t^2} - A'\frac{\rho}{r\tilde{E}}\frac{\partial^3\widehat{W}}{\partial\theta\partial t^2};\\
K'\Delta w_\tau = -q_2 + 2\rho h\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial t^2}\ .
\end{gathered} \tag{10}$$

Тут $\psi_r = \frac{\partial w_\tau}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}$; $\psi_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial w_\tau}{\partial\theta} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}$; $\gamma_r = -\frac{\partial\overline{w}}{\partial r} - \frac{4}{5}\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}$; $\gamma_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\theta} + \frac{4}{5}\frac{\partial\Omega}{\partial r}$;
$\overline{w} = w - \frac{2.4+\chi_0}{3+\chi_0}w_\tau + \frac{q_2 h}{E_0}$; $E_0 = \frac{40}{9}\left(3+\chi_0\right)E'$; $\chi_0 = \frac{3\nu''}{2\,G/G' - \nu''}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$;
$\widehat{W} = w + 0.3A'h^2\Delta w + 0.43\alpha_0 A_2 q_2\, h/E'$.

Таким чином ми одержали систему п'яти рівнянь руху в шуканих функціях $u, v, w_\tau, \gamma_r, \gamma_\theta, \Omega$. До цих рівнянь мають бути приєднані граничні умови (9) та початкові умови при $t = 0$:

$$\begin{gathered}
w = w_0(r,\theta),\quad \frac{\partial w}{\partial t} = w_1(r,\theta),\\
u = u_0(r,\theta),\quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(r,\theta),\\
v = v_0(r,\theta),\quad \frac{\partial v}{\partial t} = v_1(r,\theta),
\end{gathered} \tag{11}$$

де $w_0, v_0, u_0, u_1, v_1, w_1$– задані компоненти початкового переміщення і початкової швидкості від точки (r,θ).

Систему рівнянь рівноваги (10) у тій частині, де вони описують згин пластинки, можна звести до більш звичного вигляду, якщо замість величин $\gamma_r, \gamma_\theta, \psi_r, \psi_\theta$ підставити їх вирази через функції w, w_τ, Ω:

$$D\Delta^2 w_q = \left(1 - \varepsilon_1 \Delta + \frac{\varepsilon' \rho h^4}{4G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) q_2 - m\left(1 - \varepsilon_1 h^2 \Delta\right) \frac{\partial^2 \tilde{w}(r,t)}{\partial t^2} - m\varepsilon' \frac{\rho h^2}{4G} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial t^4};$$

$$K' \Delta w_\tau = -q_2 + m \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2}; \quad \Delta\Omega - k^2 \Omega = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}, \qquad (12)$$

де $\varepsilon_1 = \frac{h^2}{10(1-\nu)}\left(8\frac{G}{G'} - 3\nu''\right)$; $D = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu^2}$; $m = 2\rho h$ – маса одиниці поверхні пластинки; $\varepsilon' = 0.1\left(8\frac{G}{G'} + \nu''\right)$; $w_q = w + \varepsilon_2 q_2 / D$; $k^2 = \frac{5}{2}\frac{G'}{G} h^{-2}$; $\varepsilon_2 = \frac{h^4}{20\left(1-\nu^2\right)}\left(1-\alpha\right)\left(\frac{E}{E'} + A'\frac{E}{G'}\right)$; $\alpha = \frac{\nu'' \cdot G'}{2G}$.

Отримані рівняння (12) враховують додатково інерцію обертання поперечних перерізів пластини та вплив нормального напруження σ_z. Якщо покласти нулю параметри ε' та A', а також $\Delta' \equiv 1 - \varepsilon\Delta$, то ці фактори в рівняннях (12) враховуватись не будуть. Неврахування інерції веде до втрати правої частини в рівнянні Гельмгольца.

Висновки. Для виведення рівнянь рівноваги та граничних умов у круглій плиті, використано варіаційний принцип Лагранжа для повної енергії пружної системи. Отримані рівняння цілком співпадають за формою з відповідними умовами та рівняннями для пластин класичної теорії. Відмінність вносять лише коефіцієнти, що враховують поперечний зсув та обтиснення. Дані рівняння враховують додатково інерцію обертання поперечних перерізів пластини та вплив нормального напруження.

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания / С.А. Амбарцумян. – 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композитных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. К.: Наукова думка, 1978. – 264 с.
4. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
5. Пелех Б.Л. Об одном обобщении теории упругих трансверсально-изотропных плит применительно к некоторым контактным задачам / Б.Л. Пелех, В.И. Швабюк // Сопротивление материалов и теория сооружений: республиканский межведомственный научно-технический сборник. – 1975. – Вып. 26. – С. 40–48.
6. Швабюк В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально-изотропных плит / В.И. Швабюк // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16. – №9. – С. 71–77.