

УДК 004.9

Луцький національний технічний університет  
асистент О.К.Жигаревич

## МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

**Жигаревич О.К. Метод аналізу ієрархій.** Метою даної статті є дослідження методу аналізу ієрархій, який дозволяє вирішувати складні проблеми прийняття рішення. Досліджуються, та описуються переваги та недоліки методу прийняття рішень.

Ключові слова: MAI, ранжування, модель, ієрархія, рейтингування, кластер, система, вершина, шкала.

**Жигаревич О.К. Метод анализа иерархий.** Целью данной статьи является исследование метода анализа иерархий, который позволяет разрешать сложные проблемы принятия решения. Исследуются и описываются преимущества и недостатки метода принятия решений.

Ключевые слова: MAI, ранжировка, модель, иерархия, рейтингування, кластер, система, вершина, шкала.

**Zhyharevych O.K. Method of analysis of hierarchies.** The purpose of this paper is to study the analytic hierarchy that best allows us to solve complex problems of decision making. We investigate and describe the advantages and disadvantages of decision making.

Keywords: MAI, ranking model, hierarchy, ranking, cluster, system, top, scale.

**Постановка проблеми.** Метод аналізу ієрархій був розроблений Томасом Л. Сааті в 1970 році і є систематичною процедурою для ієрархічного подання елементів, що визначають суть будь-якої проблеми. [2]

Завдання, для вирішення яких може бути застосований MAI:

- проблема багатокритеріального вибору. Вибір однієї альтернативи з наявного набору альтернатив на основі деяких критеріїв;
- ранжування. Багатокритеріальне упорядкування заданої множини альтернатив;
- визначення пріоритетів альтернатив та критеріїв в задачах багатокритеріального вибору;
- розподіл ресурсів. Розподіл ресурсів між альтернативами з заданої множини;
- порівняльний аналіз;
- розробка рекомендацій по оптимізації внутрішніх процесів організації на основі успішного досвіду конкурентів;
- управління якістю. Аналіз різних аспектів якості та шляхи покращення якості.

У відповідності з формулюванням завдання прийняття рішення структура моделі прийняття рішення в методі аналізу ієрархій представляє собою схему (граф), яка включає:

- набір альтернативних рішень;
- головний критерій рейтингування рішень;
- набір груп однотипних факторів, що впливають на рейтинг;
- множину зв'язків, що вказують на вплив рішень, критеріїв та факторів один на одного.

Структура моделі відображає результат аналізу ситуації ухвалення рішення.

Перша група понять пов'язана з описом можливих структур моделей прийняття рішення.

Для обчислення пріоритетів альтернативних рішень до структури необхідно додати інформацію про силу впливів рішень, критерію та факторів один на одного.

Після того як сформована структура і зібрані всі дані, модель прийняття рішення готова, тобто в ній можуть бути отримані рейтинги пріоритетів рішень і чинників. Знання пріоритетів використовується для підтримки прийняття рішення.

Третя група понять пов'язана з описом результатів, одержуваних в моделях прийняття рішення.

Четверта група понять пов'язана з поясненням того, як організовані обчислення. Знання цих понять необхідно лише для розуміння математичних обґрунтувань методу. Для застосування методу знання цих понять необов'язково.

**Аналіз останніх досліджень.** Основні поняття методу аналізу ієрархій

Нижче наведені структури, що використовуються у МАІ [4]:

- вузол;
- рівень;
- вершина;
- зв'язок;
- кластер;
- система;
- ієрархія;
- система з зворотними зв'язками.

Вузол – загальна назва для всіх можливих рішень (альтернатив), головного критерію (головної мети) рейтингування рішень, всіх факторів, від яких, так чи інакше, залежить рейтинг. Назва вузла збігається з назвою відповідного рішення, критерію або фактора. Зауважимо, що з математичної точки зору схема ситуації прийняття рішення (структура моделі), яка будується в методі аналізу ієрархій, є графом. Таким чином, поняття «вузол» цілком виправдано. Ясно також, що рішення, критерій і фактори є «вузлами» проблеми прийняття рішення.

Рівень - група всіх однотипних (рівноправних, однорідних, гомогенних і т.п.) вузлів. Назва рівня відображає призначення, функцію групи вузлів в ситуації прийняття рішення. Кожен вузол визначається не тільки своєю назвою, а й назвою рівня, якого він належить. Ясно, що окремі рівні утворюють альтернативні рішення (вузли цього рівня однотипні в тому сенсі, що вони є рішеннями; інші вузли такими не є). Головний критерій рейтингування, як правило, один - це окремі рівні. На рейтинг впливають декілька груп чинників - це також рівні.

Вершина – вузол, відповідний головному критерію (головної мети) відбору альтернатив.

Зв'язок – вказівка на наявність впливу одного вузла (домінуючого) на інший (підлеглий). На схемі зв'язок зображується стрілкою. Напрямок зв'язку (і відповідної стрілки) збігається з напрямком впливу. З точки зору теорії графів зв'язок - дуга орієнтованого графа. Зв'язок від вузла-фактора до вузла-рішення означає, що перевага (важливість, оптимальність) рішення оцінюється з точки зору впливу цього чинника. Зв'язок від вершини до вузла-фактору означає, що важливість урахування фактора оцінюється з точки зору головного критерію рейтингування альтернатив. Зв'язок від вузла-фактора до вузла-фактору означає, що важливість врахування другого чинника розглядається з точки зору першого фактору.

Кластер – група вузлів одного рівня, підлеглих деякого вузла іншого рівня-вершині кластеру (домінуючого вузла). Кластери утворюються при розстановці зв'язків між вузлами, тобто при розстановці зв'язків відбувається формування кластерної структури. Важливість вузлів кластеру один щодо одного оцінюється у відповідність з тим, який вузол є вершиною кластеру. Кластер визначається: а) своєю вершиною, б) назвою рівня, в) списком вузлів. [5]

Система (структура моделі, схема ситуації прийняття рішення) - сукупність всіх вузлів, згрупованих за рівнями, і всіх зв'язків між вузлами. З математичної точки зору системи, якими доводиться оперувати в методі аналізу ієрархій, є - орієнтованими графами (мережами). Зв'язки утворюють шляхи, що ведуть від одних вузлів до інших. Всі шляхи так чи інакше є частинами основних шляхів, що ведуть від головного критерію рейтингування через фактори до альтернатив, тобто основні шляхи, по суті, є логічними ланцюжками, що ведуть до вибору однієї з альтернатив. Ця система є ієрархічною (але не є суворою ієрархією).

Водночас зауважимо, що навіть для простих завдань структури моделей, які будуються за допомогою методу аналізу ієрархій, представляють собою досить складні схеми. Однак це свідчить лише про те, що метод дозволяє розкрити реальну складність завдань, які людині доводиться вирішувати в думках. Назва системи відображає її призначення, приналежність до сфери діяльності, в якій приймається рішення.

Ієрархія – система, в якій рівні розташовані та пронумеровані так, що: нижній рівень містить рейтинговані альтернативи, вузли рівнів з великими номерами можуть домінувати тільки над вузлами рівнів з меншими номерами. Таким чином, в ієрархії зв'язку визначають шляхи однієї спрямованості - від вершини до альтернатив через проміжні рівні, які складаються з вузлів-факторів. Система являє собою строгу ієрархію, якщо допустимі зв'язки тільки між сусідніми рівнями від верхнього рівня до нижнього.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Система з зворотними зв'язками. Система має зворотні зв'язки, якщо при будь-якому способі нумерації рівнів в системі є вузли, які домінують і над вузлами рівнів з великими номерами, і над вузлами рівнів з меншими номерами. Тобто система має

зворотні зв'язки, якщо ні за яких перестановок рівнів вона не зводиться до ієрархії. Крім того, зрозуміти відмінності в структурі ієрархії і системи з зворотними зв'язками можна, розглядаючи шляхи, утворені зв'язками. Якщо в системі немає жодного такого рівня, що по шляхах, які починаються у вузлах цього рівня, можна потрапити у вузли того ж рівня, то система є ієрархією. Отже, в ієрархії будь-який шлях може перетинатися з кожним рівнем лише одного разу.

Формування структури без зворотних зв'язків (ієрархії) і формування структури з зворотними зв'язками здійснюється за певними правилами.

Під час використання МАІ виконуються розрахунки, що оперують наступними даними:

- пріоритет вузла в кластері;
- шкала порівнянь;
- матриця порівнянь;
- індекс узгодженості;
- відносна узгодженість матриці порівнянь.

Пріоритет вузла в кластері – додатне число, що служить для кількісного вираження важливості (ваги, значущості і т.п.) даного вузла в кластері щодо інших вузлів кластеру у відповідності до критерію, що відноситься до вершини кластеру. Сума всіх пріоритетів вузлів кластеру дорівнює одиниці. Тому часто пріоритети можна трактувати як ймовірності, частки загального ресурсу тощо в залежності від розглянутого випадку. Часто важко безпосередньо визначити набір пріоритетів (вектор пріоритетів) вузлів кластеру. Тоді використовується процедура парних порівнянь і метод власного вектору.

Парні порівняння вузлів кластеру – це оцінки (якісні або кількісні) відношення пріоритету одного вузла до пріоритету іншого, тобто результати парних порівнянь – це оцінки важливості (переваги, ймовірності і т.п.) кожного вузла кластеру щодо кожного з інших за критерієм, застосованим до вершини кластеру. Результат парного порівняння – оцінка відношень «ваг» порівнюваних об'єктів («ваги» об'єктів чисельно виражають їх переваги, оптимальність, значимість і т.п.). Мета парних порівнянь полягає у визначенні пріоритетів вузлів кластеру. Для того, щоб уточнити, в якому сенсі назва вершини кластеру є критерієм для проведення порівнянь використовується формулювання критерію для парних порівнянь. Для проведення парних порівнянь задаються параметри, як шкала порівнянь і спосіб порівнянь. При проведенні парного порівняння об'єктів досить встановити тільки один із результатів.[6]

Шкала порівнянь – це впорядкований набір градацій (термінів, чисел і т.п.) для вираження результатів парних порівнянь. Шкала порівнянь дозволяє висловлювати оцінки значень пріоритетів вузлів, тому її поділки - безрозмірні величини. Шкали, що використовуються в методі аналізу ієрархій, є шкалами відношень. Тобто якщо результату порівняння пари об'єктів ставиться у відповідність значення на шкалі, то число – оцінка відношення «терезів» об'єктів («ваги» об'єктів чисельно виражають їх перевага, оптимальність, значимість і т.п.).

Шкала є кількісною, якщо результати парних порівнянь виражаються безпосередньо за допомогою чисел.

Шкала є якісною, якщо результати парних порівнянь виражаються за допомогою градацій-уподобань.

Спосіб порівнянь визначається набором парних порівнянь, необхідних для визначення пріоритетів вузлів кластеру. При порівняннях з еталоном вибирається один з вузлів кластеру, з яким порівнюються всі інші. А при проведенні класичних порівнянь (за Сааті [2]) кожен вузол кластера порівнюється з усіма іншими вузлами кластеру (рис.1).

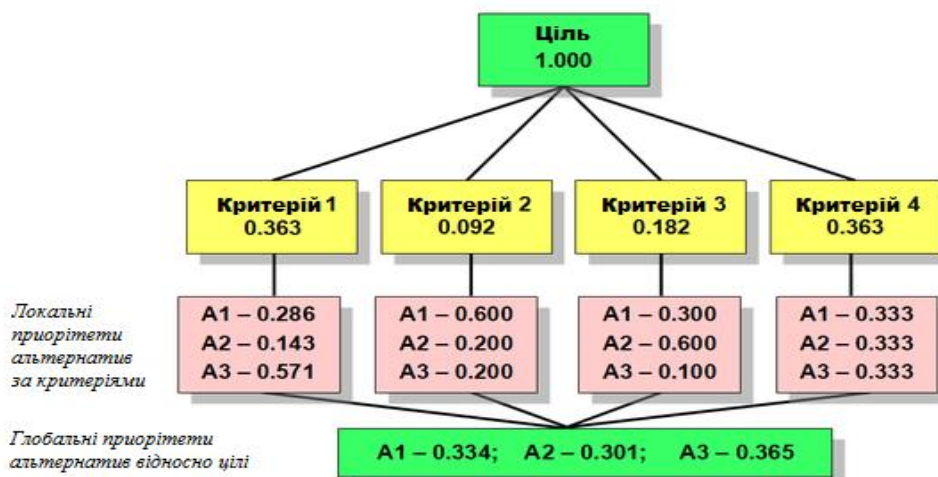


Рис.1. Розрахунок пріоритетів для критеріїв та альтернатив

Порівняння кластерів – процедура оцінки важливості (пріоритетності, сили підпорядкування) кластерів, які мають спільну вершину. Кластери порівнюються один з одним за критерієм, що задається назвою їх вершин. Для проведення порівнянь використовується та ж методика, що і для порівнянь вузлів в кластері. Фактично при порівнянні кластерів, підпорядкованих одному вузлу, проводиться рейтингування рівнів за критерієм, який притаманний цьому вузлу.

Матриця порівнянь – це таблиця числових значень парних порівнянь (для вузлів кластеру або для кластерів, які мають спільну вершину).

Індекс узгодженості – це кількісна оцінка суперечливості результатів порівнянь (для системи в цілому, для вузлів одного кластеру або для кластерів, які мають спільну вершину). Слід мати на увазі, що між достовірністю і несуперечністю порівнянь немає явного зв'язку. Суперечності в порівняннях виникають через суб'єктивні помилки експертів. Індекс узгодженості не залежить від шкал порівнянь, але залежить від кількості парних порівнянь. Індекс узгодженості – позитивне число. Чим менше протиріч у порівняннях, тим менше значення індексу узгодженості. При використанні способу порівнянь з еталоном значення індексу узгодженості дорівнює нулю.

Достовірність результату порівняння – кількісна оцінка, що характеризує ступінь неточності (розмитості) результату порівняння, пов'язана з компетентністю експерта, рівнем довіри до даних і т.п. Достовірність порівняння виражається часткою одиниці (або у відсотках). Нулю відповідають абсолютно недостовірні порівняння, одиниці (або 100%) – абсолютно достовірні порівняння. На основі значень достовірності порівнянь для кластерів, які мають спільну вершину, і значень достовірності парних порівнянь у кластерах визначається достовірність даних у масштабах всієї системи.

Відносна узгодженість матриці порівнянь – відношення індексу узгодженості до середньостатистичного значення індексу узгодженості при випадковому виборі коефіцієнтів матриці порівнянь. Відносна узгодженість для системи в цілому характеризує зважене середнє значення відносної узгодженості по всіх матрицях порівнянь. Дані можна вважати практично несуперечливими (досить узгодженими), якщо значення відносної узгодженості менше ніж 0,1. Цей висновок справедливий як для даних кластеру, так і для даних у масштабі всієї системи.[7]

#### Переваги та недоліки методу аналізу ієрархій

У рамках методу аналізу ієрархій немає спільних правил для формування структури моделі ухвалення рішення. Це є відображенням реальної ситуації прийняття рішення, оскільки завжди для однієї і тієї ж проблеми є цілий спектр думок. Метод дозволяє врахувати цю обставину за допомогою побудови додаткової моделі для узгодження різних думок, за допомогою визначення їх пріоритетів. Таким чином, метод дозволяє враховувати «людський фактор» при підготовці прийняття рішення. Це одна з важливих переваг даного методу перед іншими методами ухвалення рішень.

Формування структури моделі прийняття рішення в методі аналізу ієрархій досить трудомісткий процес. Проте у результаті вдається отримати детальне уявлення про те, як саме взаємодіють фактори, що впливають на пріоритети альтернативних рішень, і самі рішення. Як саме формуються рейтинги можливих рішень і рейтинги, що відображають важливість факторів.

Процедури розрахунків рейтингів у методі аналізу ієрархій достатньо прості (він не схожий на «чорний ящик»), що вигідно відрізняє даний метод від інших методів прийняття рішень.

Збір даних для підтримки прийняття рішення здійснюється головним чином за допомогою процедури парних порівнянь. Результати парних порівнянь можуть бути суперечливими. (Метод надає великі можливості для виявлення суперечностей в даних). При цьому виникає необхідність перегляду даних для мінімізації суперечностей. Процедура парних порівнянь і процес перегляду результатів порівнянь для мінімізації суперечностей часто є трудомісткими. Проте у результаті особа, яка приймає рішення, набуває впевненості, що використання даних є цілком осмисленим.

У рамках методу аналізу ієрархій немає засобів для перевірки достовірності даних. Це значний недолік, який обмежує можливості застосування методу. Однак метод застосовується головним чином у тих випадках, коли в принципі не може бути об'єктивних даних, а провідними мотивами для прийняття рішення є вподобання людей. При цьому процедура парних порівнянь для збору даних практично не має гідних альтернатив. Якщо збір даних проведено за допомогою досвідчених експертів і в даних немає суттєвих протиріч, то якість таких даних визнається задовільною.

Схема застосування методу абсолютно не залежить від сфери діяльності, в якій приймається рішення. Тому метод є універсальним, його застосування дозволяє організувати систему підтримки прийняття рішень. [8]

Робота з підготовки прийняття рішень часто є занадто трудомісткою для однієї людини. Модель, складена за допомогою методу аналізу ієрархій, завжди має кластерну структуру. Застосування методу дозволяє розбити велику задачу, на ряд малих самостійних завдань. Завдяки цьому для підготовки прийняття рішення можна залучити експертів, які працюють незалежно один від одного над локальними завданнями. Експерти можуть не знати нічого про характер прийнятого рішення, що частково сприяє їх об'єктивності. Зокрема, завдяки цьому вдається зберегти в таємниці інформацію про підготовку рішення.

Метод дає тільки спосіб рейтингування альтернатив, але не має внутрішніх засобів для інтерпретації рейтингів, тобто вважається, що людина, що приймає рішення, знаючи рейтинг можливих рішень, повинна залежно від ситуації сама зробити висновок. Це слід визнати недоліком методу.

Даний метод може служити надбудовою для інших методів, покликаних вирішувати недостатньо формалізовані задачі, де більш адекватно підходять людські досвід та інтуїція, ніж складні математичні розрахунки. Метод дає зручні засоби обліку експертної інформації для вирішення різних завдань.

Метод відображає природний хід людського мислення і дає більш загальний підхід, ніж метод логічних ланцюгів. Він не тільки дає найбільш бажаний спосіб виявлення рішення, але і дозволяє кількісно виразити ступінь переваги за допомогою ранжування. Це сприяє повному і адекватному виявленню переваг особи, яка приймає рішення. Крім того, оцінка суперечливості використаних даних дозволяє встановити ступінь довіри до отриманого результату. [8]

#### **Використання методу аналізу ієрархій**

Сам метод аналізу ієрархій полягає в декомпозиції проблеми на все більш прості складові частини і подальшої обробки послідовності суджень особи, що приймає рішення (ОПР) на основі парних порівнянь. У результаті може бути виражений відносний ступінь (інтенсивності) взаємодії елементів в ієрархії. Ці судження потім виражаються чисельно. МАІ включає процедури синтезу множинних суджень, отримання пріоритетності характеристик і знаходження варіантів рішень. Для оцінок ваги об'єктів в МАІ використовується шкала відносної важливості 1-9, яка, на думку авторів методики, є досить ефективною. Шкала подана у таблиці 1 і визначається такими етапами.

Етап 1. Окреслити проблему і визначити, що необхідно дізнатися.

Етап 2. Побудувати ієрархію, починаючи з вершини (мети – з точки зору управління), через проміжні рівні (характеристики, від яких залежать наступні рівні) до самого нижнього рівня (який зазвичай є переліком альтернатив). Приклад типової діаграми вказаний на рис. 2.

Таблиця 1

#### **Опис шкали інтенсивності елементів ієрархії**

Ступінь важливості	Визначення	Пояснення
1	Однакова значимість	Дві дії вносять однаковий вклад в

		досягнення цілі
3	Деяка перевага значимості однієї дії перед іншою (слабка значимість)	Досвід і розмірковування дають легку перевагу одній дії перед іншою
5	Суттєва чи сильна значимість	Досвід і розмірковування дають сильну перевагу одній дії над іншою
7	Дуже сильна чи очевидна значимість	Перевага однієї дії над іншою дуже сильна.
9	Абсолютна значимість	Свідчення на користь переваги однієї дії над іншою у вищій мірі
2,4,6,8	Проміжні значення	Ситуація для компромісного вирішення
Зворотні величини	Якщо при порівнянні об'єкта і з j відповідає обране число, то об'єкту j при порівнянні з і відповідає зворотнє значення	Обґрунтоване твердження

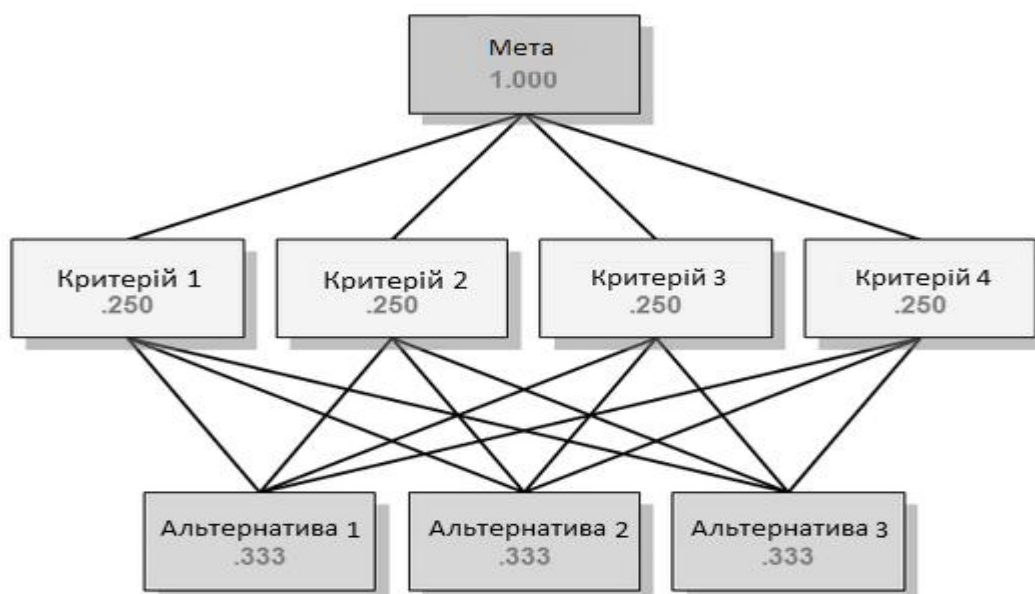


Рис. 2. Ієрархія проблеми

Етап 3. Побудувати множину матриць парних порівнянь для кожного із нижніх рівнів – по одній матриці для кожного залежного елемента верхнього рівня. Цей елемент називають залежним (направляються) по відношенню до елемента, що знаходиться на нижньому рівні, так як елемент нижнього рівня впливає на розташований вище елемент (однак підпорядкований йому по цілі).

Етап 4. Обчислюються компоненти власного вектора як середнє геометричне по рядку матриці порівнянь. Оцінка проводиться як зазначено у формулі 1.1.

$$W_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n P_i} \quad (1.1)$$

Після обчислення, компоненти власного вектора нормалізуються, як вказано у формулі 1.2, що дає вектор пріоритетів або ваг об'єктів.

$$Q(A_n) = W_n / \sum_{i=1}^n W_i \quad (1.2)$$

Етап 5. Після проведення всіх парних порівнянь і отримання даних за власним значенням і власним вектором можна визначити узгодженість. Для цього, використовуючи відхилення максимального власного числа від розмірності матриці, будемо величину, що називається індексом узгодженості,

$$I_Y = (\lambda_{\max} - n) / (n - 1), \quad (1.3)$$

де  $\lambda_{\max} \geq n$

Потім порівнюємо її з відповідним індексом, отриманими для матриці, побудованої випадковим чином, і отримуємо відношення узгодженості ( $U_B$ ).

$$U_B = \frac{I_y}{U_{BP}}. \quad (1.4)$$

Відзначимо, що прийнятним є  $U_B$  не більше 10%. Інакше необхідно зробити переоцінку відповідної матриці. В таблиці 2 приведені середні значення індексу  $U_{BP}$  для випадкових матриць різного порядку.

Таблиця 2  
Випадкові узгодженості для матриць різних порядків

Розмір матриці	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Випадкова узгодженість	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Етап 6. Етап 3, 4 і 5 проводяться для всіх рівнів і груп у ієрархії.

Етап 7. Проводиться обчислення загальної ваги варіантів вирішення шляхом послідовного зважування векторів ваг нижчого рівня (варіантів рішень) компонентами вектора ваг вищого рівня (характеристик).

#### Висновки

Отже, з результатів аналізу та дослідження ієрархії випливає, що метод полягає в декомпозиції проблеми на все більш прості складові частини і подальші обробки послідовності суджень особи, що приймає рішення (ОПР) на основі парних порівнянь. У результаті може бути виражений відносний ступінь (інтенсивності) взаємодії елементів в ієрархії.

#### Список використаних джерел

1. Сафронова В.М. Прогнозирование и моделирование в социальной работе: Учеб. Пособие для студ. высш. учеб. Заведений / Сафронова В.М. — М.: Издательский центр «Академия», 2002. — 6-21 с.
2. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Саати Т.Л. — М.: Радио и связь, 1989. — 316 с.
3. «Интеллектуальные машины» [Электронный ресурс] // Сайт посвященный изобретениям С. Н. Корсакова — URL: <http://www.homeoscope.ru/index.html>
4. Корсаков С.Н. Начертание нового способа исследования при помощи машин, сравнивающих идеи / Корсаков С.Н. [пер. с франц. под ред. А.С. Михайлова] — М.: МИФИ, 2009
5. Луков В.А. Социальное проектирование: учеб. пособие. — 7-е изд. / Луков В.А. — М.: Изд-во Московского гуманитарного университета: Флинта, 2007, - 240 с.
6. Л. Бергер Шкалирование по Лайкерту (Likert Scaling) [Электронный ресурс] / Словари и энциклопедии на Академике. — URL: [http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc\\_psychology/1273/Шкалирование](http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_psychology/1273/Шкалирование) (дата звернення 12.10.2013)
7. Терелянский, П. В. Программные системы поддержки принятия социально-экономических и технических решений (опыт создания и проектирования): монография / П. В. Терелянский // «Аудит и финансы». — 2009. — №3
8. Ларичев О.И., Петровский А.Б. Системы поддержки принятия решений: современное состояние и перспективы развития // Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21, с. 131-164.
9. Джексон П. Введение в экспертные системы / Джексон П. — М.: Вильямс, 2001, - 384 с.