

УДК 539.3

Максимович О.В., Лавренчук С.В.

Луцький національний технічний університет

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ШТАМПІВ І ТРИЩИН У АНІЗОТРОПНІЙ ПІВПЛОЩИНІ ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕРТЯ

Максимович О.В., Лавренчук С.В. Числовий аналіз напружень біля штампів і тріщин у анізотропній півплощині за врахування тертя. Запропоновано алгоритм розрахунку напружень біля штампа і тріщин в анізотропній півплощині, в якому враховано тертя під штампом та контакт берегів тріщин. Розв'язування контактної задачі для штампа параболічної форми за врахування тертя проведено на основі підходів Галіна та Мусхелішвілі. Дослідження напружень біля тріщин виконано методом інтегральних рівнянь, причому задачу визначення контактних напружень на берегах тріщин зведено до задачі квадратичного програмування. Виконано аналіз напружень біля тріщин для ізотропного і анізотропних матеріалів залежно від розміщення тріщин.

Ключові слова: плоска контактна задача, анізотропна півплощина, кулонівське тертя, контакт берегів тріщин, інтегральне рівняння, задача квадратичного програмування, потенціали Лехніцького.

Максимович О.В., Лавренчук С.В. Численный анализ напряжений возле штампов и трещин в анизотропной полуплоскости с учетом трения. Предложен алгоритм расчета напряжений у штампа и трещин в анизотропной полуплоскости, в котором учтены трения под штампом и контакт берегов трещин. Решение контактной задачи для штампа параболической формы с учетом трения проведено на основе подходов Галина и Мусхелишвили. Исследование напряжений у трещин выполнено методом интегральных уравнений, причем задачу определения контактных напряжений на берегах трещин сведено к задаче квадратичного программирования. Выполнен анализ напряжений у трещин для изотропного и анизотропных материалов в зависимости от размещения трещин.

Ключевые слова: плоская контактная задача, анизотропная полуплоскость, кулоновское трение, контакт берегов трещин, интегральное уравнение, задача квадратичного программирования, потенциалы Лехницкого.

Maksymovych O.V., Lavrenchuk S.V. Numerical analysis of stresses at the stamps and cracks in anisotropic half-plane taking into account friction. The algorithm for calculating of stresses at the stamp and cracks in the anisotropic half-plane, which takes into account friction under the stamp and contact crack is proposed. The solution of the contact problem for the parabolic shape stamp on account of friction has been performed based on the approaches of Galina and Muskhelishvili. The research of stresses at the cracks has been executed by the method of integral equations and the problem of determining of contact stresses on crack has been kept to a quadratic programming problem. The analysis of stresses at the cracks for isotropic and anisotropic materials depending on the placement cracks has been executed. Analysis of stresses at the cracks for isotropic and anisotropic materials depending on the placement cracks is executed.

Keywords: flat contact task, anisotropic half-plane, the Coulomb friction, contact crack, integral equations, quadratic programming problem, potentials of Lehnitskyu.

Актуальність та постановка проблеми. Відомо, що в області контакту штампів із пружними тілами можуть виникнути високі напруження. А це, в свою чергу, може призвести до зародження і розвитку крайових тріщин під різними кутами до межі тіла. Очевидно, що для практики дослідження такої контактної поведінки є на часі. Наприклад, при розгляді підшипників, в яких ролики контактують із біговою доріжкою, має місце багаторазове навантаження відносно тріщин, які вже з'явилися раніше, тобто тут будуть мати місце повторні навантаження. Тому тріщини, що зародились на початкових стадіях, будуть розвиватися за втомним механізмом. У відповідних розрахунках необхідно також врахувати контакт берегів тріщин та тертя під штампом, яке може суттєво впливати на шукані напруження.

Метою даної роботи є дослідження напружень біля тріщин у анізотропній півплощині за врахування тертя під штампом та контакту берегів тріщин на основі розподілу напружень, які виникають під штампом за врахування тертя.

Аналіз досліджень та публікацій. Проблема визначення напружень у пружних тілах із тріщинами, які контактують із штампами достатньо повно вивчена для ізотропних тіл. При розгляді таких задач, як правило, тіло моделюють півплощиною, штамп приймають параболічним, враховують контакт берегів тріщин [4, 8]. Для спрощення приймають, що розподіл напружень під штампом описується за відомою формулою Герца, яка справедлива для випадку гладкого штампа. При врахуванні сил тертя наближено приймають, що дотичні напруження під штампом пропорційні вказаним вище нормальним напруженням. Аналогічний підхід розглядався для анізотропних тіл у роботі [10]. В той же час у літературі побудовано точний розв'язок контактної задачі теорії пружності [2,6], в якому враховано тертя під штампом і який не описується розподілом Герца.

Визначення контактних напружень в суцільній півплощині. Розглянемо анізотропну півплощину $y < 0$, яка навантажена в області L_u ($c < x < d$) штампом з основою $y = f(x)$. Прийmemo, що напруження під штампом задовольняють умовам рівноваги

$$\int_c^d \sigma_y(x) dx = P, \quad \int_c^d x \sigma_y(x) dx = M,$$

та закону Кулона, згідно до якого дотичні напруження пов'язанні з відповідними нормальними за допомогою співвідношення $\tau_{xy} = k\sigma_y$; де P і M – вертикальна сила та момент, що прикладені до штампа, а k – коефіцієнт кулонівського тертя. Також при цьому прийемо, що границя поза областю контакту (позначимо цю ділянку областю L_σ) вільна від навантаження, тобто, що на ній відсутніми є як нормальні, так і дотичні напруження під штампом.

Тоді граничні умови для знаходження комплексних потенціалів, що визначені при $y < 0$ запишуться у вигляді

$$\operatorname{Re}[s_1\Phi(x) + s_2\Psi(x)] = 0, \quad \text{при } -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

$$\operatorname{Re}[\Phi(x) + \Psi(x)] = 0, \quad \text{при } x \in L_\sigma, \quad (2)$$

$$2\operatorname{Re}[q_1\Phi(x) + q_2\Psi(x)] = f'(x), \quad \text{при } x \in L_u. \quad (3)$$

де s_1 та s_2 – корені характеристичного рівняння [1], α_{12} , α_{22} та α_{26} – пружні сталі відповідного анізотропного матеріалу, а $q_j = \alpha_{12}s_j + \frac{\alpha_{22}}{s_j} - \alpha_{26}$, $j = \overline{1, 2}$.

Розв'язок контактної задачі. На основі [2] потенціали можуть бути зображені у вигляді

$$\Phi(z) = \frac{S_2}{S_2 - S_1} F(z), \quad \Psi(z) = -\frac{S_1}{S_2 - S_1} F(z), \quad (4)$$

де $S_j = k + s_j$, $F(z)$ – аналітична при $y < 0$ функція.

Умова $\tau_{xy} = k\sigma_y$ виконується автоматично всюди на межі півплощини. Підставивши (4) у третю граничну умову при $x \in L_u$, отримаємо

$$2\operatorname{Re}[\lambda F(x)] = f'(x), \quad (5)$$

де $\lambda = \frac{S_2q_1 - S_1q_2}{S_2 - S_1} = -k \left(\alpha_{12} - \frac{\alpha_{22}}{s_1s_2} \right) + \alpha_{22} \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) - \alpha_{26}$.

Вимагаючи, щоби при $x \in L_\sigma$ $\sigma_y = 0$, отримаємо умову [2]

$$\operatorname{Re} F(x) = 0. \quad (6)$$

Легко перевірити, що при цьому при $x \in L_\sigma$ також виконується умова $\tau_{xy} = 0$.

Знайдемо функцію $F(z)$ методом лінійного спряження [6]. Для цього продовжимо її, поклавши при $y > 0$ $F(z) = -\overline{F(z)}$. Тоді умови (5) і (6) переписуться у вигляді

$$F^+ - F^- = 0, \quad \text{при } x \in L_\sigma;$$

$$F^+ - gF^- = f_1(x), \quad \text{при } x \in L_u,$$

де $g = \lambda/\lambda$, $f_1(x) = -f'(x)/\lambda$.

На основі [6] звідси знаходимо

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_c^d \frac{f_1(t) X^+(t) dt}{t - z} + \frac{C}{X(z)}, \quad (7)$$

де $X(z) = (z - c)^\rho (z - d)^{1-\rho}$, причому $X^- = gX^+$, $\rho = \frac{\ln g}{2\pi i}$, C – довільна дійсна стала.

Для визначення сталої C , врахуємо те, що у випадку, коли до межі півплощини прикладено навантаження з рівнодійною (P_X, P_Y) , то потенціали Лехніцького при $z \rightarrow \infty$ будуть мати вигляд [2]

$$\Phi(z_1) \sim -\frac{1}{2\pi i} \frac{P_X + s_2 P_Y}{s_1 - s_2} \frac{1}{z_1} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{S_2}{s_1 - s_2} \frac{P_Y}{z_1}, \quad \Psi(z_2) \sim \frac{1}{2\pi i} \frac{P_X + s_1 P_Y}{s_1 - s_2} \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2\pi i} \frac{S_1}{s_1 - s_2} \frac{P_Y}{z_2}.$$

Звідси випливає, що для випадку розглядуваної нами контактної задачі при $z \rightarrow \infty$ отримаємо, що

$$F(z) \sim \frac{P_Y}{2\pi i} \frac{1}{z}.$$

А це в свою чергу зі співвідношення (7) дасть нам рівність $C = \frac{P}{2\pi i}$.

Таким чином маємо

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i \lambda X(z)} \int_c^d \frac{f'(t) X^+(t) dt}{t-z} + \frac{P}{2\pi i X(z)} = \frac{1}{2\pi i |\lambda| X(z)} \int_c^d \frac{f'(t) |X^+(t)| dt}{t-z} + \frac{P}{2\pi i X(z)}, \quad (8)$$

Тут враховано $X^+(t) = |X^+(t)| (e^{\pi i})^{1-\rho} = -|X^+(t)| e^{-\pi i \frac{\ln g}{2\pi i}} = -|X^+(t)| \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda}}$.

Контактні напруження будемо шукати за формулою $\sigma_y = 2 \operatorname{Re} F^-$.

Знайдемо момент M сил, які виникають під штампом при отриманому розв'язкові (7) відносно початку координат. Він визначатиметься за формулою

$$M = 2 \operatorname{Re} F_1,$$

де $F_1 = \int_c^d t F^-(t) dt$.

Для знаходження величини F_1 врахуємо

$$\int_{\Gamma} z F(z) dz = \int_c^d t (F^+ - F^-) dt = (g-1) \int_c^d t F^- dt + \int_c^d t f_1 dt,$$

де Γ – замкнений контур, який вміщує відрізок (c, d) , інтегрування вздовж якого проходить за годинниковою стрілкою.

Звідси

$$F_1 = \frac{1}{g-1} \int_{\Gamma} z F(z) dz - \frac{1}{g-1} \int_c^d t f_1 dt.$$

Далі будуть виникати інтеграли вигляду

$$I = \int_c^d s(t) X^+(t) dt, \quad I_1 = \int_c^d \frac{s(t) dt}{X^+(t)},$$

які також аналогічно [6] можна звести до знаходження контурних інтегралів

$$I = \frac{1}{1-g} \int_{\Gamma} s(t) X(t) dt, \quad I_1 = \frac{g}{g-1} \int_{\Gamma} \frac{s(t) dt}{X(t)}. \quad (9)$$

де $s(z)$ – аналітична функція.

Ці контурні інтеграли можуть бути обчислені за методом лишків, якщо врахувати розклади в ряди Лорана при $z \rightarrow \infty$

$$X(z) = z + l D_1 + \frac{l^2 D_2}{z} + \frac{l^3 D_3}{z^2} + \dots, \quad \frac{1}{X(z)} = \frac{1}{z} + \frac{l C_1}{z^2} + \dots, \quad (10)$$

де $D_1 = d_1 - x_c/l$, $D_2 = d_2$, $D_3 = d_3 + d_2 x_c/l$, $C_1 = -D_1$, $d_1 = -(1-2\rho)$, $d_2 = 2\rho(\rho-1)$, $d_3 = 2\rho(\rho-1)(2\rho-1)/3$, $x_c = (d+c)/2$, $l = (d-c)/2$.

Для знаходження контурного інтегралу врахуємо, що при $z \rightarrow \infty$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{P}{z} + \frac{1}{z^2} \left(l C_1 P - \int_c^d f_1(t) X^+(t) dt \right) + \dots \right].$$

Тоді використовуючи теорему про лишки знаходимо

$$F_1 = -\frac{lC_1P + \frac{1}{\lambda} \int_c^d f'(t) X^+(t) dt}{g-1} + \frac{1}{\lambda(g-1)} \int_c^d t f'(t) dt.$$

Звідси отримуємо

$$M = 2 \operatorname{Re} F_1 = lC_1P - \frac{1}{\lambda_2} \operatorname{Im} \left[\int_c^d f'(t) X^+(t) dt \right] = lC_1P + \frac{1}{|\lambda|} \int_c^d f'(t) |X^+(t)| dt. \quad (11)$$

Приклади.

а) Розглянемо випадок плоского штампа, що повертається на кут ε , до якого прикладені сила P . Тоді покладаючи в (8) $f' = \varepsilon$, отримуємо

$$F_\varepsilon(z) = -\frac{\varepsilon}{2\pi i \lambda (1-g) X(z)} \int_\Gamma \frac{X(t) dt}{t-z} + \frac{P}{2\pi i X(z)} = -\frac{\varepsilon}{\lambda(1-g)} \left(1 - \frac{z + lD_1}{X(z)} \right) + \frac{P}{2\pi i X(z)}. \quad (12)$$

Момент знаходимо за формулою (9)

$$M = lC_1P - \frac{\varepsilon}{2\lambda_2^2} \operatorname{Re} \left[\bar{\lambda} \int_\Gamma X(z) dz \right] = lC_1P + \frac{\pi\varepsilon}{\lambda_2} l^2 D_2. \quad (13)$$

Тут враховано, що має місце рівність $\int_\Gamma P_x dz = -2\pi i l^2 D_2$.

З цієї формули може бути визначений кут повороту у випадку, коли заданий момент M , який прикладено до штампа

$$\varepsilon = -\frac{\lambda_2 (PlC_1 - M)}{\pi l^2 D_2}. \quad (14)$$

Звідси, зокрема, для випадку ізотропного матеріалу маємо

$$\alpha_{22} = 1/E, \quad \alpha_{12} = -\nu/E, \quad \alpha_{26} = 0, \quad s_1 \rightarrow i, \quad s_2 \rightarrow i.$$

При цьому мають місце наступні спрощення

$$\lambda = -k \left(\alpha_{12} - \frac{\alpha_{22}}{s_1 s_2} \right) + \alpha_{22} \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) = \frac{-k(1-\nu) - 2i}{E}, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{E};$$

і при $c = -l$, $d = l$ одержимо, що $C_1 = (1 - 2\rho)$, $D_2 = 2\rho(\rho - 1)$.

З формули (14) отримаємо

$$\varepsilon = \frac{Pl(1 - 2\rho) - M}{E\pi\rho(\rho - 1)l^2}.$$

Цей розв'язок збігається з наведеними в [6] співвідношеннями для ізотропної задачі.

б) Розглянемо випадок параболічного штампа, коли $f' = x/R + \varepsilon$, до якого прикладена сила P , де ε – кут повороту штампа, R – радіус закруглення. Тоді

$$F_\varepsilon(z) = -\frac{1}{2\pi i \lambda R (1-g) X(z)} \int_\Gamma \frac{(t + \varepsilon R) X(t) dt}{t-z} + \frac{P}{2\pi i X(z)} = \frac{1}{2i\lambda_2 R} \left(z + \varepsilon R - \frac{z^2 + (lD_1 + \varepsilon R)z + lD_1\varepsilon R + l^2 D_2 - \frac{P\lambda_2 R}{\pi}}{X(z)} \right).$$

Момент знаходимо за формулою (11)

$$M = lC_1P - \frac{1}{2R\lambda_2^2} \operatorname{Re} \left[\bar{\lambda} \int_\Gamma (z + \varepsilon R) X(z) dz \right] = lC_1P + \frac{\pi l^2}{R\lambda_2} (D_2\varepsilon R + lD_3).$$

Тут враховано, що $\int_\Gamma (z + \varepsilon R) X dz = -2\pi i l^2 (\varepsilon R D_2 + lD_3)$.

З цієї формули може бути визначений кут повороту у випадку, коли заданий момент, який прикладено до штампа

$$D_2 R \varepsilon = (M - l C_1 P) \frac{R \lambda_2}{\pi l^2} - l D_3. \quad (15)$$

Розглянемо випадок, коли область контакту невідома. Використаємо заміну $z = \zeta + x_c$. Тоді з (12) отримаємо

$$F_\varepsilon = \frac{1}{2i\lambda_2 R} \left(\zeta + \varepsilon' - \frac{\zeta^2 + (ld_1 + \varepsilon')\zeta + ld_1 \varepsilon' + l^2 d_2 - P\lambda_2 R / \pi}{X_0(\zeta)} \right), \quad (16)$$

де $\varepsilon' = x_c + \varepsilon R$, $X_0(\zeta) = (\zeta + l)^\rho (\zeta - l)^{1-\rho}$.

Область контакту знаходимо з умов обмеженості напружень при $\zeta = \pm l$, які набувають вигляду

$$ld_1 + \varepsilon' = 0, \quad l^2 + ld_1 \varepsilon' + l^2 d_2 - P\lambda_2 R / \pi = 0.$$

До цих рівнянь долучаємо взаємозв'язок між моментом і поворотом штампа

$$d_2 \varepsilon' = (M - l C_1 P) R \lambda_2 / \pi l^2 - l d_3.$$

Звідси отримаємо

$$\varepsilon' = -ld_1, \quad l = \sqrt{\frac{P\lambda_2 R}{2\rho(1-\rho)\pi}}, \quad x_c = \frac{M}{P} + \frac{d_1 l}{3}, \quad \varepsilon R = -\frac{M}{P} - \frac{4d_1 l}{3}. \quad (17)$$

У нових змінних одержимо

$$F_\varepsilon(z) = \frac{1}{2i\lambda_2 R} \left(\zeta + \varepsilon' - \frac{\zeta^2 - l^2}{X_0(\zeta)} \right) = -\frac{P}{4\pi i \rho(1-\rho)l^2} \left(\zeta - ld_1 - \frac{\zeta^2 - l^2}{X_0(\zeta)} \right).$$

Звідси для нормальних напружень під штампом у нових змінних отримаємо наступне співвідношення

$$\sigma_y = -\frac{1}{R|\lambda|} |l + \xi|^{1-\rho} |l - \xi|^\rho = P \frac{\sin \pi \rho}{2\pi \rho(1-\rho)l^2} |l + \xi|^{1-\rho} |l - \xi|^\rho, \quad (18)$$

де $\xi = x - x_c$.

Визначення напружень біля тріщин. Для визначення напружень в півплощині з похилою крайовою тріщиною будемо використовувати розроблений в роботах [1, 5, 9] алгоритм, який базується на методі граничних інтегральних рівнянь. При цьому знаходження контактних напружень на берегах тріщин проводилось на основі підходу [5], в якому ця задача зводиться до задачі квадратичного програмування. Для його реалізації використовувалося отриманий вище розв'язок контактної задачі для суцільної півплощини, для якого в області контакту діють нормальні напруження (18) та відповідні їм дотичні напруження (пов'язані з нормальними за законом Кулона).

Результати розрахунків. Розглянемо випадок дії параболічного штампа, коли його центр розміщено в точці x_0 , тріщина довжиною L виходить на межу пластинки в точці $(0,0)$, кут між тріщиною і віссю Ox рівний β (рис. 1) та між штампом і основою має місце тертя, що описується законом Кулона.

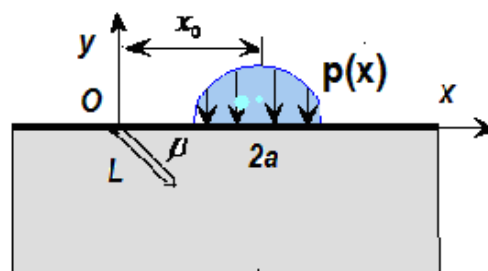


Рис. 1 – Схема задачі

Розподіл відносних коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) $F_{II} = K_{II} / P_0 \sqrt{\pi L}$ для ізотропної пластинки при $L/a = 1$, $\beta = 90^\circ$ та при значеннях коефіцієнта тертя k відповідно: 0; 0.25; 0.5 і 0.75 наведено на рис. 2,а (значення k нанесено біля кривих) залежно від параметра $\lambda = x_0/L$, де a – півширина ділянки контакту, $P_0 = 2|P|/\pi a$. Штриховими лініями на даному рисунку наведено відносні КІН $F_I = K_I / P_0 \sqrt{\pi L}$.

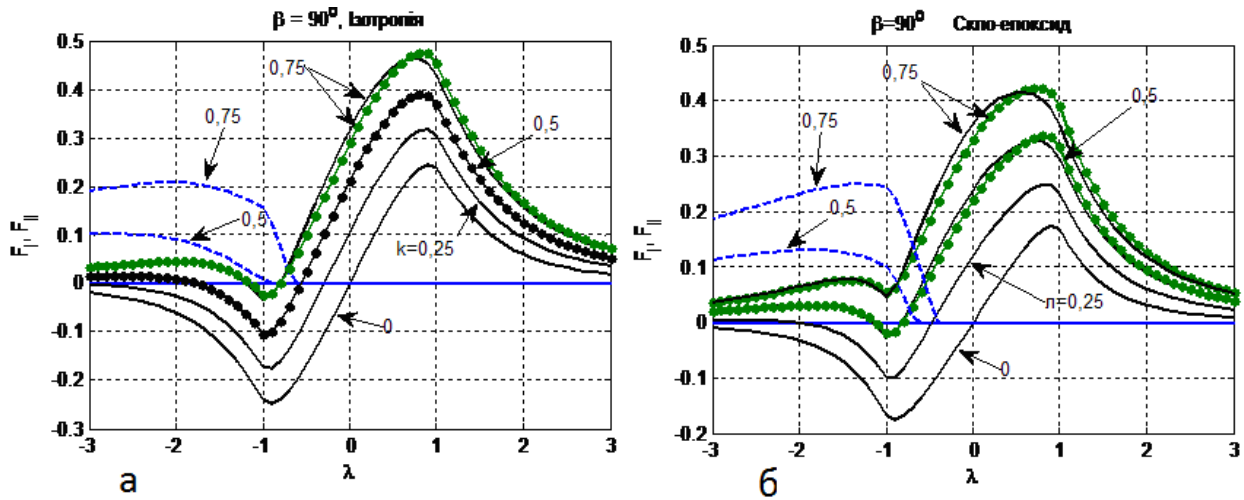


Рис. 2 – Відносні КІН для тріщин, нахилених під кутом $\beta = 90^\circ$

Аналогічні результати розрахунків для матеріалу скло-епоксид, для якого відношення максимального модуля пружності E_x до мінімального E_y дорівнює 3, наведено на рис. 2,б.

На рис. 2 крапками при значеннях k 0.5 та 0.75 наведено результати розрахунків для випадку, коли контактні напруження під штампом описувались розподілом Гауса [4, 10]. При менших значеннях кулонівського коефіцієнта тертя розраховані КІН для двох розглянутих розподілів напружень штампом практично не відрізняються.

Аналогічні результати розрахунків для кутів нахилу тріщин $\beta = 150^\circ$ та $\beta = 30^\circ$ наведено відповідно на рис. 3 та на рис. 4.

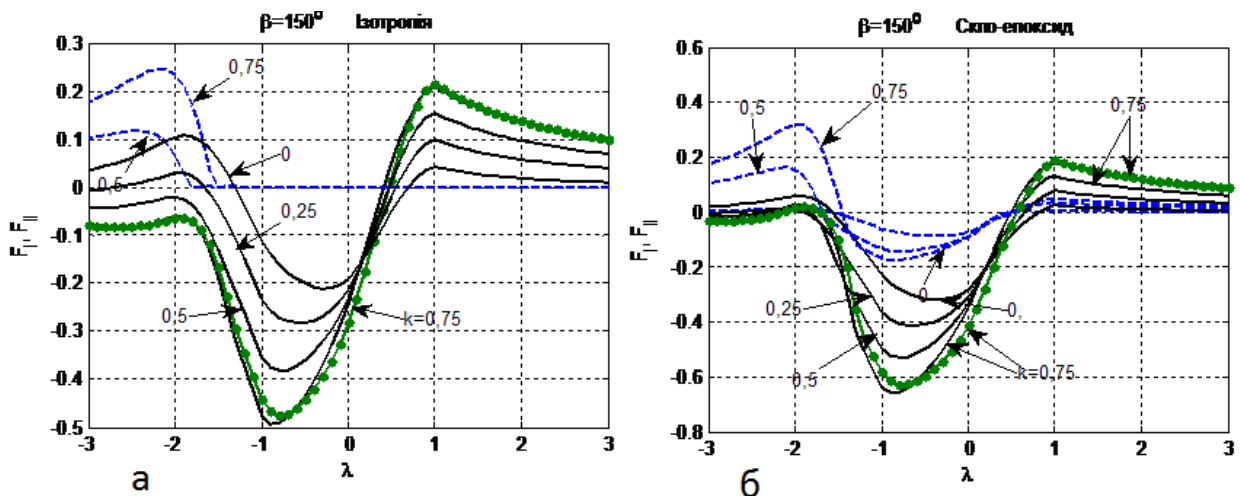


Рис. 3 – Відносні КІН для тріщин, нахилених під кутом $\beta = 150^\circ$

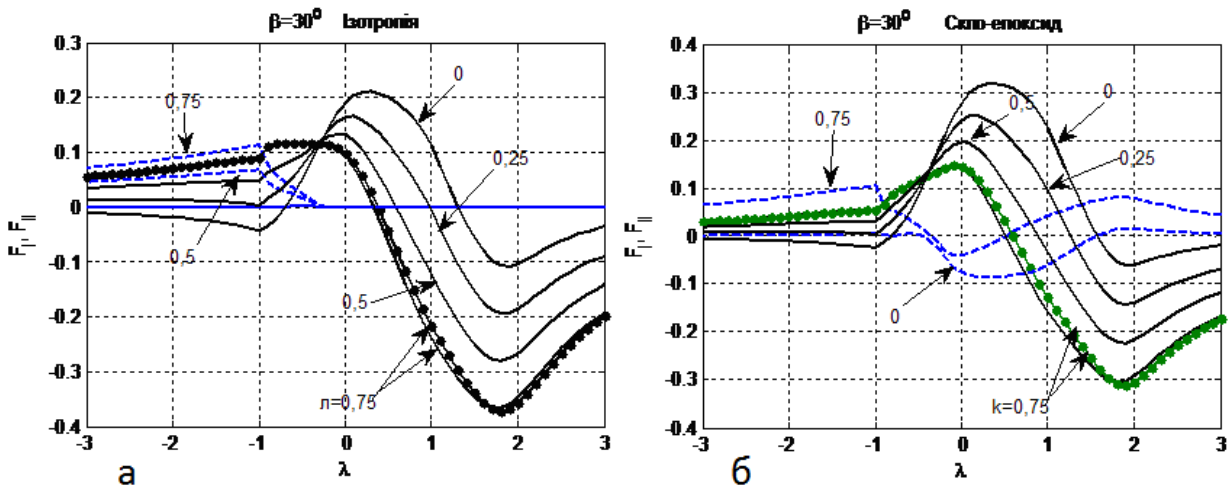


Рис. 4 – Відносні КІН для тріщин, нахилених під кутом $\beta = 30^\circ$

Наведені на рис. 3-4 значення КІН для ізотропного матеріалу практично збігаються з даними, які отримані в роботах [4, 7] іншим методом.

Розраховані відносні КІН для істотно анізотропного матеріалу *CFI*, для якого відношення модулів пружності $E_x/E_y = 400/8.62$, наведено на рис. 5,а. А на рис 5,б наведено результати розрахунків для цього ж матеріалу, коли модуль пружності є максимальним у вертикальному напрямку.

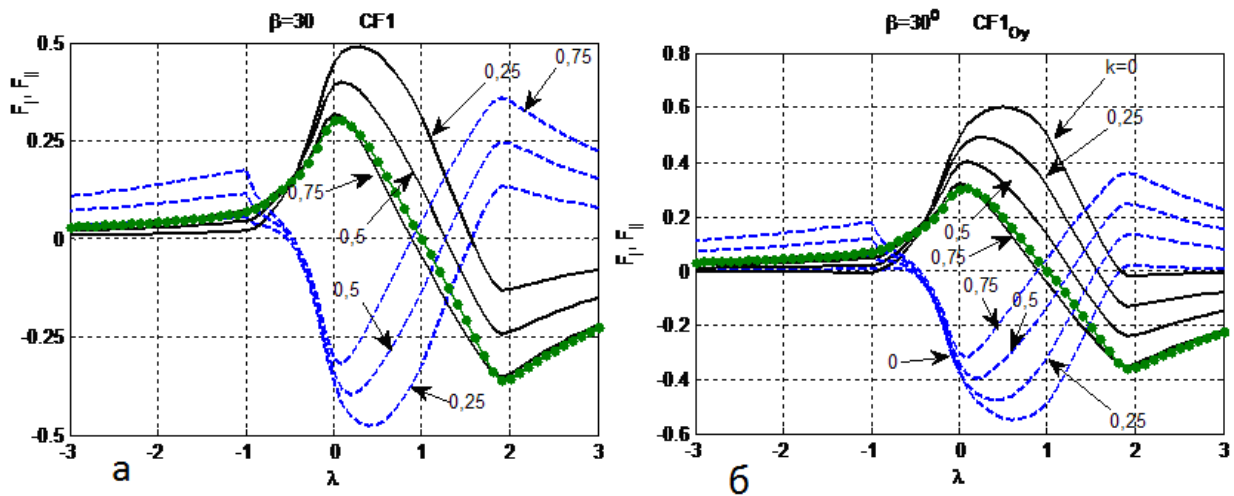


Рис. 5 – Відносні КІН для тріщин, нахилених під кутом $\beta = 30^\circ$ (матеріал *CFI*)

На основі проведених розрахунків можна зробити наступні висновки: для ізотропних матеріалів КІН K_I за врахування контакту берегів тріщин не дорівнює нулю тільки тоді, коли штамп розміщений лівіше тріщини, причому він є меншим за величиною, ніж КІН K_{II} ; КІН K_I відмінні від нуля для всіх анізотропних матеріалів за врахування контакту берегів тріщин, причому вони є сумірними із КІН K_{II} для істотно анізотропних матеріалів; КІН є більшими за величиною у випадку, коли жорсткість матеріалу є більшою у вертикальному напрямку; при значеннях коефіцієнта тертя $k < 0.5$ КІН з достатньою для практики точністю можуть бути розраховані на основі опису тиску під штампом за формулою Герца.

На основі порівняння наведених графіків можна зробити висновок про значний вплив анізотропії на значення КІН, причому зміна напрямку армування істотно змінює як характер, так величину КІН. В більшості із розглянутих випадків мав місце контакт берегів тріщин біля вершини.

Висновки. Розроблено методику розрахунку напружень біля штампів і тріщин у анізотропній

півплощині, в якому враховано тертя під штампом та контакт берегів тріщин. Дослідження напружень біля тріщин виконано методом інтегральних рівнянь, причому задачу визначення контактних напружень на берегах тріщин зведено до задачі квадратичного програмування. Виконано аналіз напружень біля тріщин для ізотропного і анізотропних матеріалів залежно від розміщення тріщин відносно штампа. Встановлено вплив анізотропії та напрямків армування матеріалів на величини та характер КІН.

1. Божидарнік В.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович // Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М. : Наука, 1980. – 304 с.
3. Дацишин О.П. Напружений стан півплощини з крайовою пологою тріщиною під герцівським навантаженням / О.П. Дацишин, Г.П. Марченко // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2008. – № 1. – С. 23-34.
4. Дацишин О.П. Особливості контактування берегів крайової тріщини за рухомого герцівського навантаження / О.П. Дацишин, А.Ю. Глазов, А.Б. Левус // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2013. – № 5. – С. 31-42.
5. Максимович О.В. Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – № 3. – С. 36-42.
6. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М. : Наука, 1966. – 708 с.
7. Панасюк В.В. Контактна задача про дію штампа на границю півплощини, послабленої системою криволінійних тріщин / В.В. Панасюк, А.П. Дацишин, Г.П. Марченко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – № 6. – С. 7-16.
8. Саврук М.П. Тиск з тертям абсолютно жорсткого штампа на пружний півпростір з тріщинами / М.П. Саврук, А.І. Томчик // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – № 3. – С. 5-16.
9. Maksymovych O. Doubly periodic cracks in the anisotropic medium with the account of contact of their faces / O. Maksymovych, Ia. Pasternak, H. Sulym, S. Kutsyk // Acta mechanica et automatica. – 2014. – Vol. 8, № 3. – P. 160–164.
10. Maksimovich O.V. Consideration of anisotropy and contact of cracks edge at stress calculations of rolling bearings / O.V. Maksimovich, A.V. P'yushin, A.D. Ivashhuk // Vestnik OrelGAU – December 2014. – Vol. 6, № 51. – P. 80-86.