

УДК 534.1

В.М. Тимошук

Луцький національний технічний університет

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КРАТНОЇ СИНХРОНІЗАЦІЇ ВІБРОЗБУДНИКІВ МЕТОДОМ ПРЯМОГО РОЗДІЛЕННЯ РУХІВ

*В.М. Тимошук Розв'язування задач кратної синхронізації віброзбудників методом прямого розділення рухів. Виконано аналітичні дослідження самосинхронізації довільного числа «майже однакових» дебалансних віброзбудників, що розміщені на тримкому тілі з одним «поступальним» ступенем вільності; а також досліджено двократну самосинхронізацію трьох дебалансних віброзбудників, встановлених на пружно-підвішеному тримкому тілі, яке може здійснювати малі плоскі коливання. Отримані достатні умови існування і стійкості синхронних рухів довільного числа дебалансних віброзбудників; умови існування та стійкості кратно-синхронних обертань трьох віброзбудників з урахуванням жорсткості пружної підвіски.*

**Ключові слова:** вібраційна машина, дебалансний віброзбудник, синхронізація, асинхронний електродвигун.

**Форм. 12. Рис. 1. Літ. 7.**

*В.Н. Тимошук Решение задач кратной синхронизации вибровозбудителей методом прямого разделения движений. С помощью метода прямого разделения движений и интегрального критерия устойчивости выполнены теоретические исследования самосинхронизации произвольного числа «почти одинаковых» дебалансных вибровозбудителей; получены достаточные условия существования и устойчивости синхронных движений; более точные выражения для вибрационных моментов и дифференциальные уравнения медленных процессов установления синхронных движений. Показано что при вычислении потенциальных функций нужно учитывать высшие, чем в существующих методиках приближения; установлено, что при решении рассматриваемых задач достаточно первого приближения. Решена практически важная задача о двократной самосинхронизации трех дебалансных вибровозбудителей симметрично расположенных на плоско колеблющемся несущем твердом теле с учетом жесткости его подвески.*

**Ключевые слова:** вибрационная машина, дебалансный вибровозбудитель, синхронизация, асинхронный электродвигатель.

*V.N. Tymoshchuk Solution of problems of multiply self synchronization by method of straight division of motions. Analytical research of self-synchronization of arbitrary number of "almost identical" unbalanced exciters placed on a trembling body with one translational degree of freedom is made, and also the double self-synchronization of three unbalanced vibration exciters installed on elastic-suspended durable body that can make small plane oscillations. Sufficient conditions of existence and stability of synchronous motions of arbitrary number of unbalanced vibration exciters; conditions of existence and stability of multiply-synchronous rotation of three vibration exciters considering stiffness of elastic suspension are obtained.*

**Keywords:** vibration machine, unbalanced vibro-exiter, self-synchronization, asynchronous motor.

**Постановка проблеми.** Для підвищення продуктивності вібраційних машин, а також для створення машин важкого типу з протяжним робочим органом, необхідно розробити засоби, здатні збуджувати інтенсивну вібрацію. Застосування бігармонічних коливань у ряді випадків забезпечує інтенсифікацію виробничих процесів, істотні технологічні, а іноді й конструктивні переваги у порівнянні з використанням гармонічних коливань. У силу цього, актуальним є дослідження можливості самосинхронізації збудників багатівібраторних машин та дослідження можливості кратно-синхронних обертань роторів збудників. У більшості існуючих теоретичних робіт, присвячених кратній самосинхронізації віброзбудників, досліджуються достатньо спрощені динамічні моделі систем; у багатьох з них, наприклад, нехтують навіть жорсткістю пружної підвіски тримкого тіла. У експериментальних роботах наводиться лише факт можливості досягнення кратної самосинхронізації віброзбудників; досліджень стабільності розглядуваних кратно-синхронних режимів немає.

**Аналіз останніх джерел досліджень і публікацій.** Дослідженню вібраційних машин з багатьма віброзбудниками, що самосинхронізуються, присвячені роботи [1,2,3,4,5,]. Показано, що збільшення числа дебалансних віброзбудників (понад два) в одномасних схемах вібраційних машин з плоским рухом тримкого тіла, необов'язково призводить до підвищення інтенсивності вібрації. Навпаки, у багатьох випадках проявляється протилежна тенденція: стійкий синхронний режим руху віброзбудників з таким співвідношенням фаз обертання, за якого зусилля, що розвиваються ними, взаємно компенсуються. Звичайне збільшення числа збудників у «плоскій» схемі вібромашини призводить до того, що інтенсивність вібрації робочого органа зменшується. Для посилення інтенсивності коливань використовуються просторові, багатомасові або резонансні схеми вібромашин, системи примусової синхронізації. В роботі [6] методом прямого розділення рухів розглянуто ідею синхронізації роторів через тимчасове вимкнення з мережі асинхронних електродвигунів більш швидких віброзбудників. Проте, необхідно отримати точні вирази для вібраційних моментів, диференціальні рівняння повільних процесів встановлення синхронних рухів роторів збудників, умови існування та стійкості їх кратно-синхронних обертань.

**Метою роботи** є розв'язання практично важливої задачі про двократну самосинхронізацію трьох дебалансних віброзбудників, симетрично розміщених на пружно підвішеному тримкому тілі з урахуванням жорсткості пружної підвіски. Розглянемо двократну динамічну синхронізацію трьох дебалансних віброзбудників, тобто випадок, коли один збудник обертається з кутовою

швидкістю вдвічі більшою, ніж інші. Нехай дебалансні віброзбудники, симетрично розміщені на тримкому твердому тілі, яке може здійснювати малі плоскопаралельні коливання; площина осей обертання всіх віброзбудників проходить через центр мас тримкого тіла; центральний віброзбудник розміщений в центрі мас тіла (рис. 1). Усі віброзбудники приводяться в рух від незалежних асинхронних електродвигунів, обертаються в однакових напрямках, при цьому синхронна частота обертання двигуна центрального віброзбудника в два рази більша за синхронну частоту крайніх збудників. Тримке тіло зв'язане з нерухомою основою за допомогою пружних елементів.

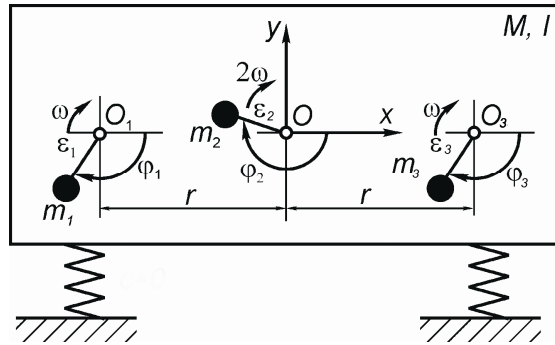


Рис. 1. Вібраційна машина з трьома дебалансними збудниками симетрично розміщені на тримкому тілі [6]

Диференціальні рівняння руху такої коливальної системи з 3+3 ступенями вільності можуть бути подані у вигляді

$$I_i \ddot{\varphi}_i = L_i(\dot{\varphi}_i) - R_i(\dot{\varphi}_i) + \Phi_i(\varphi_i, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, t), \quad (1)$$

$$M\ddot{x} + c_x x = \sum_{i=1}^3 m_i \varepsilon_i (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i),$$

$$M\ddot{y} + c_y y = \sum_{i=1}^3 m_i \varepsilon_i (\ddot{\varphi}_i \cos \varphi_i - \dot{\varphi}_i^2 \sin \varphi_i),$$

$$I \ddot{\varphi} + c_\varphi \varphi = \sum_{i=1}^3 m_i \varepsilon_i r_i (\dot{\varphi}_i^2 \sin(\varphi_i + \delta_i) - \ddot{\varphi}_i \cos(\varphi_i + \delta_i)), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

де  $\Phi_i(\varphi_i, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, t) = m_i \varepsilon_i (\ddot{x} \sin \varphi_i + \ddot{y} \cos \varphi_i - r_i \ddot{\varphi} \cos(\varphi_i + \delta_i) + g \cos \varphi_i)$ ;  $x, y, \varphi$  – узагальнені координати, що визначають положення тримкого тіла;  $\varphi_i$  – кут повороту ротора  $i$ -го віброзбудника;  $I$  – момент інерції пружнопідвішеного тримкого тіла відносно осі, що проходить через його центр мас;  $I_i$  – момент інерції  $i$ -го ротора віброзбуджувача відносно осі обертання;  $r_i, \delta_i$  – полярні координати осі  $i$ -го віброзбудника (полюс O, полярна вісь Oх).

**Основний матеріал і результати.** Skorистаємося методом прямого розділення рухів. Беручи до уваги, що детально розглядатимемо лише період усталеного руху роторів віброзбудників, й, відповідно, проміжок часу, у якій  $\dot{\varphi}_i$  змінюється достатньо мало, розв'язки системи (1), (2) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \omega t + \alpha_i(t) + \psi_i(t, \omega t); & \omega_1 = \omega_3 = \omega, \quad \omega_2 = 2\omega, \\ x &= x(t, \omega t); & y &= y(t, \omega t), \quad \varphi = \varphi(t, \omega t), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\omega$  – частота синхронного обертання;  $\alpha(t)$  – основна «повільна», а  $\psi, x, y, \varphi$  – малі «швидкі»,  $2\pi$  – періодичні за «швидким часом»  $\tau = \omega t$  – складові, причому будемо вважати, що

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \psi_i(t, \tau) d\tau = 0, \quad \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t, \tau) d\tau = 0,$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} y(t, \tau) d\tau = 0, \quad \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \varphi(t, \tau) d\tau = 0, \quad (3.4)$$

тобто середнє значення швидких складових дорівнює нулю.

Отже, під час досліджуваного періоду руху синхронну частоту обертання роторів вважаємо сталою  $\omega = const$ , припускаючи, що її повільні зміни враховуються похідними  $\dot{\alpha}_i(t)$ ; при цьому мають місце малі швидкі періодичні коливання частоти  $\dot{\psi}_i(t, \tau)$ . Можливість такого подання розв'язків системи рівнянь (1), (2) підтверджується існуючими теоретичними положеннями, а також результатами моделювання.

Таким чином, передбачається, що зміни середніх за період коливань частот обертання роторів віброзбудників  $\dot{\varphi}_i$  є повільними, а рухи тримкого тіла  $x, y, \varphi$  – швидкими. Відповідно, швидкими є також коливання частот віброзбудників  $\Psi_i$ .

Підставимо перший вираз (3) у вихідне диференціальне рівняння (1) руху роторів віброзбудників

$$I_i(\ddot{\alpha}_i + \dot{\psi}_i) = L_i(\dot{\varphi}_i) - R_i(\dot{\varphi}_i) + \Phi_i(\varphi_i, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, t)$$

і усереднимо його праву та ліву частини за швидким часом  $\tau$ , отримуємо рівняння повільних рухів роторів віброзбудників

$$I_i\ddot{\alpha}_i + k_i\dot{\alpha}_i = L_i(\omega_i) - R_i(\omega_i) + \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi_i(\varphi_i, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, t) d\tau, \quad (5)$$

де  $\Phi_i(\varphi_i, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, t) = m_i \varepsilon_i [\ddot{x} \sin(\omega_i t + \alpha_i) + \ddot{y} \psi_i \cos(\omega_i t + \alpha_i) + \ddot{\varphi} \cos(\omega_i t + \alpha_i) - \ddot{y} \psi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) + r_i \ddot{\varphi} \cos(\omega_i t + \alpha_i) - r_i \ddot{\varphi} \psi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) + g \cos(\omega_i t + \alpha_i) - g \psi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)]$ .

Далі, віднявши одержане рівняння від вихідного, прийдемо до такого рівняння швидких рухів роторів віброзбудників

$$I_i\dot{\psi}_i + k_i\psi_i = \Phi_i(\varphi_i, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, t) - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi_i(\varphi_i, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, t) d\tau. \quad (6)$$

При одержанні системи (5), (6) виконано лінеаризацію правих частин рівняння (2) за  $\Psi_i$ , виразів  $L(\dot{\varphi}_i), R(\dot{\varphi}_i)$  – поблизу значення  $\dot{\varphi}_i = \omega_i$ , причому  $k_i > 0$  – сумарний коефіцієнт демпфування.

Згідно методу прямого розділення рухів, спочатку знаходять наближені періодичні розв'язки рівнянь швидких рухів (2) для сталих  $\dot{\alpha}, \alpha, t$ . У нульовому наближенні ( $\psi_i = \psi_i^{(0)} = 0$ ), беручи до уваги, що  $\ddot{\varphi}_i \ll \omega^2$  (у розділі 4 це буде підтверджено чисельним моделюванням), у правих частинах рівнянь (2) можна знехтувати першими доданками у порівнянні з другими. Тоді асимптотично стійкими  $2\pi$ -періодичними за часом  $\tau$  розв'язками системи рівнянь (2), які задовільняють умовам (4), будуть

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= -\frac{m_1 \varepsilon_1 \omega^2}{M(\omega^2 - p_x^2)} [\cos(\omega t + \alpha_1) + \cos(\omega t + \alpha_3)] - \frac{4m_2 \varepsilon_2 \omega^2}{M(4\omega^2 - p_x^2)} \cos(2\omega t + \alpha_2), \\ y^{(0)} &= \frac{m_1 \varepsilon_1 \omega^2}{M(\omega^2 - p_y^2)} [\sin(\omega t + \alpha_1) + \sin(\omega t + \alpha_3)] + \frac{4m_2 \varepsilon_2 \omega^2}{M(4\omega^2 - p_y^2)} \sin(2\omega t + \alpha_2), \\ \varphi^{(0)} &= \frac{m_1 \varepsilon_1 r \omega^2}{I(\omega^2 - p_\varphi^2)} [\sin(\omega t + \alpha_1) - \sin(\omega t + \alpha_3)], \end{aligned} \quad (7)$$

що відповідає усталеним вимушеним коливанням тримкого тіла під дією збурюючої сили віброзбудників, які обертаються за законом  $\varphi_i = \varphi_i^{(0)} = \omega_i t$ .

Підставивши (7) в рівняння (5) одержимо диференціальні рівняння повільних процесів встановлення синхронних рухів роторів віброзбудників у вигляді

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\alpha}_1 + k_1 \dot{\alpha}_1 &= L_1(\omega) - R_1(\omega) + \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}{2M} \left( \frac{1}{1-\lambda_x^2} + \frac{1}{1-\lambda_y^2} - \frac{Mr^2}{I} \frac{1}{1-\lambda_\varphi^2} \right) \sin(\alpha_1 - \alpha_3), \\
 I_3 \ddot{\alpha}_3 + k_3 \dot{\alpha}_3 &= L_3(\omega) - R_3(\omega) - \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}{2M} \left( \frac{1}{1-\lambda_x^2} + \frac{1}{1-\lambda_y^2} - \frac{Mr^2}{I} \frac{1}{1-\lambda_\varphi^2} \right) \sin(\alpha_1 - \alpha_3), \\
 I_2 \ddot{\alpha}_2 + k_2 \dot{\alpha}_2 &= L_2(2\omega) - R_2(2\omega),
 \end{aligned} \tag{8}$$

де  $\lambda_x = \frac{P_x}{\omega}$ ,  $\lambda_y = \frac{P_y}{\omega}$ ,  $\lambda_\varphi = \frac{P_\varphi}{\omega}$ .

У перших двох рівняннях (3.8) останні доданки позначимо:

$$\begin{aligned}
 W_1 = v_{13} &= \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}{2M} \left( \frac{1}{1-\lambda_x^2} + \frac{1}{1-\lambda_y^2} - \frac{1}{1-\lambda_\varphi^2} \frac{Mr^2}{I} \right) \sin(\alpha_1 - \alpha_3), \\
 W_3 = v_{31} &= -\frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}{2M} \left( \frac{1}{1-\lambda_x^2} + \frac{1}{1-\lambda_y^2} - \frac{1}{1-\lambda_\varphi^2} \frac{Mr^2}{I} \right) \sin(\alpha_1 - \alpha_3),
 \end{aligned}$$

які є, так званими, вібраційними моментами, що характеризують динамічний зв'язок між роторами віброзбудників та за певних умов призводять до їх самосинхронізації.

Як бачимо, рівняння обертання роторів віброзбудників (8) містять лише різниці фаз збудників, що обертаються з однаковими синхронними частотами, у той час, як різниці фаз збудників з кратними частотами – відсутні. Таким чином, у “нульовому” наближенні існує динамічний зв'язок лише між віброзбудниками з однаковими частотами обертання, а віброзбудники, що обертаються з кратними частотами “не зв'язані” між собою. Тобто, розв'язавши задачу у “нульовому” наближенні, можна зробити висновок лише про можливість простої синхронізації віброзбудників. Для розв'язання задачі про кратну самосинхронізацію необхідно розглянути наступне наближення.

Як відомо, при обертанні віброзбудників з однаковими частотами у одному напрямку за виконання умови

$$\frac{1}{\lambda_x^2 - 1} + \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} - \frac{1}{\lambda_\varphi^2 - 1} \frac{Mr^2}{I} > 0 \tag{9}$$

стійким буде їх синфазне обертання, при цьому тримке тіло здійснюватиме кругові поступальні коливання; при виконанні нерівності протилежного змісту – стійкий протифазний синхронний рух, а тримке тіло виконуватиме чисто поворотні коливання щодо осі, яка проходить через центр мас віброуючого тіла.

Для виявлення ефекту можливої кратної синхронізації розв'яжемо задачу з більшою точністю. Періодичні розв'язки рівнянь швидких рухів роторів віброзбудників (6) будемо шукати у вигляді ряду за степенями малого параметра  $\psi_i = \psi_i^{(0)} + \mu \psi_i^{(1)} + \dots$ . Обмежимося лише двома членами ряду, тоді за сталих  $\alpha_i$  знаходимо:

$$\begin{aligned}
 \psi_1^{(1)} &= -\frac{m^2 \varepsilon^2}{8MI_1} \left( \frac{1}{1-\lambda_x^2} - \frac{1}{1-\lambda_y^2} \right) \left[ \sin(2(\omega t + \alpha_1)) + \sin(2\omega t + \alpha_1 + \alpha_3) \right] - \\
 &- \frac{8m\varepsilon m_2 \varepsilon_2}{9MI_1} \left( \frac{1}{4-\lambda_x^2} - \frac{1}{4-\lambda_y^2} \right) \sin(3\omega t + \alpha_1 + \alpha_2) + \\
 &+ \frac{8m\varepsilon m_2 \varepsilon_2}{MI_1} \left( \frac{1}{4-\lambda_x^2} + \frac{1}{4-\lambda_y^2} \right) \sin(\omega t - \alpha_1 - \alpha_2) - \\
 &- \frac{m^2 \varepsilon^2 r^2}{8I_1 I (1-\lambda_\varphi^2)} \left[ \sin 2(\omega t + \alpha_1) - \sin(2\omega t + \alpha_1 + \alpha_3) \right] - \frac{m\varepsilon g}{I_1 \omega^2} \cos(\omega t + \alpha_1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3^{(1)} = & -\frac{m^2 \varepsilon^2}{8MI_1} \left( \frac{1}{1-\lambda_x^2} - \frac{1}{1-\lambda_y^2} \right) \left[ \sin(2(\omega t + \alpha_3)) + \sin(2\omega t + \alpha_1 + \alpha_3) \right] + \\
& + \frac{8m\varepsilon m_2 \varepsilon_2}{I_1 M} \left( \frac{1}{4-\lambda_x^2} + \frac{1}{4-\lambda_y^2} \right) \sin(\omega t - \alpha_2 - \alpha_3) - \\
& - \frac{8m\varepsilon m_2 \varepsilon_2}{9I_1 M} \left( \frac{1}{4-\lambda_x^2} - \frac{1}{4-\lambda_y^2} \right) \sin(3\omega t + \alpha_2 + \alpha_3) - \\
& - \frac{m^2 \varepsilon^2 r^2}{8I_1 (1-\lambda_\varphi^2)} \left[ \sin(2(\omega t + \alpha_3)) - \sin(2\omega t + \alpha_1 + \alpha_3) \right] - \frac{m\varepsilon g}{I_1 \omega^2} \cos(\omega t + \alpha_3), \\
\psi_2^{(1)} = & -\frac{m_2 \varepsilon_2 m \varepsilon}{2MI_2} \left( \frac{1}{1-\lambda_x^2} - \frac{1}{1-\lambda_y^2} \right) \left[ \sin(\omega t + \alpha_2 - \alpha_1) + \sin(\omega t + \alpha_2 - \alpha_3) \right] - \\
& - \frac{m\varepsilon m_2 \varepsilon_2}{18I_2 M} \left( \frac{1}{1-\lambda_x^2} - \frac{1}{1-\lambda_y^2} \right) \left[ \sin(3\omega t + \alpha_1 + \alpha_2) + \sin(3\omega t + \alpha_2 + \alpha_3) \right] - \\
& - \frac{8m_2^2 \varepsilon_2^2}{MI_2} \left( \frac{1}{4-\lambda_x^2} - \frac{1}{4-\lambda_y^2} \right) \sin 2(2\omega t + \alpha_2) - \frac{m_2 \varepsilon_2 g}{4I_2 \omega^2} \cos(2\omega t + \alpha_2). \tag{10}
\end{aligned}$$

Підставивши у рівняння (5) вирази (10) для функції  $\psi_i^{(1)}$  з урахуванням розв'язків (7), одержимо диференціальні рівняння синхронних рухів роторів вібробудників

$$\begin{aligned}
I_1 \ddot{\alpha}_1 + k_1 \dot{\alpha}_1 &= L_1(\omega) - R_1(\omega) + V_1, \\
I_2 \ddot{\alpha}_2 + k_2 \dot{\alpha}_2 &= L_2(2\omega) - R_2(2\omega) + V_2, \\
I_3 \ddot{\alpha}_3 + k_3 \dot{\alpha}_3 &= L_3(\omega) - R_3(\omega) + V_3, \tag{11}
\end{aligned}$$

де  $V_1 = v_{13} + v_{12}$ ,  $V_2 = v_{21} + v_{23}$ ,  $V_3 = v_{31} + v_{32}$ ,

$$\begin{aligned}
v_{12} &= -\frac{8m^2 \varepsilon^2 m_2 \varepsilon_2 g}{I_1 M} \left( \frac{1}{4-\lambda_x^2} + \frac{1}{4-\lambda_y^2} \right) \cos(2\alpha_1 - \alpha_2), \\
v_{32} &= -\frac{8m^2 \varepsilon^2 m_2 \varepsilon_2 g}{I_1 M} \left( \frac{1}{4-\lambda_x^2} + \frac{1}{4-\lambda_y^2} \right) \cos(2\alpha_3 - \alpha_2), \\
v_{21} &= \frac{4m^2 \varepsilon^2 m_2 \varepsilon_2 g}{I_1 M} \left( \frac{1}{4-\lambda_x^2} - \frac{1}{4-\lambda_y^2} \right) \cos(2\alpha_1 - \alpha_2), \\
v_{23} &= \frac{4m^2 \varepsilon^2 m_2 \varepsilon_2 g}{I_1 M} \left( \frac{1}{4-\lambda_x^2} - \frac{1}{4-\lambda_y^2} \right) \cos(2\alpha_3 - \alpha_2),
\end{aligned}$$

де  $v_{12}, v_{32}, v_{21}, v_{23}$  – вібраційні моменти, що діють на вібробудники, які обертаються з кратними частотами.

Зазначимо, якщо диференціальні рівняння коливань тримкого тіла подати у вигляді

$$\begin{aligned}
M\ddot{x} + cx &= \sum_{i=1}^3 m_i \varepsilon_i \left[ (\ddot{\psi}_i - \omega_i^2 \psi_i) \sin(\omega_i t + \alpha_i) + (\omega_i^2 + 2\omega_i \dot{\psi}_i) \cos(\omega_i t + \alpha_i) \right], \\
M\ddot{y} + cy &= \sum_{i=1}^3 m_i \varepsilon_i \left[ (\ddot{\psi}_i - \omega_i^2 \psi_i) \cos(\omega_i t + \alpha_i) - (\omega_i^2 + 2\omega_i \dot{\psi}_i) \sin(\omega_i t + \alpha_i) \right], \\
M\ddot{\varphi} + c\varphi &= \sum_{i=1}^3 m_i \varepsilon_i r_i \left[ (\omega_i^2 + 2\omega_i \dot{\psi}_i) \sin(\omega_i t + \alpha_i) - (\ddot{\psi}_i - \omega_i^2 \psi_i) \cos(\omega_i t + \alpha_i) \right], \tag{12}
\end{aligned}$$

і знайти наступні наближення для функцій  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  з урахуванням виразів (10) для  $\psi_i^{(1)}$ , то формули для вібраційних моментів міститимуть лише доданки наступного порядку малості.

Відзначимо, що диференціальні рівняння (11) описують також повільні рухи збудників в околі усталених синхронних режимів. Вони допускають зручну інтерпретацію існування та підтримання динамічної синхронізації віброзбудників. Так, нехай має місце стійке кратно-синхронне обертання усіх віброзбудників, яке у певний момент часу порушилось, наприклад, перший збудник почав рухатись швидше. Згідно рівнянь повільних рухів роторів віброзбудників (11), якщо різниця фаз  $\alpha_1 - \alpha_2$  починає зростати відразу, на перший віброзбудник починає діяти гальмівний вібраційний момент (якій збільшується зі зростанням різниці фаз), а на другий і третій віброзбудники – обертальні моменти. І навпаки – якщо перший віброзбудник починає рухатися повільніше, з'являється момент, який буде його пришвидшувати й, відповідно, пригальмовувати інші збудники.

**Висновки і перспективи подальших досліджень.** Зроблено практично важливу задачу про двократну самосинхронізацію трьох дебалансних віброзбудників, симетрично розмішених на пружно підвішеному тримкому тілі з урахуванням жорсткості пружної підвіски. Отримані більш точні вирази для вібраційних моментів, диференціальні рівняння повільних процесів встановлення синхронних рухів роторів збудників, умови існування та стійкості їх кратно-синхронних обертань. Встановлено, що зі збільшенням жорсткості пружної підвіски тримкого тіла, умова стійкості кратно-синхронних обертань збудників пом'якшується; однак у практично використовуваному діапазоні величин жорсткості, відповідне покращення є досить незначним.

В подальшому є можливим використання розробленої методики задач до інших проблем теорії синхронізації.

1. Афанасьев М.М. Динамика системы принудительной синхронизации механических вибровозбудителей с асинхронным приводом / М.М.Афанасьев, И.И.Блехман, В.А.Макаров, А.В.Печенев //Машиноведение. – 1983. – № 4. – С. 4–11.

2. Берник П.С. Синхронизация последовательно агрегатных виброзбудителей / П.С.Берник, П.Д.Денисов, Е.В.Солоная // Збірник наукових праць ПДТУ. – Полтава, 2000. – С. 132–136.

3. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем / Блехман И.И. – М.: Наука, 1971. – 896 с.

4. Блехман И.И. Динамика привода вибрационных машин со многими синхронными механическими вибраторами / И.И.Блехман //Изв. АН СССР, ОТН механики и машиностроение. – 1980. – № 1. – С. 16.

5. Лавров Б.П. Пространственная задача о синхронизации механических вибраторов / Б.П.Лавров //Изв. АН СССР, ОТН механики и машиностроения. – С. 58–69.

6. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике / Блехман И.И. – М.: Наука, 1981. – 352с.

7. Вибрационные процессы и машины. Вибрации в технике. Справочник. Т.4 / ред. Лавендела Э.Э. – М.: Машиностроение, 1981. – 509с.