

УДК 519.9

Гінайло П.І., к.ф.-м.н.

Луцький національний технічний університет

## ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДВОХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

**Гінайло П.І. Про еквівалентність двох задач оптимального керування з диференціальними включеннями.** Розглядається задача оптимального керування з диференціальними включеннями. Наводиться метод зведення її до еквівалентної задачі, яка розв'язується за допомогою вже відомих методів.

**Ключові слова:** екстремум, диференціальні включення, необхідні умови екстремуму, оптимальне керування, багатозначні відображення.

**Гинайло П.И. Об эквивалентности двух задач оптимального управления с дифференциальными включениями.** Рассматривается задача оптимального управления с дифференциальными включениями. Приводится путь сведения ее к эквивалентной задаче, решаемой с помощью уже известных методов.

**Ключевые слова:** экстремум, дифференциальные включения, необходимые условия экстремума, оптимальное управление, многозначные отображения.

**Ginaylo P. On the equivalence of two optimal control problems with differential inclusions.** The problem of optimal control of differential inclusions is received. An method of reducing it to an equivalent problem that is solved by the known methods.

**Keywords:** extremum, differential inclusion necessary extremum conditions, optimal control, ambiguous map.

**Постановка наукової проблеми.** В основі досліджень лежать результати теорії необхідних умов екстремуму і багатозначних відображень. Різні задачі оптимального керування в останні роки знаходять широке застосування в самих різних областях сучасної науки і техніки. Усі фізичні процеси, що мають місце в техніці, як правило, керовані, тобто можуть здійснюватися різними способами, в залежності від потреб людини. Тому і виникає питання про знаходження найкращого або оптимального в тому чи іншому розумінні керуванні процесом. Побудові найбільш загальних необхідних умов екстремуму присвячено дуже багато робіт різних вчених. Це умови екстремуму дають можливість передбачити структуру розв'язку.

**Аналіз досліджень.** Новий напрямок досліджень в теорії необхідних умов екстремуму сприяв розвитку нового підходу до багатьох задач оптимального керування, в якому центральне місце займає поняття багатозначного відображення [1-5]. Справа в тому, що задачу оптимального керування виявляється зручно трактувати як задачу оптимізації на множині траєкторій деякого диференціального включення. Поняття диференціального включення дозволяє охопити багато задач оптимального керування єдиним методом розв'язання. В основі теорії диференціальних включень лежить поняття багатозначного відображення.

**Метою роботи** є розв'язання задачі оптимального керування з диференціальними включеннями шляхом зведення її до еквівалентної задачі.

**Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.**

Нехай  $f(x, y)$ ,  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$  функція Ліпшиця своїх аргументів,  $a$  – багатозначне відображення, яке задовольняє умову Ліпшиця,  $a(x)$  – випукла компактна множина в  $R^n$ . Нехай в  $R^n$  задані такі множини  $N$  і  $M$ , а в  $R^n \times R^m$  – замкнута множина  $Q$ .

Сформулюємо задачу оптимального керування (задача I): серед всіх абсолютно неперервних на відрізку  $[0, 1]$  функцій  $x(t)$  і вимірних функцій  $y(t)$ , які задовольняють умовам

$$x(0) \in N, \quad x(T) \in M$$

$$\dot{x}(t) \in a(x(t)) \text{ майже скрізь на } [0, 1] \quad (1)$$

$$(x(t), y(t)) \in Q \quad (2)$$

знайти такі, які мінімізують функціонал

$$I_1(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^1 f(x(t), y(t)) dt \quad (3)$$

Подальше дослідження пов'язане з виведенням необхідних умов екстремуму для задачі I.

Нехай тепер

$$Q(x) = \{y : (x, y) \in Q\}$$

$$W(x) = \min_y \{f(x, y) : y \in Q(x)\}$$

$$Q_f(x) = \{y \in Q(x) : W(x) = f(x, y)\}.$$

Сформулюємо другу задачу оптимального керування (задача II): серед всіх абсолютно неперервних функцій  $x(t)$ , які задовольняють умовам

$$x(0) \in N, \quad x(1) \in M$$

$$\dot{x}(t) \in a(x(t)) \text{ майже скрізь на } [0, 1]$$

знайти таку, яка мінімізує функціонал

$$I_2(x(\cdot)) = \int_0^1 w(x(t)) dt.$$

Очевидно, що

$$I_2(x(\cdot)) \leq I_1(x(\cdot), y(\cdot)),$$

якщо виконані умови (2).

Надалі дослідження буде заключатися в тому, що замість задачі I будемо розв'язувати задачу II. Для цього покажемо, що при деяких умовах задачі I і II еквівалентні. Це означає, що якщо  $x(\cdot), y(\cdot)$  – розв'язок задачі I, то  $x(\cdot)$  – розв'язок задачі II, і навпаки, якщо  $x(\cdot)$  – розв'язок задачі II, то існує така вимірна функція  $y(\cdot)$ , яка задовольняє умову (2), що пара  $x(\cdot), y(\cdot)$  є розв'язком задачі I.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. Нехай функція  $f$  випукла по  $y$ , а багатозначне відображення  $Q(x)$  неперервне, випукле і компактнозначне. Тоді задачі I і II еквівалентні.

Доведення базується на лемі, яка має окремий інтерес.

Лема. В умовах теореми 1. функція  $w$  неперервна, а множина  $Q_f(x)$  напівнеперервна зверху.

Доведення. В силу неперервності відображення  $Q(x)$  для будь-якого  $\xi > 0$  знайдеться таке  $\delta(\xi) > 0$  що

$$Q(x') \subseteq Q(x) + \xi B$$

$$Q(x) \subseteq Q(x') + \xi B \quad (4)$$

для всіх  $\|x' - x\| \leq \delta(\xi)$ . Тут  $B$  – одинична куля в  $R^m$ . Тепер

$$w(x') = \min_{y^*} \{f(x', y + u) : y \in Q(x), u \in \xi B\} =$$

$$= \min_{y, u} \{f(x, y) + [f(x', y + u) - f(x, y)] : y \in Q(x), u \in \xi B\} \geq$$

$$\geq \min_y \{f(x, y) : y \in Q(x)\} + \min_{y, u} \{f(x', y + u) - f(x, y) : y \in Q(x), u \in \xi B\} =$$

$$= v(x) + v(x, x', \xi),$$

де

$$v(x, x', \xi) = \min_{y, u} \{f(x', y + u) - f(x, y) : y \in Q(x), u \in \xi B\}.$$

При доведенні ми скористалися відношеннями (4) і тим, що мінімум суми більше суми мінімумів. Оскільки функція задовольняє умову Ліпшиця, то

$$|f(x', y') - f(x, y)| \leq L_1 \|x' - x\| + L_2 \|y' - y\|$$

тому

$$|f(x', y + u) - f(x, y)| \leq L_1 \|x' - x\| + L_2 \xi$$

так як

$$\|u\| \leq \xi$$

тоді

$$v(x, x', \xi) \geq -L_1 \|x' - x\| + L_2 \xi$$

і так, остаточно

$$w(x') - w(x) \geq -L_1 \|x' - x\| + L_2 \xi$$

аналогічно отримуємо, змінюючи  $x'$  і  $x$  місцями, що

$$w(x) - w(x') \geq -L_1 \|x' - x\| + L_2 \xi.$$

Таким чином

$$|w(x') - w(x)| \leq L_1 \|x' - x\| + L_2 \xi.$$

Звідси слідує, що якщо  $\|x' - x\| \leq \min(\delta(\xi), \xi)$  то

$$\|w(x') - w(x)\| \leq (L_1 + L_2) \xi$$

чим і доведена неперервність функції  $w(x)$ .

Нехай тепер  $U$  – відкрита множина, містить  $Q_f(x)$ . Покажемо, що якщо  $x'$  достатньо близько до  $x$ , то

$$Q_f(x') \subseteq U$$

що еквівалентно напівнеперервності зверху відображення  $Q_f(x)$ .

Припустимо супротивне. Тоді знайдеться така послідовність  $x_k \rightarrow x$  і такі точки  $y_k \in Q_f(x_k)$ , що  $y_k \notin U$  для всіх достатньо великих  $k$ . Але за означенням відображень  $Q_f(x)$  і  $Q(x)$

$$\begin{aligned} w(x_k) &= f(x_k, y_k) \\ (x_k, y_k) &\in Q. \end{aligned} \quad (5)$$

Так як

$$Q_f(x) \subseteq Q(x_k) \subseteq Q(x) + \xi B$$

для достатньо великих  $k$  при  $\xi > 0$  в силу неперервності відображення  $Q(x)$ , то послідовність  $y_k$  обмежена, і можна вважати, що  $y_k \rightarrow y$ . В силу замкнутості множини  $Q$  і того, що  $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y)$  отримуємо, що  $(x, y) \in Q$ .

З доведеної вище неперервності функції переходячи до границі в (5) отримуємо, що

$$\begin{aligned} w(x) &= f(x, y) \\ (x, y) &\in Q \end{aligned}$$

тобто  $y \in Q_f(x)$ . Значить послідовність  $y_k$ , яка збігається до  $y \in Q_f(x)$ , не належить відкритій множині  $U$ , яка містить  $Q_f(x)$ , а значить і  $y$ . Це суперечить означенню збіжності.

Лема доведена.

Тепер легко закінчити доведення теореми.

Нехай  $x(\cdot)$  – розв'язок задачі II. Тоді, так як при зроблених припущеннях множина  $Q_f(x)$  випукла і напівнеперервна залежить від  $x$ , то з результатів роботи слідує, що існує така вимірна функція  $y(t)$ , що

$$y(t) \in Q_f(x(t)),$$

тобто

$$(x(t), y(t)) \in Q$$

$$f(x(t), y(t)) = w(x(t)).$$

Значить

$$I_1(x(t), y(t)) = I_2(x(t)).$$

Так як  $I_1 \geq I_2$  завжди і  $I_2(x(\cdot)) = \min I_2$ , то пара  $x(\cdot), y(\cdot)$  є розв'язком задачі I, і значення мінімумів в задачах I і II співпадають.

Якщо тепер  $(x(\cdot), y(\cdot))$  є розв'язком задачі I, то

$$I_1(x(\cdot), y(\cdot)) = \min I_1 = \min I_2.$$

Покажемо, що  $f(x(t), y(t)) = w(x(t))$  майже скрізь.

Дійсно, якщо це не так, тобто на множині скінченної міри

$$f(x(t), y(t)) > w(x(t))$$

то

$$\min I_1 = \min I_2 = \int_0^1 f(x(t), y(t)) dt > \int_0^1 w(x(t)) dt = I_2(x(\cdot)).$$

Тобто  $I_2(x(\cdot)) < \min I_2$ , чого не може бути.

Теорему повністю доведено.

*Наслідок.* Якщо множина  $Q$  випукла і замкнута, і хоча б при одному  $x$  множина  $Q(x)$  обмежена, то припущення теореми виконується.

Це слідує з результатів роботи [1], які відносяться до випуклих відображень.

Потрібно отримати необхідні умови екстремуму для задачі I. Але тепер замість задачі I дослідимо задачу II. Необхідні умови екстремуму для задачі II дає теорема 2. Щоб отримати необхідні умови екстремуму для задачі II, потрібно, щоб вона задовольняла припущенням наведеної теореми.

Оскільки  $Q$  – випукле відображення, функція  $f(x, y)$  випукла, то можна застосувати теорему 5 [1]. В силу цієї теореми отримаємо, що функція  $f(x, y)$  випукла, а відповідний їй диференціал має вигляд:

$$\partial w(x) = \left\{ x^* + Q^*(y^*, (x, y)) : (x^*, y^*) \in \partial f(x, y) \right\}.$$

Але як відомо, субдиференціал неперервної випуклої функції рівномірно обмежений і неперервний зверху по включенню.

В лемі ми довели, що функція  $w(x)$  неперервна. А неперервна випукла функція задовольняє умову Ліпшиця

$$|w(x) - w(x_0)| \leq L \|x - x_0\|, \quad L = \text{const}.$$

Це можна легко показати. Нехай  $x_0 = 0$  і  $\Omega$  куля радіуса  $r$  з центром в  $x_0$ . Виберемо  $y \in \Omega$

таке що задовольняє нерівність  $\|y\| \leq \frac{r}{2}$ . Покладемо

$$x = \frac{r}{2} \frac{y}{\|y\|}.$$

Тепер використовуючи нерівність

$$|w(Lx) - w(0)| \leq 2c_1 L \quad \text{отримаємо}$$

$$|w(y) - w(0)| = \left| w\left(\frac{2\|y\|}{r} x\right) - w(0) \right| \leq L \|y\|.$$

Послідовно виконуються всі умови припущень В [1].

Тепер до поставленої задачі II можна застосувати теорему 2. Тим самим ми отримаємо необхідні умови мінімуму для задачі I. Сформулюємо основний результат.

Теорема 2. якщо виконані умови  $A$  і  $C$ , а  $\tilde{x}(t)$ ,  $t \in [0,1]$  мінімізує

$$\int_0^1 f(x(t), y(t)) dt.$$

серед усіх траєкторій диференціального включення

$$\dot{x}(t) \in a(x(t)),$$

що задовольняють умовам  $x(0) \in N$ ,  $x(1) \in M$  і  $(x(t), y(t)) \in Q$ ,

тоді існує абсолютно неперервна функція  $p^*(t)$ ,  $t \in [0,1]$ , вимірні функції  $u^*(t)$  і  $v^*(t)$ , число  $\lambda \geq 0$ , не всі одночасно рівні нулю, такі що:

- 1)  $-p^*(1) \in K_M^*(\tilde{x}(1))$ ,  $p^*(0) \in K_N^*(\tilde{x}(0))$
- 2) функція  $p^*(t)$  задовольняє умові Ліпшиця і
 
$$-p^*(t) \in \lambda [u^*(t) + Q^*(v^*(t), x(t), y(t))] + A^*(p^*(t); \tilde{x}(t))$$

майже скрізь на  $[0,1]$

- 3)  $(u^*(t), v^*(t)) \in \partial f(x(t), y(t))$ ,  $\langle \dot{\tilde{x}}(t), p^*(t) \rangle = W_a(\tilde{x}(t), p^*(t))$

майже скрізь на  $[0,1]$ .

Тут  $A^*$  і  $Q^*$  спряжені відображення до  $a$  і  $Q$ .  $W_a$  опорна функція відображення  $a$  визначається за формулою V.3.1 [1].

Якщо функція  $f$  диференційована, тоді маємо:

Теорема 3. Нехай виконані припущення попередньої теореми. Тоді необхідні умови оптимальності траєкторії  $\tilde{x}(t)$ ,  $t \in [0,1]$  будуть такі умови:

- 1)  $p^*(0) \in K_N^*(\tilde{x}(0))$ ,  $-p^*(1) \in K_M^*(\tilde{x}(1))$
- 2) функція  $p^*(t)$  задовольняє умові Ліпшиця і
 
$$-p^*(t) \in \lambda [f'_x(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) + Q^*(f'_x(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)); (x(t), y(t)))] + A^*(p^*(t); \tilde{x}(t))$$

майже скрізь на  $[0,1]$

- 3)  $\langle \dot{\tilde{x}}(t), p^*(t) \rangle = W_a(\tilde{x}(t), p^*(t))$

майже скрізь на  $[0,1]$ .

*Доведення.* Якщо функція  $f(x, y)$  диференційовна, то її субдиференціал  $\partial f(x, y)$  складається лише з одного вектора-градієнта функції  $f(x, y)$ , який складається з компонентів, відповідним частинним похідним:

$$f'_x(x, y) \text{ і } f'_y(x, y).$$

Підставивши їх в твердження 2 теореми 2. отримаємо необхідне.

**Висновки:** Розглянута задача оптимального керування з диференціальними включеннями. Наведено метод зведення цієї задачі до еквівалентної, яка розв'язується відомими методами.

1. Пшеничний Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
2. Пшеничний Б.Н. Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1982. – 144 с.
3. Гінайло П.І. Про еквівалентність двох задач оптимального керування. // Вісник Київського університету. Математика і механіка. 1986. Вип. 28. С.24–27.
4. Гінайло П.І. Необхідні умови екстремуму для задачі оптимального керування з континуумом обмежень. // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямком „Інженерна механіка”), вип.11, част.2, Луцьк, 2002, С.15–17.
5. Гінайло П.І. Необхідні умови екстремуму для локально випуклої задачі. // Дванадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука. Київ, 15–17 трав. 2008 р. Матеріали конф., т. I. – К.: НТУУ “КПІ”. – 2008. – 572с.