УДК 519.9
Гінайло П.І., к.ф.-м.н.
Луцький національний технічний університет

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДВОХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Гінайло П.І. Про еквівалентність двох задач оптимального керування з диференціальними включеннями. Розглядається задача оптимального керування з диференціальними включеннями. Наводиться метод зведення її до еквівалентної задачі, яка розв'язується за допомогою вже відомих методів.
Ключові слова: екстремум, диференціальні включення, необхідні умови екстремуму, оптимальне керування, багатозначні відображення.

Гинайло П.И. Об эквивалентности двух задач оптимального управления с дифференциальными включениями. Рассматривается задача оптимального управления с дифференциальными включениями. Приводится путь сведения ее к эквивалентной задаче, решаемой с помощью уже известных методов.
Ключевые слова: экстремум, дифференциальные включения, необходимые условия экстремума, оптимальное управление, многозначные отображения.

Ginaylo P. On the equivalence of two optimal control problems with differential inclusions. The problem of optimal control of differential inclusions is recerved. An method of reducing it to an equivalent problem that is solved by the known methods.
Keywords: extremum, differential inclusion necessary extremum conditions, optimal control, ambiguous map.

Постановка наукової проблеми. В основі досліджень лежать результати теорії необхідних умов екстремуму і багатозначних відображень. Різні задачі оптимального керування в останні роки знаходять широке застосування в самих різних областях сучасної науки і техніки. Усі фізичні процеси, що мають місце в техніці, як правило, керовані, тобто можуть здійснюватися різними способами, в залежності від потреб людини. Тому і виникає питання про знаходження найкращого або оптимального в тому чи іншому розумінні керуванні процесом. Побудові найбільш загальних необхідних умов екстремуму присвячено дуже багато робіт різних вчених. Це умови екстремуму дають можливість передбачити структуру розв'язку.

Аналіз досліджень. Новий напрямок досліджень в теорії необхідних умов екстремуму сприяв розвитку нового підходу до багатьох задач оптимального керування, в якому центральне місце займає поняття багатозначного відображення [1-5]. Справа в тому, що задачу оптимального керування виявляється зручно трактувати як задачу оптимізації на множині траєкторій деякого диференціального включення. Поняття диференціального включення дозволяє охопити багато задач оптимального керування єдиним методом розв'язання. В основі теорії диференціальних включень лежить поняття багатозначного відображення.

Метою роботи є розв'язання задачі оптимального керування з диференціальними включеннями шляхом зведення її до еквівалентної задачі.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.

Нехай $f(x,y)$, $x \in R^n$, $y \in R^m$ функція Ліпшиця своїх аргументів, a – багатозначне відображення, яке задовольняє умову Ліпшиця, $a(x)$ − випукла компактна множина в R^n. Нехай в R^n задані такі множини N і M, а в $R^n \times R^m$ – замкнута множина Q.

Сформулюємо *задачу оптимального керування (задача I)*: серед всіх абсолютно неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій $x(t)$ і вимірних функцій $y(t)$, які задовольняють умовам

$$x(0) \in N, \quad x(T) \in M$$

$$\dot{x}(t) \in a(x(t)) \text{ майже скрізь на } [0,1] \tag{1}$$

$$(x(t), y(t)) \in Q \tag{2}$$

знайти такі, які мінімізують функціонал

$$I_1(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^1 f(x(t), y(t))\,dt \tag{3}$$

Подальше дослідження пов'язане з виведенням необхідних умов екстремуму для задачі I.

Нехай тепер

$$Q(x)=\{y:\ (x,y)\in Q\}$$
$$W(x)=\min_{y}\{f(x,y):y\in Q(x)\}$$
$$Q_f(x)=\{y\in Q(x):W(x)=f(x,y)\}.$$

Сформулюємо *другу задачу оптимального керування (задача II):* серед всіх абсолютно неперервних функцій $x(t)$, які задовольняють умовам

$$x(0)\in N,\ \ x(1)\in M$$
$$\dot{x}(t)\in a(x(t)) \text{ майже скрізь на } [0,1]$$

знайти таку, яка мінімізує функціонал

$$I_2(x(\cdot))=\int_0^1 w(x(t))dt.$$

Очевидно, що

$$I_2(x(\cdot))\le I_1(x(\cdot),y(\cdot)),$$

якщо виконані умови (2).

Надалі дослідження буде заключатися в тому, що замість задачі I будемо розв'язувати задачу II. Для цього покажемо, що при деяких умовах задачі I і II еквівалентні. Це означає, що якщо $x(\cdot),y(\cdot)$ – розв'язок задачі I, то $x(\cdot)$ – розв'язок задачі II, і навпаки, якщо $x(\cdot)$ − розв'язок задачі II, то існує така вимірна функція $y(\cdot)$, яка задовольняє умову (2), що пара $x(\cdot),y(\cdot)$ є розв'язком задачі I.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. Нехай функція f випукла по y, а багатозначне відображення $Q(x)$ неперервне, випукле і компактнозначне. Тоді задачі I і II еквівалентні.

Доведення базується на лемі, яка має окремий інтерес.

Лема. В умовах теореми 1. функція w неперервна, а множина $Q_f(x)$ напівнеперервна зверху.

Доведення. В силу неперервності відображення $Q(x)$ для будь-якого $\xi>0$ знайдеться таке $\delta(\xi)>0$ що

$$Q(x')\subseteq Q(x)+\xi B$$
$$Q(x)\subseteq Q(x')+\xi B \tag{4}$$

для всіх $\|x'-x\|\le\delta(\xi)$. Тут B одинична куля в R^m. Тепер

$$\begin{aligned}
w(x')&=\min_{y^*}\{f(x',y+u):y\in Q(x),u\in\xi B\}=\\
&=\min_{y,\mathrm{u}}\{f(x,y)+[f(x',y+u)-f(x,y)]:y\in Q(x),u\in\xi B\}\ge\\
&\ge\min_{y}\{f(x,y):y\in Q(x)\}+\min_{y,u}\{f(x',y+u)-f(x,y):y\in Q(x),u\in\xi B\}=\\
&=v(x)+v(x,x',\xi),
\end{aligned}$$

де

$$v(x,x',\xi)=\min_{y,u}\{f(x',y+u)-f(x,y):y\in Q(x),u\in\xi B\}.$$

При доведенні ми скористалися відношеннями (4) і тим, що мінімум суми більше суми мінімумів. Оскільки функція задовольняє умову Ліпшиця, то

$$|f(x',y')-f(x,y)|\le L_1\|x'-x\|+L_2\|y'-y\|$$

тому

$$|f(x',y+u)-f(x,y)|\le L_1\|x'-x\|+L_2\xi$$

так як

$$\|u\| \le \xi$$

тоді

$$v(x, x', \xi) \ge -L_1 \|x' - x\| + L_2 \xi$$

і так, остаточно

$$w(x') - w(x) \ge -L_1 \|x' - x\| + L_2 \xi$$

аналогічно отримуємо, змінюючи x' і x місцями, що

$$w(x) - w(x') \ge -L_1 \|x' - x\| + L_2 \xi .$$

Таким чином

$$|w(x') - w(x)| \le L_1 \|x' - x\| + L_2 \xi .$$

Звідси слідує, що якщо $\|x' - x\| \le \min(\delta(\xi), \xi)$ то

$$\|w(x') - w(x)\| \le (L_1 + L_2) \xi$$

чим і доведена неперервність функції $w(x)$.

Нехай тепер U –відкрита множина, містить $Q_f(x)$. Покажемо, що якщо x' достатньо близько до x, то

$$Q_f(x') \subseteq U$$

що еквівалентно напівнеперервності зверху відображення $Q_f(x)$.

Припустимо супротивне. Тоді знайдеться така послідовність $x_k \to x$ і такі точки $y_k \in Q_f(x_k)$, що $y_k \ne U$ для всіх достатньо великих k. Але за означенням відображень $Q_f(x)$ і $Q(x)$

$$w(x_k) = f(x_k, y_k) \tag{5}$$

$$(x_k, y_k) \in Q .$$

Так як

$$Q_f(x) \subseteq Q(x_k) \subseteq Q(x) + \xi B$$

для достатньо великих k при $\xi > 0$ в силу неперервності відображення $Q(x)$, то послідовність y_k обмежена, і можна вважати, що $y_k \to y$. В силу замкнутості множини Q і того, що $(x_k, y_k) \to (x, y)$ отримуємо, що $(x, y) \in Q$.

З доведеної вище неперервності функції переходячи до границі в (5) отримуємо, що

$$w(x) = f(x, y)$$

$$(x, y) \in Q$$

тобто $y \in Q_f(x)$. Значить послідовність y_k, яка збігається до $y \in Q_f(x)$, не належить відкритій множині U, яка містить $Q_f(x)$, а значить і y. Це суперечить означенню збіжності.

Лема доведена.

Тепер легко закінчити доведення теореми.

Нехай $x(\cdot)$ – розв'язок задачі II. Тоді, так як при зроблених припущеннях множина $Q_f(x)$ випукла і напівнеперервна залежить від x, то з результатів роботи слідує, що існує така вимірна функція $y(t)$, що

$$y(t) \in Q_f(x(t)),$$

тобто

$$(x(t), y(t)) \in Q$$

$$f\left(x(t),y(t)\right)=w\left(x(t)\right).$$

Значить

$$I_1\left(x(t),y(t)\right)=I_2\left(x(t)\right).$$

Так як $I_1 \geq I_2$ завжди і $I_2\left(x(\cdot)\right)=\min I_2$, то пара $x(\cdot),y(\cdot)$ є розв’язком задачі I, і значення мінімумів в задачах I і II співпадають.

Якщо тепер $\left(x(\cdot),y(\cdot)\right)$ є розв’язком задачі I, то

$$I_1\left(x(\cdot),y(\cdot)\right)=\min I_1=\min I_2.$$

Покажемо, що $f\left(x(t),y(t)\right)=w\left(x(t)\right)$ майже скрізь.

Дійсно, якщо це не так, тобто на множині скінченої міри

$$f\left(x(t),y(t)\right)>w\left(x(t)\right)$$

то

$$\min I_1=\min I_2=\int_0^1 f\left(x(t),y(t)\right)dt>\int_0^1 w\left(x(t)\right)dt=I_2\left(x(\cdot)\right).$$

Тобто $I_2\left(x(\cdot)\right)<\min I_2$, чого не може бути.

Теорему повністю доведено.

Наслідок. Якщо множина Q випукла і замкнута, і хоча б при одному x множина $Q(x)$ обмежена, то припущення теореми виконується.

Це слідує з результатів роботи [1], які відносяться до випуклих відображень.

Потрібно отримати необхідні умови екстремуму для задачі I. Але тепер замість задачі I дослідимо задачу II. Необхідні умови екстремуму для задачі II дає теорема 2. Щоб отримати необхідні умови екстремуму для задачі II, потрібно, щоб вона задовольняла припущенням наведеної теореми.

Оскільки Q – випукле відображення, функція $f(x,y)$ випукла, то можна застосувати теорему 5 [1]. В силу цієї теореми отримаємо, що функція $f(x,y)$ випукла, а відповідний їй диференціал має вигляд:

$$\partial w(x)=\left\{x^*+Q^*\left(y^*,(x,y)\right):\left(x^*,y^*\right)\in\partial f\left(x,y\right)\right\}.$$

Але як відомо, субдиференціал неперервної випуклої функції рівномірно обмежений і неперервний зверху по включенню.

В лемі ми довели, що функція $w(x)$ неперервна. А неперервна випукла функція задовольняє умову Ліпшиця

$$\left|w(x)-w(x_0)\right|\leq L\left\|x-x_0\right\|,\quad L=const.$$

Це можна легко показати. Нехай $x_0=0$ і Ω куля радіуса r з центром в x_0. Виберемо $y\in\Omega$ таке що задовольняє нерівність $\|y\|\leq\frac{r}{2}$. Покладемо

$$x=\frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|}.$$

Тепер використовуючи нерівність

$$\left|w(Lx)-w(0)\right|\leq 2c_1L \quad \text{отримаємо}$$

$$\left|w(y)-w(0)\right|=\left|w\left(\frac{2\|y\|}{r}x\right)-w(0)\right|\leq L\|y\|.$$

Послідовно виконуються всі умови припущень В [1].

Тепер до поставленої задачі II можна застосувати теорему 2. Тим самим ми отримаємо необхідні умови мінімуму для задачі I. Сформулюємо основний результат.

Теорема 2. якщо виконані умови А і С, а $\tilde{x}(t),\ t\in[0,1]$ мінімізує

$$\int_0^1 f\left(x(t),y(t)\right)dt\,.$$

серед усіх траєкторій диференціального включення

$$\dot{x}(t)\in a\left(x(t)\right),$$

що задовольняють умовам $x(0)\in N$, $x(1)\in M$ і $\left(x(t),y(t)\right)\in Q$,

тоді існує абсолютно неперервна функція $p^*(t),\ t\in[0,1]$, вимірні функції $u^*(t)$ і $v^*(t)$, число $\lambda\ge 0$, не всі одночасно рівні нулю, такі що:

1) $-p^*(1)\in K_M^*\left(\tilde{x}(1)\right),\ p^*(0)\in K_N^*\left(\tilde{x}(0)\right)$

2) функція $p^*(t)$ задовольняє умові Ліпшиця і

$$-p^*(t)\in\lambda\left[u^*(t)+Q^*\left(v^*(t),x(t),y(t)\right)\right]+A^*\left(p^*(t);\tilde{x}(t)\right)$$

майже скрізь на $[0,1]$

3) $\left(u^*(t),v^*(t)\right)\in\partial f\left(x(t),y(t)\right),\ \left\langle\dot{\tilde{x}}(t),p^*(t)\right\rangle=W_a\left(\tilde{x}(t),p^*(t)\right)$

майже скрізь на $[0,1]$.

Тут A^* і Q^* спряжені відображення до a і Q. W_a опорна функція відображення a визначається за формулою V.3.1 [1].

Якщо функція f диференційована, тоді маємо:

Теорема 3. Нехай виконані припущення попередньої теореми. Тоді необхідні умови оптимальності траєкторії $\tilde{x}(t),\ t\in[0,1]$ будуть такі умови:

1) $p^*(0)\in K_N^*\left(\tilde{x}(0)\right),\ -p^*(1)\in K_M^*\left(\tilde{x}(1)\right)$

2) функція $p^*(t)$ задовольняє умові Ліпшиця і

$$-p^*(t)\in\lambda\left[f_x'\left(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)\right)+Q^*\left(f_x'\left(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)\right);\left(x(t),y(t)\right)\right)\right]+A^*\left(p^*(t);\tilde{x}(t)\right)$$

майже скрізь на $[0,1]$

3) $\left\langle\dot{\tilde{x}}(t),p^*(t)\right\rangle=Wa\left(\tilde{x}(t),p^*(t)\right)$

майже скрізь на $[0,1]$.

Доведення. Якщо функція $f(x,y)$ диференційовна, то її субдиференціал $\partial f(x,y)$ складається лише з одного вектора-градієнта функції $f(x,y)$, який складається з компонентів, відповідним частинним похідним:

$$f_x'(x,y)\ \text{ і }\ f_y'(x,y).$$

Підставивши їх в твердження 2 теореми 2. отримаємо необхідне.

Висновки: Розглянута задача оптимального керування з диференціальними включеннями. Наведено метод зведення цієї задачі до еквівалентної, яка розв'язується відомими методами.

1. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
2. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1982. – 144 с.
3. Гінайло П.І. Про еквівалентність двох задач оптимального керування. // Вісник Київського університету. Математика і механіка. 1986. Вип. 28. С.24–27.
4. Гінайло П.І. Необхідні умови екстремуму для задачі оптимального керування з континуумом обмежень. // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямком „Інженерна механіка"), вип..11, част.2, Луцьк, 2002, С.15–17.
5. Гінайло П.І. Необхідні умови екстремуму для локально випуклої задачі. // Дванадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука. Київ, 15–17 трав. 2008 р. Матеріали конф., т. І. – К.: НТУУ "КПІ". – 2008. – 572с.