

УДК 510.589+681.587.72

Доц., к.т.н. Чабан О.В.\*, ас., к.т.н. Костючко С.М., ас. Міскевич О.І.\*\*\*, студ. Киричук А.А.\*\*\*

\*Національний університет «Львівська політехніка»

\*\*Луцький національний технічний університет

\*\*\*Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

## ВЕРИФІКАЦІЯ НА ОСНОВІ ЧИСЛОВОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ДВОХ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ЧУТЛИВОСТІ

**Чабан О.В., Костючко С.М., Міскевич О.І., Киричук А.А. Верифікація на основі числового експерименту двох методів дослідження параметричної чутливості.** Теоретичні та практичні доробки теорії аналізу параметричної чутливості є застосовними лише до найпростіших задач. Вони не дають змоги диференціювати рівняння стану за вектором невідомих у складних нелінійних системах. Метод допоміжної параметричної чутливості, в свою чергу, дозволяє обійти цю процедуру методом введення допоміжних рівнянь стану, які відіграють важливу роль при виведенні рівнянь чутливості. Матриця параметричних чутливостей обчислюється, як добуток матриці коефіцієнтів диференціальних рівнянь стану, записаних у нормальній формі Коші, та матрицю допоміжних параметричних чутливостей. В даній статті продемонстровано верифікацію класичного методу та методу допоміжної параметричної чутливості.

**Ключові слова:** нелінійна система, параметрична чутливість, нелінійність, допоміжна модель, алгоритм.

**Чабан О.В., Костючко С.Н., Міскевич О.І., Киричук А.А. Верификация на основе численного эксперимента двух методов исследования параметрической чувствительности.** Теоретические и практические наработки теории анализа параметрической чувствительности является приемлемым только к простейшим задачам. Они не позволяют дифференцировать уравнения состояния по вектору неизвестных в сложных нелинейных системах. Метод вспомогательной параметрической чувствительности, в свою очередь, позволяет обойти эту процедуру методом введения вспомогательных уравнений состояния, которые играют важную роль при выводе уравнений чувствительности. Матрица параметрических чувствительностей исчисляется как произведения матрицы коэффициентов дифференциальных уравнений состояния, записанных в нормальной форме Коши, и матрицы вспомогательных параметрических чувствительности. В данной статье продемонстрировано верификацию классического метода и метода вспомогательной параметрической чувствительности.

**Ключевые слова:** нелинейная система, параметрическая чувствительность, нелинейность, вспомогательная модель, алгоритм.

**Tchaban O.V., Kostiuchko S.M., Miskevich O.I., Kyrychuk A.A. The verification of two methods research of parametric sensitivity using numerical experiment.** Theory and practice of analysis of parametric sensitivity are applied only to the simplest problems. They do not allow to differentiation equation of state by the vector of unknowns in complex nonlinear systems. The method of auxiliary parametric sensitivity allows bypassing this procedure by the introduction of auxiliary equations of state, which play a supportive role in finding equations of sensitivity. Matrix of parametric sensitivities is calculated as the product of matrix of coefficient differential equations of state, which are written in the normal Cauchy's form, and matrix of auxiliary parametric sensitivity. In this article is demonstrated verification of the classical method and method of auxiliary parametric sensitivity.

**Keywords:** non-linear systems, parametric sensitivity, non-linearity, auxiliary model, algorithm.

**Постановка наукової проблеми.** У наш час досить великою є потреба розвитку методів математичного моделювання, які б давали змогу обчислювати параметричну чутливість. Це важливо як для теорії, так і для практики проектування та експлуатації нелінійних технічних систем. Значний вплив на розв'язок задач оптимального проектування відіграють сталі параметри системи, адже вони впливають на її характеристики.

**Аналіз досліджень.** Більшість сучасних розробок, при дослідженні параметричної чутливості нелінійних систем, базуються використанні загальної теорії звичайних диференціальних рівнянь. Практичний аспект цього застосування має трудність побудови диференціальних рівнянь чутливості. Через це класичні підходи для реальних задач дають неприйнятні результати. Це звужує коло застосування класичної теорії до найпростіших задач. В математичному моделюванні задача аналізу усталеної параметричної чутливості нелінійних фізичних систем ще не знайшла свого належного розв'язання. Як кінцевий результат пропонується підміна понять залежності тих чи інших невідомих від дискретних змін тих чи інших параметрів.

**Виклад основного матеріалу й обґрунтування результатів досліджень.** Застосування класичної теорії параметричної чутливості до складних нелінійних систем неможливе. Метод допоміжної параметричної чутливості знімає обмеження класичної теорії та ґрунтується на ідеї використання допоміжних рівнянь стану. Основою цього методу є загальна теорія нелінійних диференціальних рівнянь. Продемонструємо на простому прикладі на скільки спрощується аналіз на підставі запропонованого методу.

Диференціальне рівняння стану пристрою запишемо в загальному вигляді

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t), \quad \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0), \quad (1)$$

$\mathbf{x}$  – колонка невідомих,  $\boldsymbol{\lambda}$  – колонка сталих параметрів.

На випадок допоміжної колонки невідомих

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

рівняння стану матиме вигляд

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t). \quad (3)$$

Початкові умови  $\mathbf{x}(0)$ , які дозволяють обійти перехідну реакцію, виступатимуть аргументом рівняння періодичності з періодом  $T$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\mathbf{x}(0), T) = 0 \quad (4)$$

Розв'язання рівняння (4) проводять ітераційним методом Ньютона

$$\mathbf{x}(0)^{(s+1)} = \mathbf{x}(0)^{(s)} - \mathbf{f}'(\mathbf{x}(0)^{(s)})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}(0)^{(s)}). \quad (5)$$

Продиференціювавши цільову функцію (4) за  $\mathbf{x}(0)$  отримаємо матрицю Якобі

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{I} - \Phi(T); \quad \Phi(T) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}(0), t)}{\partial \mathbf{x}(0)} \Big|_{t=T}. \quad (6)$$

Матриця  $\Phi(T)$  – матриця монодромії у момент часу  $t = T$ . Її мультиплікатори дають повну відповідь про статичну стійкість знайденого періодичного стану [16]. Розв'язання рівнянь (4) та (5) становить двоточкову крайову задачу для диференціальних рівнянь стану.

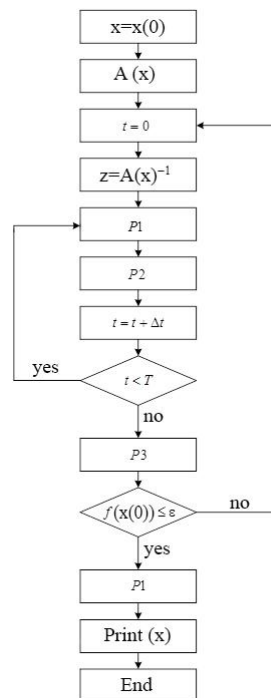


Рис. 1. Блок-схема входження в усталений стан виконавчого компонента комп'ютеризованої системи

Введемо позначення параметричних чутливостей відповідних невідомих:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} = \mathbf{C}_x, \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} = \mathbf{C}_y. \quad (7)$$

Продиференціювавши за  $\lambda$  вираз (2) можна встановити зв'язок між  $\mathbf{C}_x$  і  $\mathbf{C}_y$

$$\mathbf{C}_x = \mathbf{A}\mathbf{C}_y, \quad (8)$$

де обернена матриця до  $\mathbf{A}$  матиме вигляд

$$\mathbf{A}^{-1} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Диференціюючи за  $\lambda$  (1) і (3) отримаємо рівняння відповідних параметричних чутливостей

$$\frac{\partial \mathbf{C}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \lambda, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}_x + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \lambda, t)}{\partial \lambda}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \lambda, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}\mathbf{C}_y + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \lambda, t)}{\partial \lambda}. \quad (11)$$

Для прикладу застосування рівнянь чутливостей (10) і (11) скористаємося диференціальними рівняннями стану насиченого дроселя ( $i = x$ )

$$\frac{di}{dt} = A(u - Ri). \quad (12)$$

За характеристикою намагнечування магнетопровода  $\psi = ai + bi^3$  із формул (2) та (9) встановлюємо значення коефіцієнта  $A$

$$A = \frac{I}{a + 3bi^2}. \quad (13)$$

Допоміжне рівняння дроселя матиме вигляд ( $\psi = y$ )

$$\frac{d\psi}{dt} = u - Ri. \quad (14)$$

В даній роботі розглядатимемо періодичну чутливість до опору резистора  $R$ . Підставляючи (13) у (12) і диференціюючи за  $\lambda$ , отримаємо (10)

$$\frac{\partial \mathbf{C}_x}{\partial t} = - \left[ \frac{R(a + 3bi^2) + (u - Ri)6bi}{(a + 3bi^2)^2} \mathbf{C}_x + \frac{i}{a + 3bi^2} \right]. \quad (12)$$

Диференціюючи за  $\lambda$  (14), одержимо (11)

$$\frac{\partial \mathbf{C}_y}{\partial t} = - \left[ \frac{R}{a + 3bi^2} \mathbf{C}_y + i \right]. \quad (13)$$

Зв'язок між чутливостями  $\mathbf{C}_x$  і  $\mathbf{C}_y$  можна знайти за формулами (8) та (13)

$$\mathbf{C}_x = \frac{\mathbf{C}_y}{a + 3bi^2}. \quad (17)$$

Задамо вихідну інформацію для розв'язання двоточкової крайової задачі для неоднорідних диференціальних рівнянь (15), (16):  $u = 100\sin(314t + \pi/6)$ ;  $R = 10$ ;  $a = 0.2$ ;  $b = 0.01$ . Відповідність результатів симуляції рівнянь (15) та (16) показана на рис. 3. Це підтверджує математичну обґрунтованість запропонованого методу. У найпростішому випадку бачимо, що

рівняння (15) є складнішим за рівняння (16). У випадку, коли коефіцієнт  $A$  набирає матричного змісту із складними взаємозв'язками між елементами матриці, то побудувати рівняння (15) неможливо.

Таблиця 1

$t, c$	$i_k, A$	$i_s, A$
0.0000E+00	-1.147138	-1.147138
5.5556E-04	-0.969788	-0.969787
1.6667E-03	-0.539052	-0.539051
2.2222E-03	-0.281953	-0.281952
3.3333E-03	0.262434	0.262434
3.8889E-03	0.522196	0.522196
5.0000E-03	0.962481	0.962481
5.5556E-03	1.13204	1.13204
6.6667E-03	1.36133	1.36133
7.2222E-03	1.42082	1.420819
8.3333E-03	1.43008	1.430076
8.8889E-03	1.37967	1.379670
9.9999E-03	1.16736	1.167359
1.0556E-02	1.00531	1.005312
1.1667E-02	0.576593	0.576593
1.2222E-02	0.319901	0.319902
1.3333E-02	-0.226146	-0.226145
1.3889E-02	-0.487892	-0.487891
1.4999E-02	-0.932913	-0.932912
1.5556E-02	-1.10467	-1.104669
1.6667E-02	-1.33745	-1.337454
1.7222E-02	-1.39822	-1.398216
1.8333E-02	-1.40915	-1.409148
1.8889E-02	-1.35919	-1.359193
1.9999E-02	-1.14714	-1.147138

Таблиця 2

$t, c$	$S$	$A\chi$
0.0000E+00	1.2754481E-02	1.2937506E-02
5.5556E-04	1.5861539E-02	1.5994631E-02
1.6667E-03	2.0506294E-02	2.0526893E-02
2.2222E-03	2.1750918E-02	2.1714665E-02
3.3333E-03	2.0768825E-02	2.0632748E-02
3.8889E-03	1.8624833E-02	1.8444171E-02
5.0000E-03	1.2623498E-02	1.2366969E-02
5.5556E-03	9.3618501E-03	9.0784589E-03
6.6667E-03	2.9923802E-03	2.6814227E-03
7.2222E-03	-7.0767004E-05	-3.8321465E-04
8.3333E-03	-6.0580457E-03	-6.3507301E-03
8.8889E-03	-9.0412721E-03	-9.3124555E-03
9.9999E-03	-1.5041226E-02	-1.5243614E-02
1.0556E-02	-1.7975548E-02	-1.8130289E-02
1.1667E-02	-2.2935783E-02	-2.2977958E-02
1.2222E-02	-2.4352683E-02	-2.4339039E-02
1.3333E-02	-2.3581881E-02	-2.3471912E-02
1.3889E-02	-2.1425027E-02	-2.1271167E-02
1.4999E-02	-1.5225075E-02	-1.4991916E-02
1.5556E-02	-1.1838963E-02	-1.1575701E-02
1.6667E-02	-5.2664322E-03	-4.9687168E-03
1.7222E-02	-2.1383308E-03	-1.8359367E-03
1.8333E-02	3.8982376E-03	4.1865609E-03
1.8889E-02	6.8657817E-03	7.1351584E-03
1.9999E-02	1.2754471E-02	1.2959572E-02

Таблиці 1 та 2 демонструють результати симуляції усталеного стану технічного пристрою за класичним ( $i_k$ ) і запропонованим ( $i_s$ ) методами та періодичну чутливість струму реального технічного пристрою до опору, за класичним ( $S$ ) та запропонованим ( $A\chi$ ) методами відповідно. Збіг результатів характеризується точністю числових обчислень.

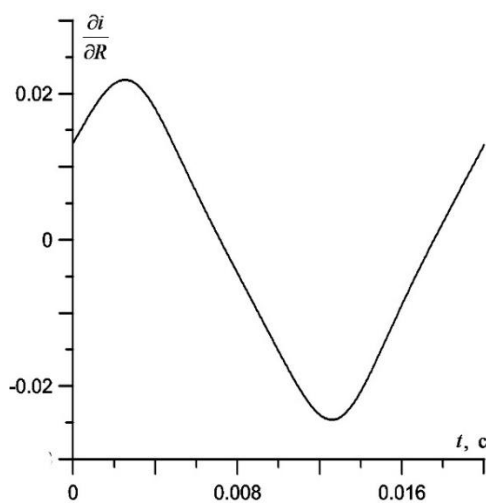


Рис 2. Усталена параметрична чутливість

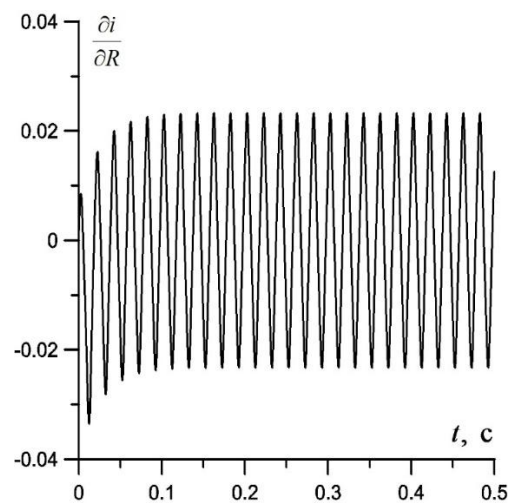


Рис 3. Перехідна параметрична чутливість

Результати комп'ютерних обрахунків перехідної параметричної чутливості класичного та запропонованого методів збігаються.

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** В даній статті не йшла мова про переваги одного методу над іншим з погляду точності отриманих результатів. Робота показує складність їх застосування до нелінійних систем. Запропонований метод допоміжної чутливості дає змогу виключити операцію диференціювання матриці коефіцієнтів  $\mathbf{A}$ . Ця задача досягнута з усією математичною строгістю, що підтверджують результати комп'ютерної симуляції.

1. Aprile T.I. A computer algorithm to determine the steady-state response of non-linear oscillators / Aprile T.I., Trick T.N. // IEEE, Trans. Circuit Theory. – 1972. – vol. 19. – P. 354-360.
2. Donald G. Fink, H. Wayne Beaty Standard handbook for electrical engineers / McGRAW-HILL BOOK, twelfth edition. – NY. – 1987. – 1600 p.
3. Khusainov D. Introduction in modeling of dynamical systems (in Ukrainian) – Kyiv, 2010. – 130 p.
4. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical handbook for scientists and engineers / McGRAW-HILL BOOK. – N.Y., Toronto, London. – 1961. – 720 pp.
5. Kozoriz V. Transport and the future (in Ukrainian) // Technical news, 2005 / 1(20), 2(21). – PP. 29-34.
6. Lyashko S.I. Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters / Dordrecht, Boston, London. – Kluwer Academic Publishers. – 2002. – 455 p.
7. Melnik A. Architecture of computer (in Ukrainian) – Lutsk, 2008. – 470 p.
8. Tavares M., Portela C. Transmission system parameters optimization–sensitivity analysis of secondary arc current and recovery voltage // Power Delivery, 2004. – V. 19, № 3. – PP. 1464-1471.
9. Tchaban V. Mathematical modeling in electrical engineering (in Ukrainian). – Lviv: Taras Soroka's publisher home, 2010, 508 p.
10. Tchaban V. Mathematical modeling of electromechanical processes (in Russian). – Lviv, 1997, 344 p.
11. Tchaban V., Bily L. Mathematic modelling of periodic regimes of electric machines / Modelling, simulation and control. – 1984. – Vol. 1, № 1. – P. 35-39.
12. Tchaban V., Kostyuchko S. Parametric sensitivity of three-phase induction motor // Technical news, 2014 / 1(39), 2(40). – PP. 26-30.
13. Tchaban V., Kostyuchko S., Tchaban Z. Auxiliary model of parametric sensitivity // Computational problems of electrical engineering. – Lviv, 2012. – V.2, № 2. – PP. 105-111.
14. Tchaban V., Kozoriz V. Mathematical modelling of interaction of superconductors magnetic systems / Proceedings Intern. AMSE Conference "Systems". – London. – 1993. – Vol. 3. – P. 149-153.
15. Tchaban V., Tchaban O. Derivative of matrices of parameters over independent variables (in Ukrainian) // Technical news, 2014 / 1(39), 2(40). – P. 51
16. Tchaban V., Tchaban O., Kostyuchko S., Tchaban Z. About one two-point boundary value problem // Technical news, 2011 / 1(33), 2(34). – PP. 10-12.
17. Tchaban V., Tchaban O., Kostyuchko S., Tchaban Z. The theory of electromagnetic circuits. – In monograph: Computing in Science and Technology, Rzeszow: Wyd-wo Uniwersytetu Rzeszowskiego, ISBN 978-83-7338-895-6, 2012/13, 172 p. (pp. 34-55).
18. Tchaban V., Tchaban Z. Simulation of static stability of three phase induction motor. – Przegląd elektrotechniczny, R. 87, NR 9a/2011, pp. 295–297.