

УДК 539.3

Делявський В.М., Грінченко Л.Г.
Луцький національний технічний університет

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРЯМОКУТНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛИТИ СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ ПІД ЗОСЕРЕДЖЕНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Делявський В.М., Грінченко Л.Г. Напружено-деформований стан прямокутної ізотропної плити середньої товщини під зосередженим навантаженням. Плити є основним конструкційним елементом проїжджої частини мостів. Для довільного навантаження напружено-деформований стан плити при конкретних граничних умовах можна визначити досить просто, якщо для такої плити відомо фундаментальний розв'язок, який описує залежність прогину плити від положення зосередженої сили, прикладеної в її довільній точці.

Ключові слова: ізотропна плита, навантаження.

Делявский В.Н., Гринченко Л.Г. Напряженно-деформированное состояние прямоугольной изотропной плиты средней толщины под сосредоточенной нагрузкой. Плиты являются основным конструкционным элементом проезжей части мостов. Для произвольной нагрузки напряженно деформированного состояния плиты при конкретных предельных условиях можно определить достаточно просто, если для такой плиты известно фундаментальное решение, которое описывает зависимость прогиба плиты от положения сосредоточенной силы, прилагаемой в ее довильный точке.

Ключевые слова: изотропная плита, нагрузка.

Delyavskiy V., Grinchenko L. Tensely deformed the state of rectangular isotropic flag of middle thickness under a point load. Flags are the basic construction element of trafficway of bridges. For the arbitrary loading tensely deformed the state of flag at concrete maximum terms it is possible to define sufficiently simple, if for such flag a fundamental decision, which describes dependence of bending of flag on position of the concentrated force, enclosed in its to the dlvil'niy point, is known.

Keywords: izotropic flag, loading.

В даній статті, в рамках моделі плити середньої товщини, запропонованої І.О.Прусосим

[1] методом рядів побудовано фундаментальний розв'язок для прямокутної ізотропної плити середньої товщини вільноопертої на всіх краях.

Математична модель плити.

Згідно моделі І.О.Прусоса [1] складові вектора переміщень $\{u_1, u_2\}$ визначаються через три невідомі функції w, F, Φ

$$\begin{aligned} u_1 &= - \left[x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \lambda_0(x_3) \frac{\partial F}{\partial x_1} \right] + \lambda_1(x_3) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\ u_2 &= - \left[x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} + \lambda_0(x_3) \frac{\partial F}{\partial x_2} \right] - \lambda_1(x_3) \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (1)$$

де F і Φ довільні функції змінних x_1, x_2 ; а λ_0, λ_1 є непарні функції змінної x_3 , що задовольняють умовам $\lambda_j^{(0)}(0) = 0$; $\lambda_j'(h) = \lambda_j'(-h) = 0$ ($j = 0, 1$) і забезпечують умови рівності нулю дотичних напружень $\sigma_{\alpha 3}$, $\alpha = 1, 2$ на поверхнях плити. Приймається, що прогин плити w не змінюється по товщині

$$w(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2). \quad (2)$$

Функція $\Phi(x_1, x_2)$ є розв'язком рівняння Гельмгольца

а $N(x_1, x_2)$ є оператор Гельмгольц

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - K^2 \right) \Phi = 0 \quad (3)$$

де

$$K^2 = \frac{4G\lambda_1(h)}{D(1-\nu)k_1}, \quad (4)$$

Тут G - зсуву, D – циліндрична жорсткість плити, ν - коефіцієнт Пуассона; k_1 є моментом функції $\lambda_1(x_3)$, а $\lambda_1(h)$ її значення на поверхнях плити.

Функція F зв'язана з узагальненим прогином \bar{w} залежністю

$$F = \varepsilon^2 \nabla^2 \bar{w}, \quad (5)$$

де

$$\varepsilon^2 = \frac{D}{2G\lambda_0(h)}. \quad (6)$$

Функція \bar{w} є розв'язком неоднорідного бігармонійного рівняння

$$L\bar{w} = q/D, \quad (7)$$

де $L(x_1, x_2)$ бігармонійний оператор

$$L(x_1, x_2) = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}; \quad (8)$$

$q(x_1, x_2)$ поперечне навантаження, прикладене до верхньої поверхні плити;

Розв'язок системи диференціальних рівнянь рівноваги

Систему диференціальних рівнянь (3),(7) розв'язуємо методом розділення змінних.

Згідно праці [2] виберемо функцію Гельмгольца $\Phi(x_1, x_2)$ як непарну функцію змінних x_1, x_2 .

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \phi_k^{[1]}(x_1) \sin \delta_k^{*[2]} x_2 + \phi_k^{[2]}(x_2) \sin \delta_k^{*[1]} x_1 \} \quad (9)$$

Тут

$$\delta_k^{*[j]} = \frac{(2k-1)\pi}{2a_j}, \quad j = \overline{1,2} \quad (10)$$

де a_j ($j=1,2$) - розміри плити в плані; $\phi_k^{[j]}(x_j)$ невідомі функції змінних x_j . Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (7) вибираємо у вигляді суми двох парних функцій:

$$\bar{w} = w_o + w_*, \quad (11)$$

загального розв'язку w_o однорідного рівняння

$$L\bar{w} = 0 \quad (12)$$

і часткового розв'язку w_* неоднорідного рівняння (7)

Загальний розв'язок однорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$w_* = \sum_{k=1}^{\infty} \{ f_k^{[1]}(x_1) \cos \delta_k^{*[2]} x_2 + f_k^{[2]}(x_2) \cos \delta_k^{*[1]} x_1 \}. \quad (13)$$

Тут $f_k^{[j]}(x_j)$ і $\phi_k^{[j]}(x_j)$ невідомі функції змінних x_j , які задовольняють диференціальним рівнянням

$$f_k^{[j]^{(n)}}(x_j) - 2\delta_k^{*[3-j]^2} f_k^{[j]}(x_j) + \delta_k^{*[3-j]^4} f_k^{[j]}(x_j) = 0, \quad (14)$$

$$\phi_k^{[j]}(x_j) - (K^2 + \delta_k^{*[3-j]^2}) \phi_k^{[j]}(x_j) = 0, \quad (15)$$

Розв'язок тих рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} f_k^{[j]}(x_j) &= R_{1(k)}^{[j]*} ch \delta_k^{*[3-j]} x_j + R_{2(k)}^{[j]*} x_j sh \delta_k^{*[3-j]} x_j, \\ \phi_k^{[j]}(x_j) &= R_{3(k)}^{[j]*} sh \gamma_k^{*[3-j]} x_j, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\gamma_k^{*[j]} = \sqrt{K^2 + \delta_k^{*[3-j]^2}}.$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння (7) визначаємо методом рядів Фур'є. Для цього навантаження $q(x_1, x_2)$ розкладаємо в ряд Фур'є (по синусах)

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2, \quad (17)$$

де

$$q_{mn} = \frac{4}{a_1 a_2} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} q(x_1, x_2) \sin \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 dx_1 dx_2 \quad (18)$$

коефіцієнти ряду Фур'є.

Щоб задовольнити бігармонічне рівняння, частковий розв'язок записуємо у вигляді

$$w_* = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{(\delta_m^{[1]2} + \delta_n^{[2]2})^2} \sin \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2. \quad (19)$$

Обчислити коефіцієнти q_{mn} для зосередженої сили. Для цього зосереджену силу P замінюємо навантаженням $q(x_1, x_2)$ рівномірно розподіленим на нескінченно малому квадратному елементі з розмірами $\delta \times \delta$

$$q(x_1, x_2) = \frac{P}{\delta^2}. \quad (20)$$

Навантаження $q(x_1, x_2)$ рівне нулю всюди крім елемента обмеженого прямими: $\{x_1 = \xi_1, x_1 = \xi_1 + \delta, x_2 = \xi_2, x_2 = \xi_2 + \delta\}$, показаними на рисунку 1.

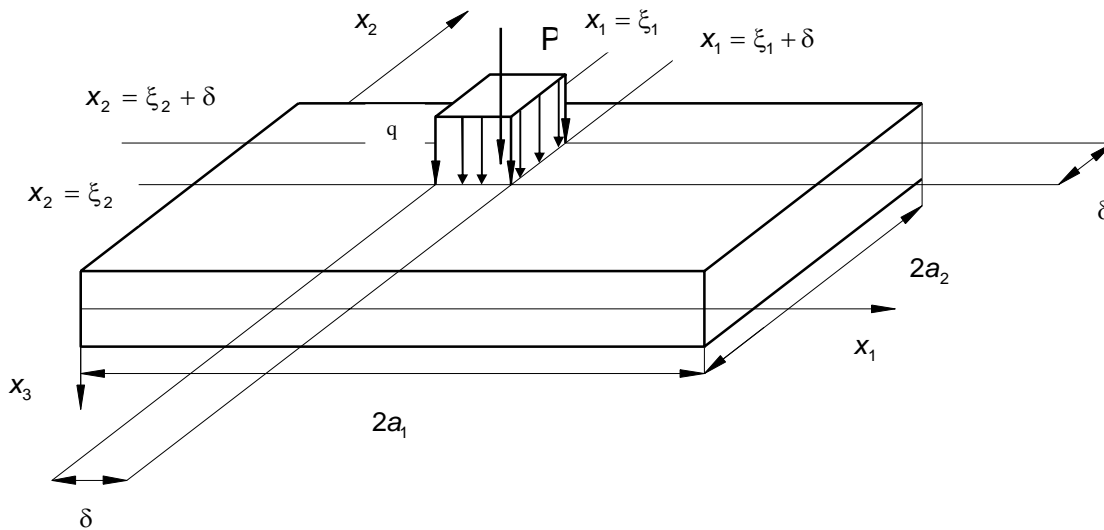


Рис. 1. Схема навантаження плити зосередженою силою.

Коефіцієнти q_{mn} виражаються так:

$$\begin{aligned} q_{mn} &= \frac{4}{a_1 a_2} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \frac{P}{\delta^2} \sin \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{4P}{\delta^2 a_1 a_2} \int_{\xi_1}^{\xi_1 + \delta} \int_{\xi_2}^{\xi_2 + \delta} \frac{P}{\delta^2} \sin \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 dx_1 dx_2 = \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{4P}{\delta^2 a_1 a_2} [\cos \delta_m^{[1]}(\xi_1 + \delta) - \cos \delta_m^{[1]} \xi_1] [\cos \delta_n^{[2]}(\xi_2 + \delta) - \cos \delta_n^{[2]} \xi_2].$$

враховуючи, що

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \cos\left[\delta_m^{[1]}\left(\xi_1 + \delta\right)\right] - \cos\left[\delta_m^{[1]}\xi_1\right] &= -2 \sin\left[\delta_m^{[1]}\left(\xi_1 + \frac{\delta}{2}\right)\right] \sin\left[\delta_m^{[1]}\frac{\delta}{2}\right], \\ \cos\left[\delta_n^{[2]}\left(\xi_2 + \delta\right)\right] - \cos\left[\delta_n^{[2]}\xi_2\right] &= -2 \sin\left[\delta_n^{[2]}\left(\xi_2 + \frac{\delta}{2}\right)\right] \sin\left[\delta_n^{[2]}\frac{\delta}{2}\right], \\ q_{mn} &= \frac{4P}{a_1 a_2 \delta_m^{[1]} \delta_n^{[2]} \varepsilon^2} 4 \sin\left[\delta_m^{[1]}\left(\xi_1 + \frac{\delta}{2}\right)\right] \sin\left[\delta_m^{[1]}\frac{\delta}{2}\right] \sin\left[\delta_n^{[2]}\left(\xi_2 + \frac{\delta}{2}\right)\right] \sin\left[\delta_n^{[2]}\frac{\delta}{2}\right]. \end{aligned} \quad (22)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ отримуємо:

$$\sin\left(\delta_m^{[1]}\frac{\delta}{2}\right) \approx \delta_m^{[1]}\frac{\delta}{2}; \quad \sin\left(\delta_n^{[2]}\frac{\delta}{2}\right) \approx \delta_n^{[2]}\frac{\delta}{2}.$$

Остаточно коефіцієнти q_{mn} набувають вигляду:

$$q_{mn} = \frac{4P}{a_1 a_2} \sin(\delta_m^{[1]}\xi_1) \sin(\delta_n^{[2]}\xi_2). \quad (23)$$

Дане співвідношення отримано в системі координат з початком в лівому нижньому куті плити. Частковий розв'язок w_* записаний в системі координат з початком в центрі плити описується виразом

$$w_* = \frac{4P}{a_1 a_2} \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\delta_m^{[1]}\xi_1) \sin(\delta_n^{[2]}\xi_2)}{\left(\delta_m^{[1]2} + \delta_n^{[2]2}\right)^2} \sin \delta_m^{[1]}(x_1 + a_1) \sin \delta_n^{[2]}(x_2 + a_2). \quad (24)$$

Для ілюстрації запропонованого методу виконано розрахунок плити з такими даними: товщина плити є стала і рівна $2h=0,7$ м. Інші дані:

$$E = 2,07 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3, \quad q_{11} = 0,4 \text{ МПа}.$$

Прийнято, що зосереджена сила діє P діє в середині плити і виносить $P=400$ кН.

На рисунках (2) – (3) показано зміну прогину w і згинного моменту в перерізі $x_2 = 0$ для плити сталої ширини $2a_1 = 3$ м і різних довжин

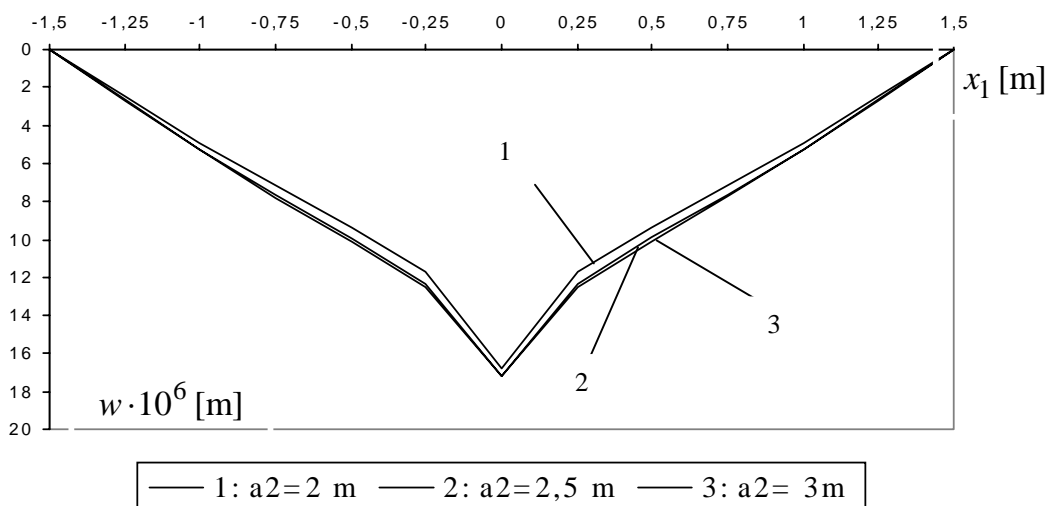


Рис. 2. Прогин w в перетині $x_2 = 0$ при постійній ширині $2a_1 = 3$ м і різній довжині $2a_2$.

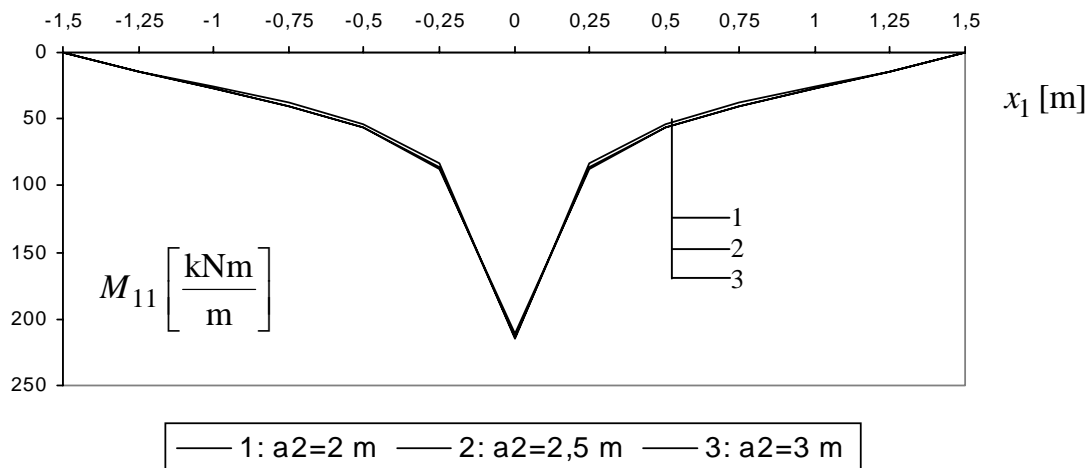


Рис. 3. Графіки згинного моменту M_{11} в перерізі $x_2 = 0$ для сталюї ширини $2a_1 = 3\text{ m}$ і різних довжин $2a_2$.

Як видно з рисунків (2) і (3) прогин w і згинний момент M_{11} рівні нулю на краях плити, в силу задоволення граничних умов. В центрі плити ті величини досягають максимальних значень і зростають з ростом довжини плити. В точці прикладання зосередженої сили всі статичні і геометричні величини отримують нескінченно великі значення. То зв'язано з тим, що чим більше вибираємо розкладів m і n ряду Фур'є тим отримуємо точніший закон розкладеного навантаження q . В нашому випадку навантаження q є зосереджена сила розкладена на нескінченно малому елементі, що очевидно відповідає нескінченно великим числовим значенням. В дійсності не існує ідеально зосереджених сил або навантаження розподіленого на нескінченно малому елементі. Тому результати в точці прикладання зосередженої сили не можна трактувати як реальні і їх слід відкинути.

На рисунках (4) – (5) подано зміну переміщення u_1 по товщині плити в середині сторони a_2 для різних відношень $\frac{2h}{2a_1}$. На рисунку (4) бачимо зміну переміщення u_1 по товщині плити для відношення $2h/2a_1 = 0,166$, що відповідає тонкій плиті, в той час як рисунок (5) представляє плити середньої товщини.

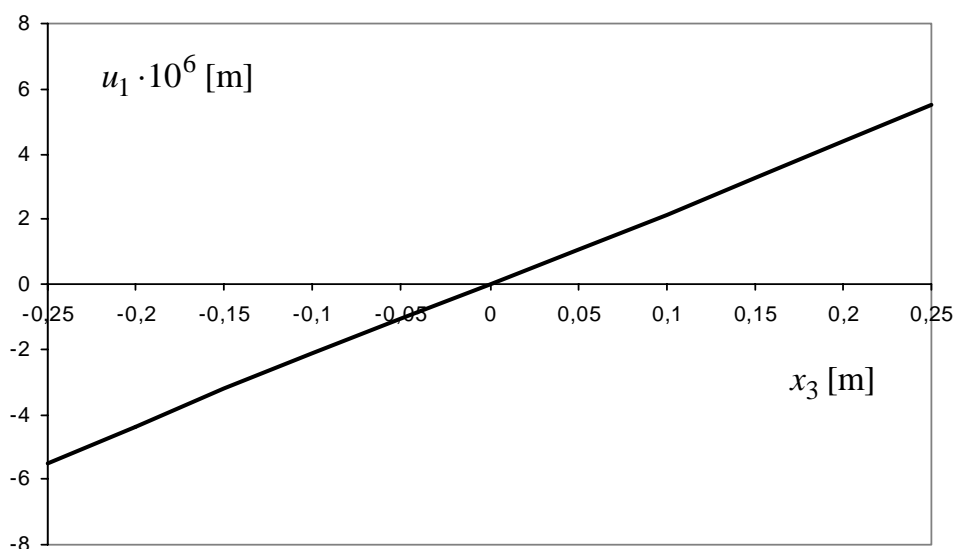


Рис. 4. Зміна переміщення u_1 по товщині для відношення $2h/2a_1 = 0,166$.

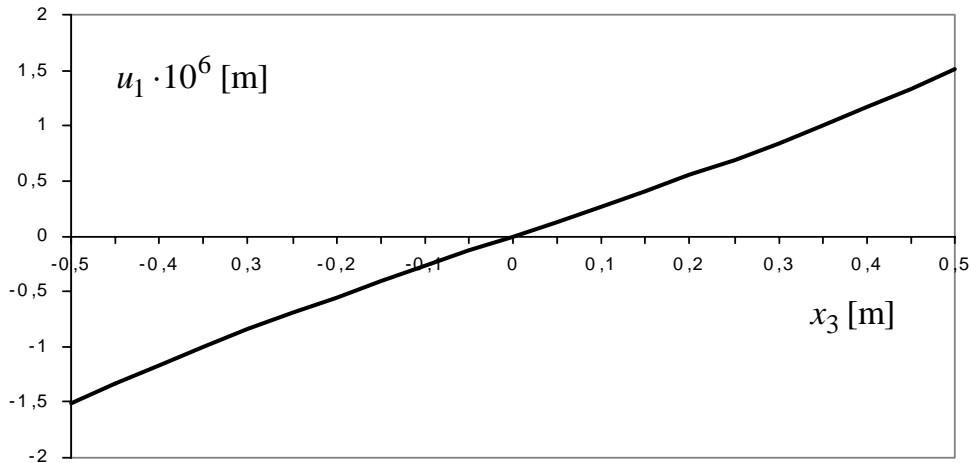


Рис. 5. Зміна переміщення u_1 по товщині для відношення $2h/2a_1 = 0,333$.

Summary. The solution of problem about of the state of stresses and strains in rectangular isotropic moderate thickness plate acted by the concentrated force applied in its arbitrary point has been obtained. The problem was solved in the frames of the plate theory suggested by I. Prusov with help of separating variables method using the Fourier's series method. As a example the rectangular plate free supported at all edges was considered. The boundary conditions was satisfied by means of collocation method.

1. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит.-Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975.- 256 с.
2. Delyavskyy M., Gołaś J., Podhorecka A.: O pewnym podejściu do rozwiązywania płyt wielowarstwowych, XLV Konf. Nauk. Krynica 99, s.63-70.
3. Делявский М.В. Расчет напряженного состояния в толстой ортотропной плите под действием изгибающей нагрузки // Пробл. прочности .- № 11-12.- С. 117-123.
4. Kączkowski Z. Płyty. Obliczenia statyczne.- Warszawa: Arkady, 1980.-
5. Nowacki W.: Dźwigary powierzchniowe, Warszawa, PWN, 1980.-
6. Подгорный А.Н. Марченко Г.А., Пустынников В.И. Основы и методы прикладной теории упругости- Киев: Вища школа, 1981.-328с.