УДК 004.6
Клятченко Я.М., Тарасенко Г.О., Тарасенко-Клятченко О.В.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

РЕАЛІЗАЦІЯ ПОРІВНЯННЯ ЧИСЕЛ В НЕГАПОЗИЦІЙНИХ СИСТЕМАХ ЧИСЛЕННЯ

Клятченко Я.М., Тарасенко Г.О., Тараскенко-Клятченко О.В. Реалізація порівняння чисел в негапозиційних системах числення. В статті розглядаються можливості покращити архітектурно-структурні характеристики комп’ютерних засобів за рахунок подання чисел в негапозиційних системах числення. Запропоновано структури операційного пристрою для порівняння двох операндів.
Ключові слова: негапозиційна система числення, позиційна арифметика, порівняння двійкових операндів.

Клятченко Я.М., Тарасенко Г.О., Тарасенко-Клятченко О.В. Реализация сравнения чисел в негапозиционных системах исчисления. В статье рассматриваются возможности улучшить архитектурно-структурные характеристики компьютерных средств за счёт представления чисел в негапозиционных системах исчисления. Предложены структуры операционного устройства для сравнения двух операндов.
Ключевые слова: негапозиционная система исчисления, позиционная арифметика, сравнение двоичных операндов.

Klyatchenko Y.M., Tarasenko G.O., Tarasenko-Klyatchenko O.V. Implementation of numbers comparison in negative-base numeral systems. The options to improve architectural-structural characteristics are examined in the article through the numbers presentation in negative-base numeral systems. The structures of operational arrangement for two operands comparison are proposed.
Key words: negative-base numeral system, positional arithmetic, comparison of binary operands.

Подання чисел в негапозиційних системах числення (тобто, позиційних з від’ємною основою) є заманливою можливістю поліпшити структурно-функціональні та техніко-економічні характеристики комп’ютерних операційних засобів [1-3]. Перш за все, ця заманливість обумовлена значним прискоренням найбільш масових арифметичних операцій додавання-віднімання, оскільки сигнали переносу (для віднімання сигналу боргу) у випадку використання такого числення, не розповсюджується далі, ніж на один розряд (на одну позицію) [1,2]. Це, в свою чергу, дозволяє отримати час операції додавання-віднімання, який не залежить від довжини операндів, оскільки проблема «довгих ланцюжків» (так звана ‘‘вічна проблема’’ позиційної арифметики взагалі [4]) в такому разі не виникає. Іншою заманливою особливістю подання чисел в позиційних численнях з від’ємною основою є відсутність спеціальної знакової позиції (розряду) [1]. Зважаючи на вартість сучасних апаратних цифрових засобів для подання чисел, перевага в скороченні довжини розрядної сітки в один розряд (від відкидання знакового розряду) для операційних пристроїв широкого призначення може вважатися несуттєвою. Однак, для спеціалізованих комп’ютерних операційних засобів ця обставина може бути вирішальною. При цьому слід мати на увазі, що переваги подання чисел в негапозиційних численнях, що стимулюють дослідницький інтерес до них, до певної міри ‘‘врівноважуються’’ складністю виконання інших операцій з таким поданням чисел. Особливо це стосується операцій порівняння негапозиційних операндів. Складнощі навіть наштовхнули деяких комп’ютерних аналітиків-арифметистів до думки про неможливість взагалі порівняння операндів в негапозиційних численнях [2]. Відомі також рекомендації щодо попереднього переводу чисел до зміщених систем числення [1,3] заради необхідності виконання такого порівняння.

Далі з метою спростування сумнівів щодо можливості технічного відтворення операції порівняння чисел в негапозиційному численні пропонуються деякі алгоритмічні та структурні рішення, які є цілком реальними з позицій досягнень сучасної комп’ютерної схемотехніки.

Нехай A і B – двійкові операнди в позиційній системі числення з основою *k=-2,* причому:

$$A = \sum_{i=0}^{n} a_i(-2)^i; B = \sum_{i=0}^{n} b_i(2^{-i});\ a_i, b_i \in \{0,1\};\ i = \overline{0,n};$$

$$i = \overline{0,n}; n = 2l$$

Тут n – число всіх розрядів для подання операндів, яке без втрати загальності викладу будемо вважати парним; *l* – число розрядів в поданні операндів *A* і *B*, які мають один і той же знак їх ваги (інакше – число розрядів з додатною і від'ємною вагою однакове і дорівнює *l*). Очевидно, що за прийнятих позначень максимальний операнд в такому негапозиційному численні може бути обчислений як:

$$A_{max} = 2^0 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{2i},$$

а найменший операнд як:

$$A_{min} = -(2^1 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{n-1}) = -\sum_{i=1}^{n-1} 2^{2i-1}$$

Наприклад, якщо *n=8*, *l=4*, то ваговий ряд для такої негапозиційної системи має вигляд *-128, 64, -32, 16, - 8, 4,- 2, 1*, а діапазон можливих цілих чисел знаходиться між $A_{max} = 85$ і $A_{min} = -170$. Реалізація порівняння операндів *A* і *B* означає встановлення факту виконання одного із співвідношень: *A=B, A>B, A<B.*

Основними властивостями подання операндів в такій негапозиційній системі, що забезпечують досягнення поставленої мети, є наступні:

1. Знаки ваги окремих розрядів чергуються оскільки $(-2)^i > 0$, якщо *i* – парне (включаючи випадок *i*=0) та $(-2)^i < 0$, якщо *i*-непарне. Це дозволяє розділити кожен окремий операнд на додатну і від'ємну частину та виконувати операції з кожною частиною окремо.
2. Будь-яка ненульова цифра, що знаходиться на *i*-му місці (рахуючи справа наліво) в запису операнда за абсолютною величиною її кількісного еквівалента перевищує кількісний еквівалент будь-якої комбінації цифр, що знаходиться справа від *i*-ї позиції. Ця властивість дозволяє в багатьох випадках проводити порівняння чисел орієнтуючись на позиції крайніх зліва одиниць в поданні операнда.
3. Знак операнда в цілому або деякої його частини визначається знаком ваги найстаршого ненульового розряду. Отже якщо група із *m* старших розрядів операнда *A* тотожна (збігається) групі із *m* старших розрядів операнда *B*, то їх можна виключити із розгляду, а остаточний висновок про співвідношення *A* і *B*, робити по *n-m* – розрядних фрагментах *A* і *B*, які залишаються.

Таким чином, алгоритм реалізації багатомісної операції порівняння операндів *A* і *B*, поданих в негапозиційному численні, полягає в наступному:

1. На основі двійкових наборів (векторів), що відповідають операндам *A* і *B*, утворити вектор *C* шляхом їх покомпонентного додавання за модулем 2. Якщо всі компоненти вектора *C* дорівнюють нулю, то *A*=*B* і операція порівняння закінчена. В іншому разі перейти до п.2.
2. Шляхом пріоритетного порівняння компонент c_i вектора *C* утворити маркерний вектор *D*, який містить лише одну одиницю в позиції d_M, що відповідає найстаршій одиниці вектора *C*. Це означає, що в векторах *A* і *B* всі цифри лівіше позиції d_M не впливають на виконання співвідношення порівняння.
3. Шляхом покомпонентного порівняння в парах (a_i, d_i) та (b_i, d_i) визначити цифри a'_M і b'_M в векторах *A* і *B*, які знаходяться на позиції маркерного розряду d_M в векторі *D*.
4. Визначити парність (чи непарність) позиції маркерного розряду d_M у векторі *D*. Позначимо $P(d_M) = 1$ – факт парності d_m, $N(d_M) = \mathbf{1}$ – факт непарності d_m. Очевидно, що $P(d_M)$ та $N(d_M)$ можуть бути тільки взаємно інверсними.
5. На основі значень a'_M, b'_M, $P(d_M)$, $N(d_M)$ відповідно до таблиці сформувати результат порівняння чисел *A* і *B*. Алгоритм закінчено.

a'_M	b'_M	$P(d_M)$	$N(d_M)$	Співвідношення між операндами
1	0	1	0	$A>B$
0	1	0	1	$A>B$
1	0	0	1	$A<B$
0	1	1	0	$A<B$
0	0	0	0	$A=B$

Зауважимо, що у вхідній частині таблиці наведені тільки правильні можливі значення a'_M, b'_M, $P(d_M)$ та $N(d_M)$. Інші їх комбінації за правильного виконання попереднього алгоритма неможливі, або ж вказують на неправильне виконання якихось кроків алгоритма.

Приклад 1.

Нехай A=01110010 (це 46_{10}) і B=10001010 (це -138_{10}). Тоді значення векторів C, D і окремих змінних після кожного кроку виконання алгоритму можна показати наступною діаграмою станів.

A=01110010, B=10001010

1-й крок C=11111000

2-й крок D=10000000

3-й крок $\begin{cases} a_M = 0 \\ b_M = 1 \end{cases}$

4-й крок $\begin{cases} P(d_M) = 0 \\ N(d_M) = 1 \end{cases}$

5-й крок $A>B$

Приклад 2.

A=11101100 (це -102_{10}), B=11100111 (це -77_{10}). Для цього випадку діаграма станів має вигляд:

A=11101100, B=11100111

1-й крок C=00001011

2-й крок D=00001000

3-й крок $\begin{cases} a_M = 1 \\ b_M = 0 \end{cases}$

4-й крок $\begin{cases} P(d_M) = 0 \\ N(d_M) = 1 \end{cases}$

5-й крок $A<B$

На рис 1. показана структурна схема апаратної реалізації вищеприведеного алгоритма.

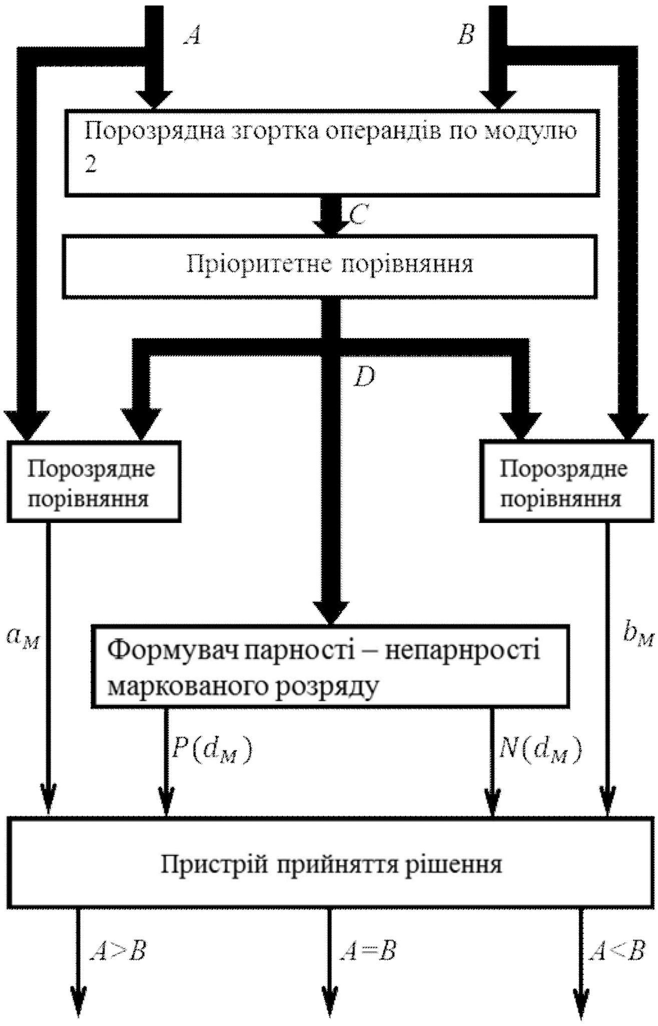

Рис.1. Пристрій для порівняння двох операндів.

Аналіз структури на рис.1 показує, що всі структурні елементи, які використані для встановлення співвідношень порівняння операндів у негапозиційному численні, можуть бути реалізовані комбінаційними схемами, що функціонують у двозначному структурному алфавіті. Очевидно також, що всі вони можуть бути відтворені на базі стандартних логічних ресурсів сучасних програмовних логічних інтегральних середовищ (ПЛІС). Отже, реалізація порівняння операндів в негапозиційному численні є принципово можливою і здійсненною без переводу операндів до позиційної системи числення. Стосовно структури на рис.1 слід зауважити, що оптимізація апаратних засобів, використовуваних на деяких кроках алгоритма, наприклад, заміна комбінаційного формувача парності на лічильники, може породити нові ефективніші реалізації.

1. Корнійчук В.І., Тарасенко В.П., Тарасенко-Клятченко О.В. Основи комп'ютерної арифметики/ В.І. Корнійчук, В.П.Тарасенко, О.В.Тарасенко-Клятченко, -К.: «Корнійчук», -2014. -с.44-49.
2. Король І.Ю., Тарасенко В.П. До питання про виконання арифметичних операцій в мінус-двійковій системі числення, «Проблеми автоматизації управління»/ І.Ю. Король, В.П.Тарасенко, -К.: вид-во НАУ, -2008, -с.195-206.
3. Петришин М.Л. Переваги перетворення форми інформації в негапозиційних системах числення. Матеріали 5-ї МНТК ''Інформаційні технології'' та комп'ютерна інженерія в Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, 2008, с.110-111.
4. Карцев М.А. Арифметика цифровых машин. М:, «Наука», 1969, 576 с.