Є.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ОБВОДІВ ПО ЗАДАНИМ ГЕОМЕТРИЧНИМ УМОВАМ

Гавриленко Є.А., Холодняк Ю.В. Програмна реалізація алгоритму моделювання одновимірних обводів по заданим геометричним умовам. *У роботі запропоновано алгоритм та його програмна реалізація для моделювання одновимірних обводів із монотонною зміною радіусів кривини. Вихідними даними для моделювання є координати вузлів, порядок гладкості та закономірність зміни радіусів кривини уздовж обводу. Параметрами керування формою обводу є положення центрів кривини та нормалей до кривої, що призначаються у вихідних точках. Крива моделюється по наперед сформованій еволюті, яка являє собою випуклий обвід першого порядку гладкості.*

Ключові слова: *дискретно представлена крива, еволюта, евольвента, монотонна зміна кривини, нормаль, радіус кривини, центр кривини.*

Форм. 7. Табл. 1. Рис. 4. Літ. 10.

Гавриленко Е.А., Холодняк Ю.В. Программная реализация алгоритма моделирования одномерных обводов по заданным геометрическим условиям. *В работе предложен алгоритм и его программная реализация для моделирования одномерных обводов с монотонным изменением кривизны. Исходными данными для моделирования являются координаты узлов, порядок гладкости и закономерность изменения радиусов кривизны вдоль обвода. Параметрами управления формой обвода являются положения центров кривизны и нормалей к кривой, которые назначаются в исходных точках. Кривая моделируется по предварительно сформированной эволюте, которая представляет собой выпуклый обвод первого порядка гладкости.*

Ключевые слова: *дискретно представленная кривая, эволюта, эвольвента, монотонное изменение кривизны, нормаль, радиус кривизны, центр кривизны.*

Gavrilenko E., Kholodnyak Yu. Development of software for modeling of one-dimensional contours with given geometrical conditions. *The algorithm and its implementation for modeling of one-dimensional contours with a monotonous change of curvature is developed in this article. The initial data for the modeling are the coordinates of the points, the order of smoothness and law of change of the radiuses of curvature along the contour. The positions of the centers of curvature and normals to the curve, which are appointed in the initial point are the parameters of controlling the shape of contour. The curve is modeled on a preformed evolute which represents a convex contour with the first order of smoothness.*

Keywords: *discrete represented curve, evolute, evolvent, monotonous change of curvature, normal, radius of curvature, center of curvature.*

Постановка проблеми. Конструювання поверхонь з підвищеними динамічними властивостями вимагає розробки методів геометричного моделювання, які забезпечують задану точність, контроль диференціально-геометричних характеристик, відсутність осциляції.

При оцінюванні функціональних якостей виробу динамічні властивості поверхні визначаються характеристиками потоку середовища, що виникає у пограничному шарі уздовж поверхні. Основною вимогою є закономірний, стійкий, регламентований характер обтікання. З геометричної точки зору підвищені динамічні властивості забезпечують поверхні із закономірною, плавною зміною диференціально-геометричних характеристик.

Підвищені динамічні властивості необхідні поверхням, які обмежують корпусні вироби авіа-, автомобіле-, судобудівництва, лопати турбін, змішувачі, канали двигунів внутрішнього згорання, трубопроводи, робочі органи сільськогосподарських машин. Постійне підвищення вимог до якості моделювання таких поверхонь обумовлено збільшенням швидкостей взаємодії із середовищем.

Заданий характер зміни диференціально-геометричних характеристик поверхні можна забезпечити за рахунок характеристик кривих, що входять у визначник поверхні. До таких характеристик належить другий порядок гладкості та монотонна зміна радіусів кривини уздовж обводу.

Одновимірні обводи можна моделювати по заданим умовам методами неперервного (НГМ) та дискретного геометричного моделювання (ДГМ). Методи НГМ передбачають отримання на основі точкового ряду обводу, що складається із ділянок алгебраїчних кривих, які стикуються у вихідних точках із заданим порядком гладкості [1, 5]. Вихідні дані (координати точок, положення дотичних та значення радіусів кривини обводу у цих точках) визначають ділянку кривої. При цьому забезпечити бажаний характер зміни характеристик кривої всередині ділянки складно або неможливо.

Більш широкі можливості для моделювання обводів по заданим умовам надають методи ДГМ, що враховують внутрішню геометрію кривої та дозволяють накладати на розв'язок будь-яку кількість додаткових умов [6, 7]. Однак ДГМ як напрям прикладної геометрії виник відносно нещодавно та методи, які забезпечують монотонну зміну кривини розвинені недостатньо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Серед методів НГМ, які забезпечують другий порядок гладкості, найбільше застосування отримало формування обводів на основі В-сплайнів. В-сплайн визначається контрольними токами, кожній із яких відповідає функція сполучення [5, 9]. Дискретний характер вихідних даних забезпечує гнучкість управління формою кривої. Порядок гладкості обводу забезпечується ступенем функцій сполучення. При збільшенні порядку гладкості знижується можливість локального корегування форми кривої. Одночасно зростає ймовірність виникнення осциляції. Ці особливості обмежують можливість забезпечення заданих характеристик обводів, що формуються на основі В-сплайнів.

Серед методів ДГМ найбільш широкі можливості локального управління формою кривої при забезпеченні граничних умов надають методи варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ) [6, 7]. Основною властивістю методів ВДГМ є вибір розв'язку всередині деякого діапазону можливих, за умовами задачі, значень. Наявність діапазону дає можливість локального моделювання та корегування розв'язку, дозволяє враховувати додаткові умови задачі. Обмеженість діапазону розв'язку дозволяє контролювати відсутність осциляції та забезпечувати необхідні вимоги до характеристик та гладкості обводу. Особливістю методів є багатократне повторювання розрахункових алгоритмів (послідовне згущення), яке призводить до заміни із заданою точністю вихідного геометричного образу супровідною ламаною лінією.

Методика, яка дозволяє визначити можливість забезпечення монотонної зміни кривини (зростання або убування) уздовж дискретно представленої кривої (ДПК) розроблена в [3]. Вихідними даними для проведення аналізу є положення вузлів вихідного точкового ряду.

Геометрична схема формування ДПК з закономірною зміною кривини запропонована у роботі [4]. ДПК формується на основі наперед сформованої дискретно представленої еволюти (ДПЕ). ДПЕ визначається положеннями нормалей і центрів кривини, призначених у вихідних вузлах, та умовами, що на неї накладаються.

Задача визначення області можливого розташування нормалей (n_i) та центрів кривини (C_i) у вихідних точках ДПК розв'язується у роботі [2]. Областю розташування нормалей є сектор, що обмежений граничними, за умовами задачі, положеннями. Діапазоном розташування центрів кривини є відрізок, що належить нормалі. Після призначення положень нормалей та центрів кривини уздовж вихідного точкового ряду отримується ланцюг базисних трикутників, який обмежений нормалями у вихідних точках та хордами, що з'єднують центри кривини, призначені на цих нормалях.

ДПЕ формується на основі ланцюга базисних трикутників за методикою, розробленою в [2, 10]. Вихідними даними для формування еволюти є координати вузлів, положення дотичних до ДПЕ (нормалей до ДПК), порядок гладкості кривої та її довжина. Область розташування центра кривини, що відповідає точці згущення, визначається на нормалі згущення, положення якої призначається паралельно відрізку, що з'єднує два послідовних центра кривини ДПК. Діапазон розташування точки згущення визначається як відрізок на нормалі згущення. Довжина відрізка залежить від положення нормалі.

Невирішені частини проблеми. При моделюванні монотонної кривої на основі еволюти необхідно забезпечити контроль наступних умов: порядок гладкості кривої, відсутність осциляції, задану довжину еволюти. Крім того для досягнення оптимального розв'язку задачі необхідно забезпечити плавну зміну характеристик уздовж обводу. Аналітично забезпечити виконання вказаних вимог складно або неможливо. Тому розв'язання поставленої задачі доцільно виконувати із застосуванням спеціалізованого програмного забезпечення.

Метою дослідження є програмна реалізація алгоритму, що дозволяє сформувати на основі вихідного точкового ряду криву із монотонною зміною диференціально-геометричних характеристик.

Основні результати дослідження. Монотонна крива, яка задана координатами вузлів, моделюється на основі алгоритму, який передбачає попереднє формування еволюти.

Еволюта монотонної кривої має відповідати наступним вимогам [8]:

- еволюта є випуклою кривою;
- нормалі до кривої є дотичними до еволюти, що її визначає;
- довжина еволюти дорівнює різниці радіусів кривини у точках, що обмежують відповідну ділянку кривої.

Нехай вихідний точковий ряд дозволяє забезпечити монотонне зростання радіусів кривини уздовж ДПК [3]. Еволюта ДПК моделюється як випуклий обвід першого порядку гладкості, що не містить особливих точок. Виконання вказаних умов забезпечує другий порядок гладкості ДПК при монотонній зміні радіусів кривини уздовж кривої [1].

Положення нормалей у вихідних точках $\ldots n_{i-1}$, n_i, $n_{i+1}\ldots$ призначаються всередині відповідних діапазонів їх можливого розташування [2]. В результаті отримуємо ламану лінію

$\dots T_{i-1},\ T_i \dots$, яка визначає ДПЕ в першому наближенні (рис. 1). Центри кривини $\dots C_{i-1},\ C_i,\ C_{i+1}\dots$ є точками, в яких еволюта торкається вказаної ламаної лінії. Положення центрів кривини визначаються всередині відповідних ланок ламаної лінії (C_i належить відрізку $[T_{i-1};T_i]$). В результаті послідовних згущень кількість ланок вказаної ламаної лінії збільшується та в граничному положенні отримаємо обвідну лінію нормалей, яка є еволютою кривої.

Для того, щоб сформувати ДПЕ, яка визначає монотонну криву, що відповідає умовам задачі, необхідно розв'язати наступне:

- визначити положення нормалей та центрів кривини у вихідних точках ДПК та отримати ланцюг базисних трикутників, на основі якого можливо сформувати обвід першого порядку гладкості заданої довжини;

- всередині кожного базисного трикутника сформувати ділянку еволюти $C_i \dots C_{i+1}$, яка дотична до n_i та n_{i+1} в точках C_i та C_{i+1}. Довжина ділянки еволюти має дорівнювати $d_i = |i+1;C_{i+1}| - |i;C_i|$ (рис. 1).

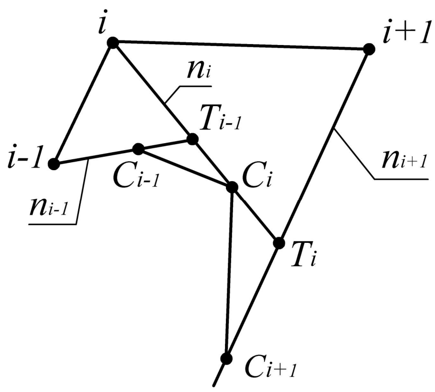


Рис. 1 **Вихідний ланцюг базисних трикутників** (авторська розробка)

Для розв'язання поставлених задач розроблено спеціалізоване програмне забезпечення, що реалізує алгоритми визначення положень центрів кривини у вихідних точках ДПК та центрів кривини, які відповідають точкам згущення. Розглянемо алгоритм визначення положень центрів кривини ДПК у вихідних точках.

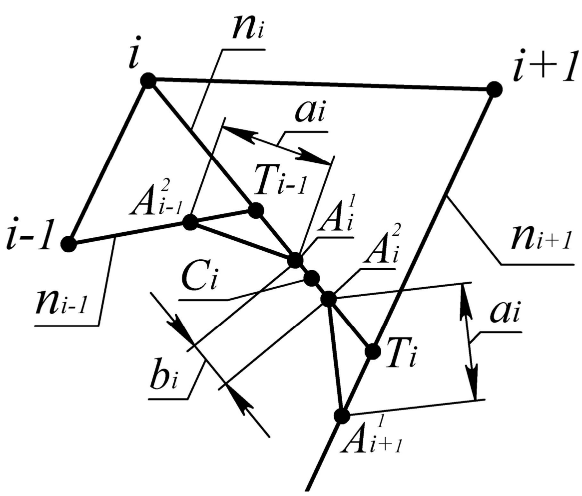
Попередньо ДПЕ формується як ламана лінія $A^2_{i-1},\ A^1_i,\ A^2_i,\ A^1_{i+1}$ (рис. 2, а) таким чином, щоб виконувались наступні умови:

$$|i+1;A^1_{i+1}| = |A^2_i;A^1_{i+1}| + |A^2_i;i|, \qquad (1)$$

$$|A^2_{i-1};T_{i-1}| = |T_{i-1};A^1_i|, \quad |A^2_i;T_i| = |T_i;A^1_{i+1}|. \qquad (2)$$

Отримана ДПЕ визначає евольвенту як коробову лінію кіл, радіуси яких монотонно зростають уздовж обводу. Виконання умов (1) та (2) однозначно визначає розташування точок A^2_{i-1}, A^1_i, A^2_i, A^1_{i+1} при зафіксованих положеннях нормалей n_{i-1}, n_i, n_{i+1}.

Необхідною умовою існування розв'язку задачі є розташування нормалей, при якому виконується умова $|T_{i-1};T_i| > |T_{i-1};A^1_i| + |A^2_i;T_i|$. В іншому випадку (рис. 2. б) задача не має розв'язку.



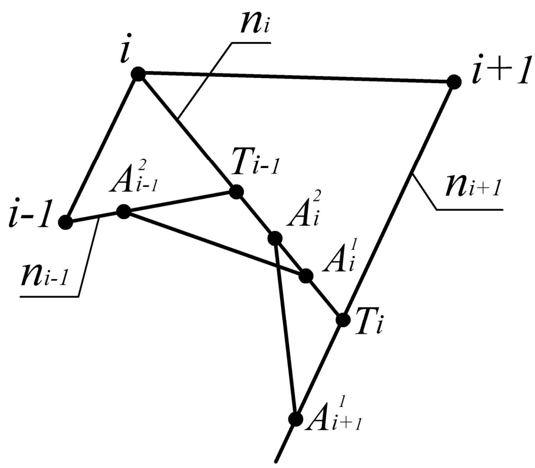


Рис. 2 **Визначення положень центрів кривини у вихідних точках** (авторська розробка)

Призначення центра кривини C_i всередині відрізка $\left[A_i^1; A_i^2\right]$ є необхідною умовою формування еволюти як обводу першого порядку гладкості заданої довжини.

Виконання вказаних умов контролюється за допомогою наступного коефіцієнту:

$$e_i = \frac{2b_i}{a_{i-1} + a_i}, \tag{3}$$

де $a_{i-1} = \left|A_{i-1}^2; A_i^1\right|$, $a_i = \left|A_i^2; A_{i+1}^1\right|$ та $b_i = \left|A_i^1; A_i^2\right|$ – довжини ланок ламаної лінії, яка визначає ДПЕ.

Обов'язковою умовою існування розв'язку є додатне значення введеного коефіцієнту, тобто $e_i > 0$. Крім того за допомогою контролю значень e_i можна забезпечити оптимальний розв'язок задачі. Оптимальним розв'язком будемо вважати таку ДПЕ, яка забезпечує плавність зміни радіусів кривини уздовж евольвенти. Область оптимального розв'язку визначається виконанням умови $e_i = 1 \pm \varepsilon$, де ε – задане значення відхилення від оптимального значення.

Досягнення оптимальних значень e_i уздовж усього точкового ряду виконується в автоматичному режимі. Для цього виконуються наступні дії.

1) Уздовж точкового ряду призначаються положення n_i по центру діапазонів їх можливого розташування.

2) Розраховуються значення e_i та визначається e_i^{max} – максимальне значення e_i із отриманих.

3) Положення n_i, яке відповідає e_i^{max}, корегується з метою забезпечення його наближення до оптимального. Положення n_i змінюється із заданим кроком з контролем значення e_i на кожному кроці.

4) При зміні положення n_i змінюються значення e_{i-1}, e_i та e_{i+1}. На кожному кроці перераховані значення e_{i-1}, e_i та e_{i+1} порівнюються із значеннями e_i на інших ділянках. Якщо e_i стає максимальним на іншій ділянці, то корегується положення відповідної нормалі.

Після забезпечення на всіх ділянках розташування значень коефіцієнту e_i всередині області оптимального розв'язку положення n_i сформовано. Положення C_i призначаються по центру відповідних відрізків b_i.

Таким чином отримано положення нормалей та центрів кривини у вихідних точках ДПК, які визначають ланцюг базисних трикутників. Отриманий ланцюг базисних трикутників визначає вихідну ДПЕ як монотонну криву лінію.

На наступному етапі всередині кожного базисного трикутника формується ділянка еволюти кривої у вигляді точкового ряду, що складається із будь-якої кількості центрів кривини ДПК.

Розглянемо алгоритм визначення положення центрів кривини, які відповідають точкам згущення ($C_{зг}$) та самих точок згущення ($i_{зг}$).

Положення нормалі згущення ($n_{зг}$) призначається паралельно стороні базисного трикутника $[C_i;C_{i+1}]$ на відстані h від неї (рис. 3). Точки перетину $n_{зг}$ з нормалями n_i та n_{i+1} позначимо як T_1 та T_2 відповідно.

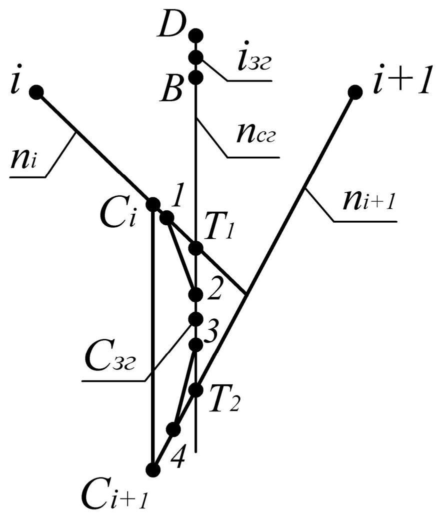


Рис. 3 **Формування ділянки еволюти ДПК** (авторська розробка)

На нормалі $n_{зг}$ визначається діапазон можливого розташування $i_{зг}$ – відрізок $[B;D]$. Положення точок B та D визначається згідно з наступними співвідношеннями:

$$[B;T_1]=[T_1;i], \quad (4)$$

$$[D;T_2]=[T_2;i+1]. \quad (5)$$

При переміщенні $n_{зг}$ довжина відрізка $[B;D]$ змінюється. Якщо $n_{зг}$ займає граничні із можливих за умовами задачі положення, то точки B та D співпадають. Діапазон можливого розташування $n_{зг}$ визначається виконанням умови $[T_1;D]>[T_1;B]$.

ДПЕ формується як ламана лінія $C_i,1,2,3,C_{i+1}$ таким чином, щоб виконувались наступні вимоги:

$$|i_{зг};2|=|i;1|+|1;2|, \quad |i+1;4|=|4;3|+|3;i_{зг}| \quad (6)$$

$$|1;T_1|=|T_1;2|, \quad |3;T_2|=|T_2;4|. \quad (7)$$

Виконання вимог (6) та (7) однозначно визначає розташування точок 1, 2, 3, 4 при зафіксованих положеннях нормалей. Призначення центра кривини, який відповідає $i_{зг}$, всередині відрізка $[2;3]$ є необхідною умовою формування еволюти як обводу першого порядку гладкості заданої довжини. Отримана ділянка ДПЕ визначає евольвенту як коробову лінію кіл, радіуси яких монотонно зростають уздовж обводу.

В результаті послідовних згущень кількість ланок ДПЕ збільшується, в результаті чого отримується точковий ряд, який із заданою точністю представляє еволюту кривої. Точність представлення кривої на кожному кроці згущення визначається довжиною відрізка $\delta=|B;D|$.

Попередні положення $n_{зг}$ та $i_{зг}$ визначаються по центру відповідних діапазонів. В процесі згущення існування розв’язку задачі та плавність зміни характеристик уздовж ділянки кривої контролюється за допомогою коефіцієнта, аналогічного (3).

Розглянемо контрольний приклад. Вихідний точковий ряд складається із 10 точок (рис. 4, а). Координати точок призначені довільно. Контроль можливості моделювання монотонної кривої виконано згідно зі способом, розробленим в [3]. Призначено точність представлення кривої $\delta=10^{-5}$. В результаті згущення отримано новий точковий ряд, який складається із 172 точки (рис. 4, б). Максимальна абсолютна похибка визначення точки згущення дорівнює $\delta=9{,}8\cdot10^{-6}$.

Розрахункові дані, отримані на вихідній ділянці (6…7) наведені у таблиці 1 (R_i – радіуси кривини у точках i, отримані у процесі моделювання ДПК).

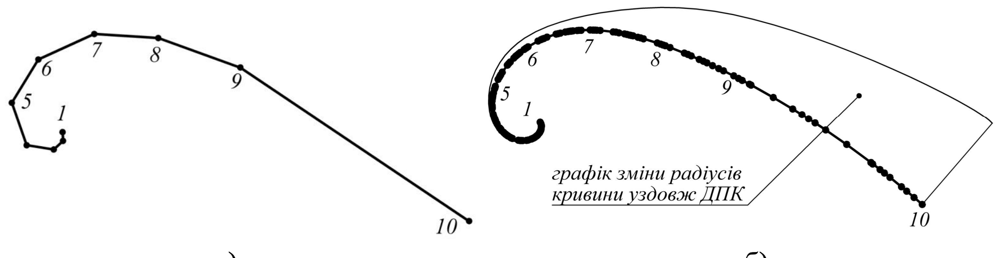


Рис. 4 **Контрольний приклад** (авторська розробка)

Таблиця 1. **Дані, отримані на ділянці 6…7 після згущення** (авторська розробка)

i	R_i (*мм*)	δ_i (*мм*)	i	R_i (*мм*)	δ_i (*мм*)
6.0	57.30	$8.1\cdot10^{-6}$	6.8	62.12	$8.9\cdot10^{-6}$
6.1	58.31	$7.6\cdot10^{-6}$	6.9	62.62	$8.6\cdot10^{-6}$
6.2	58.57	$6.3\cdot10^{-6}$	6.10	62.68	$7.5\cdot10^{-6}$
6.3	59.29	$6.8\cdot10^{-6}$	6.11	63.17	$8.3\cdot10^{-6}$
6.4	59.61	$8.2\cdot10^{-6}$	6.12	64.00	$6.6\cdot10^{-6}$
6.5	59.64	$8.1\cdot10^{-6}$	6.13	64.37	$7.1\cdot10^{-6}$
6.6	60.06	$7.7\cdot10^{-6}$	6.14	65.18	$9.4\cdot10^{-6}$
6.7	60.98	$6.8\cdot10^{-6}$	6.15	66.75	

Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі запропоновано алгоритм та розроблено програмне забезпечення для моделювання кривої другого порядку гладкості із монотонною зміною диференціально-геометричних характеристик. Граничними умовами при моделюванні кривої є призначені положення нормалей та центрів кривини вихідної ДПК. Крива моделюється на основі наперед сформованої еволюти. Запропоновано критерії оптимальності розв'язку задачі. У процесі подальших досліджень планується розробити алгоритми та програмне забезпечення для моделювання ДПК на ділянках, які містять особливі точки (точки зміни зростання та убування радіусів кривини, точки зміни опуклості та увігнутості кривої). Це дасть можливість моделювати криву із закономірною зміною диференціально-геометричних характеристик на основі будь-якого точкового ряду.

1. Бубенников А.В. Начертательная геометрия /А.В. Бубенников, М.Я. Громов – М.: ВЗПИ, 1965. – 364 с.
2. Гавриленко Е.А. Визначення положення центрів кривини дискретно представленої кривої / Е.А. Гавриленко // Системні технології / Регіональний міжвузівський збірник наукових праць – Вип. 5 (76) - Дніпропетровськ, 2011. – с. 145-151
3. Гавриленко Е.А. Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны: дис. канд. техн. наук / Е.А. Гавриленко. – Мелитополь, 2004. – 182 с.
4. Гавриленко Е.А. Формирование плоских обводов заданного порядка гладкости / Е.А. Гавриленко // Прикл. геом. та інж. графіка – Вип. 90 – Київ, KYIV 2012. – с. 74-78.
5. Кунву Ли Основы САПР CAD/CAM/CAE / Ли Кунву. – С.: ПИТЕР, 2004. – 560 с.
6. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція / В.М. Найдиш – Мелітополь 2008. – 250 с.
7. Найдиш В.М. Основи прикладної дискретної геометрії / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна. - Мелітополь: Люкс, 2007. – 193 с.
8. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии / П.К. Рашевский. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 480 с.
9. Херн Д. Компьютерная графика и стандарт Open GL. / Д. Херн, М.П. Бейкер – С-Пб.: Вильямс, 2005. – 1159 с.
10. Холодняк Ю.В. Формування ділянки дискретно представленої кривої із монотонною зміною кривини / Ю.В. Холодняк // Прикл. геом. та інж. графіка / Праці ТДАТУ – Вип.4, Т.57. – Мелітополь 2013. – с. 211-216.