

УДК 532.516

Г.В. Кит, Н.М. Ліщина, А.Н. Сильвестров

МЕТОДЫ ЦЕНИВАНИЯ МОДЕЛИ ГАММЕРШТЕЙНА

Рассматриваются новые методы несмещенного параметрического оценивания линейной и непараметрического оценивания нелинейной частей модели Гаммерштейна. Приводятся примеры решения задач для каждого из предлагаемых подходов.

Ключевые слова: аппроксимация, идентификация, модель Гаммерштейна, оптимизация, сходимость.

Кит Г.В., Лищина Н.М., Сильвестров А.Н. Методы оценивания модели Гаммерштейна. Рассматриваются новые методы несмещенного параметрического оценивания линейной и непараметрического оценивания нелинейной частей модели Гаммерштейна. Приводятся примеры решения задач для каждого из предлагаемых подходов.

Библ. 8, ил. 10.

Кит Г.В., Лищина Н.М., Сильвестров А.М. Методи оцінювання моделі Гаммерштейна. Розглядаються нові методи незміщеного параметричного оцінювання лінійної та непараметричного оцінювання нелінійної частин моделі Гаммерштейна. Наводяться приклади вирішення задач для кожного із підходів, що пропонуються.

Бібл. 8, іл. 10.

Kit G.V., Lishchyna N.M., Silvestrov A.N. Methods of estimation model of Hammerstein. The new methods of nonmoved parametric estimation of linear and nonparametric estimation of nonlinear parts of model of Hammerstein are proposed. Numerical examples are presented.

Ref. 8, il. 10.

Введение.

Подобно математике, где имеются понятия необходимых и достаточных условий (устойчивости, оптимальности и т.п.), в теории идентификации также можно сформулировать два вида условий [1]:

- необходимые – это задача аппроксимации с точностью до ε "поведения" объекта идентификации моделью произвольной структуры;
- достаточные, когда в дополнение к необходимым требуется выполнение условия близости структуры и параметров модели к структуре и параметрам реально существующего в объекте (в конечной пространственно-временной области) отображения входных переменных на переменные состояния и выходные переменные.

Например, определение (диагностика) для заданного режима аэродинамических коэффициентов (АДК) летательных аппаратов (ЛА) по данным летных испытаний (ЛИ); определение балансировочных (статических) нелинейных зависимостей ЛА из неопределенной динамики ЛИ; определение нелинейных тарировочных зависимостей $f(x)$ первичных измерительных преобразователей, физика которых соответствует модели Гаммерштейна [2]

$$\sum \beta_i \frac{d^i y}{dt^i} = f[x(t)], \quad (1)$$

где $n, \beta_i, f(x)$ неизвестны, $x(t)$ и $y(t)$ измеряются с шумами на ограниченном нестационарностью, стоимостью и другими причинами интервале T времени.

Реальная ситуация, как правило, характеризуется недостаточной статистической представительностью выборки данных, неавтономностью, нелинейностью, нестационарностью объекта идентификации и, как следствие, приближенностью его модели. Стремление повысить адекватность локальных моделей путем сужения пространственно - временной области поведения объекта приводит к возрастанию в измерениях соотношения "шум – сигнал". Стремление учесть нелинейность и параметризовать ее резко расширяет размерность вектора β неизвестных коэффициентов. В обоих случаях имеет место некорректность [3] задачи идентификации.

1. Метод несмещенного оценивания параметров модели при наличии шумов в измерениях входных и выходных сигналов

В ограниченной пространственно-временной области G нелинейная нестационарная динамика реального объекта

$$\dot{\mathbf{x}}^* = f^*(\mathbf{x}^*, t^*), \quad (2)$$

где звездочкой (*) обозначены точные значения;

вектор-функция f представима (с точностью до ε^*) линейной моделью

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{x}^* \cdot \beta^* + \varepsilon^*, \quad (3)$$

где $\mathbf{y}^* = \dot{\mathbf{x}}^*$, β^* -- искомые коэффициенты.

Чем уже область G , тем точнее модель (3), но и тем больше соотношение "шум – сигнал" в измерениях

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^* + N_y; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* + N_x.$$

Известны методы конfluence анализа [4], статистически оптимального нелинейного оценивания (расширенный фильтр Калмана, квазилинеаризация и инвариантное погружение [5]). Однако этим методам необходима информация о вероятностных характеристиках помех и/или они не гарантируют сходимости релаксационного процесса приближения оценок β к β^* .

Простой способ несмещенного оценивания состоит в замене МНК - оценок [5]

$$\hat{\beta} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{y} = A_1^{-1} B_1, \quad (4)$$

которые имеют смещение

$$\Delta \hat{\beta}' = \hat{\beta} - \beta^* = -(A^* + \Delta A_1)^{-1} \Delta A_1 \cdot \beta^*, \quad (5)$$

где $A^* = \mathbf{x}^{*T} \mathbf{x}^*$, $\Delta A_1 = A_1 - A^*$, СМНК - оценками [6]

$$\hat{\beta}_m = A_2^{-1} B_2, \quad (6)$$

полученными из условия минимума функционала

$$J(\varepsilon) = \varepsilon_0^T (\varepsilon_m + \varepsilon_{-m}) + (\varepsilon_m + \varepsilon_{-m})^T \varepsilon_0, \quad (7)$$

где $\varepsilon_0 = \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 \hat{\beta}_m$, $\varepsilon_{\pm m} = \mathbf{y}_{\pm m} - \mathbf{x}_{\pm m} \cdot \hat{\beta}_m$; индексы 0 и $\pm m$ означают нулевое или сдвинутый во времени на m отсчетов массив данных.

Если сдвиг m больше времени корреляции помех в \mathbf{x} , но меньше критического $m_{кр}$ [6], когда матрица A_2 вырождена, то оценка (6) будет несмещенной. Чем более гладкой является $\mathbf{x}^*(t)$ и $N_x(t)$ ближе к "белому шуму", тем лучше оценка (6). Если множество сдвигов m в пределах от 1 до $m_{кр}$ не единично, то с целью улучшения эффективных оценок можно использовать усредненную по m оптимально взвешенную функцией $\eta(m)$ оценку $\hat{\beta}$ интегрального СМНК:

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{-m_{кр}}^{m_{кр}} \eta(m) \right)^{-1} \cdot \sum \eta(m) \cdot \hat{\beta}_m, \quad (8)$$

где выбором $\eta(m)$ достигается компромисс между смещением и дисперсией оценки (8). В условиях неопределенности характеристик помех вес $\eta(m)$ оптимизируется по внешнему (проверочному [7], главному [6]) критерию I .

Задачу синтеза можно параметризовать, задав симметричную относительно $m=0$ финитную функцию такую, что $\eta(0) = \eta(\pm m_{кр}) = 0$. Например,

$$\eta(m) = (1 + |m|)^\theta \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi m}{m_{кр}} \right)^\gamma, \quad (9)$$

где θ и γ -- оптимизируемые по I параметры.

$$(\theta^*, \gamma^*) = \arg \underset{\theta, \gamma}{extr} I(\theta, \gamma). \quad (10)$$

Параметр γ влияет на ширину импульсов $\eta(\pm m)$, θ - на несимметрию (рис. 1).

В частности, при $\theta \rightarrow \infty$ оценка (8) равна (4), при $\gamma \rightarrow \infty$ оценка (8) равна (6).

Тестовый пример. Модель:

$$y^*(t) = \beta_1^* x_1^*(t) + \beta_2^* x_2^*(t) + \varepsilon^*(t), \quad \beta_1^* = \beta_2^* = 1;$$

$$R_{x_1 x_2}^*(\tau) = e^{-k\tau}, \quad k = 0, 1; \quad i = 0, 1; \quad R_{x_1 x_2}^*(\tau) = 0, 5,$$

$\varepsilon^*(t)$ -- белый шум с единичной дисперсией. Измерения $x_i(t) = x_i^*(t) + N_{x_i}(t)$, $i = 1, 2$; $y(t) = y^*(t) + N_y(t)$, где помехи $N_{x_i}(t)$ и $N_y(t)$ -- взаимно некоррелированные шумы с соответствующими автокорреляциями $R_{x_i}(\tau) = e^{-\tau}$.

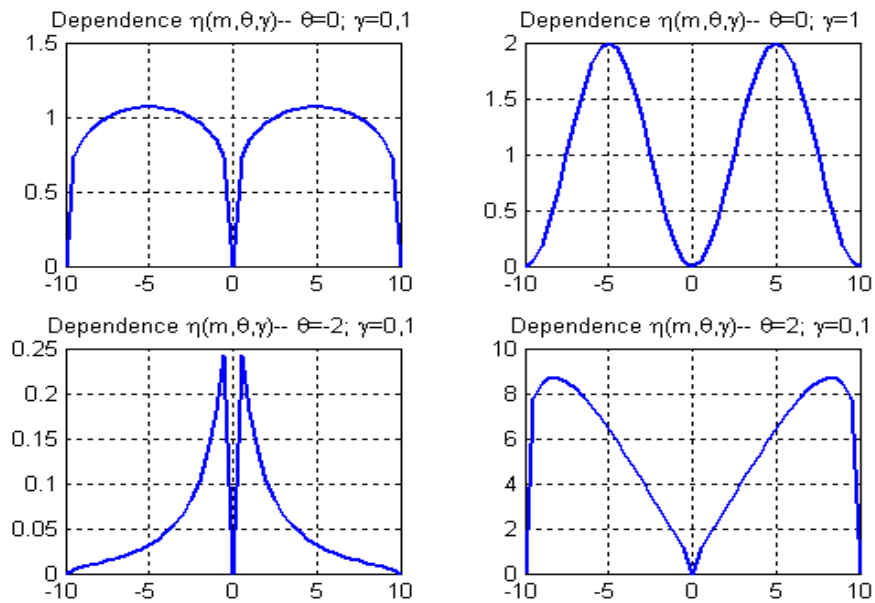


Рис. 1. Зависимость $\eta(m, \theta, \gamma)$.

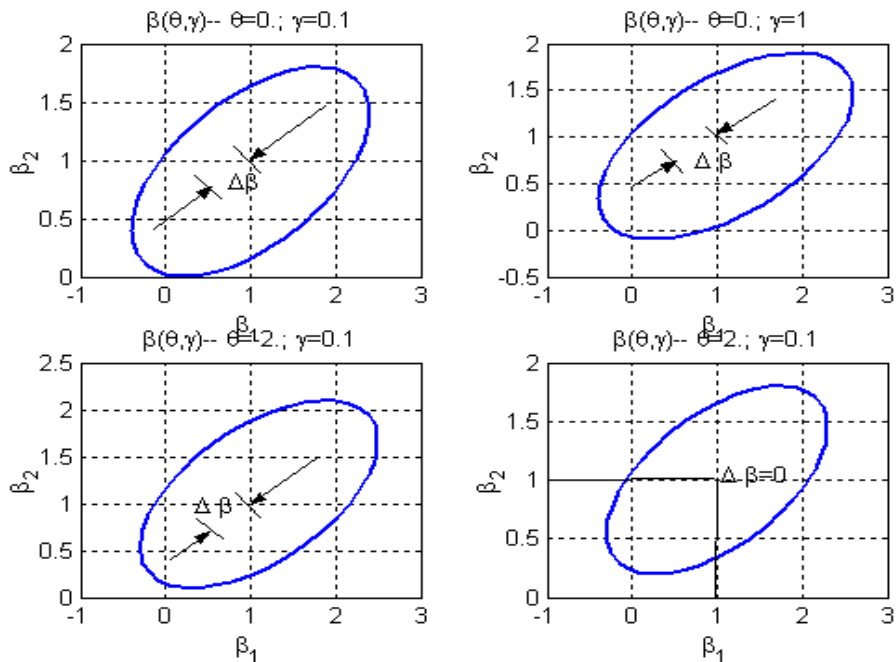


Рис. 2. Зависимость $\hat{\beta}(\theta, \gamma)$.

На рис. 2 приведены эллипсы рассеивания оценок (8) $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$, полученные для 100 выборок по 100 точек и соответствующих рис. 1 значениям θ и γ . На рис. 2а значения $\sigma_{\hat{\beta}}$ и $\Delta\hat{\beta}$ меньше средних, на рис.2б – средние значения $\sigma_{\hat{\beta}}$ и $\Delta\hat{\beta}$; на рис.2в -- $\min \sigma_{\hat{\beta}}$ и $\max \Delta\hat{\beta}$; на рис.2г -- $\max \sigma_{\hat{\beta}}$ и $\min \Delta\hat{\beta}$. Параметр $m_{кр}$ практически определяется из условия вырожденности матрицы A_2 для сглаженных простейшим фильтром значений $x_i(t)$.

2. Метод корректного оценивания в сколь угодно малой области G фазового пространства X^* вектора линейной составляющей (3) нелинейной модели (2).

Естественная (вследствие конечной мощности реальных процессов) гладкость отображения (2) позволяет представить его рядом Тейлора. Для i -й компоненты вектор-функции $y^*(t)$ в отклонениях от центра x_H^* области G , имеем:

$$\Delta y_i^*(k) = \left. \frac{\partial f_i^*}{\partial \mathbf{x}^*} \right|_{\mathbf{x}_H^*} \Delta \mathbf{x}^*(k) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^*(k) \left. \frac{\partial^2 f_i^*}{\partial \mathbf{x}^* \partial \mathbf{x}^{*T}} \right|_{\mathbf{x}_H^*} \Delta \mathbf{x}^{*T}(k) + \dots \quad (11)$$

где: $t_k = k\Delta t$. В векторно-матричном виде имеем:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y}_i^* &= \Delta \mathbf{x}^* \beta_i + \Delta \mathbf{x}^* B_i \Delta \mathbf{y}_i^{*T} + \dots \quad (12) \\ \beta_i &= [\beta_{i1}, \dots, \beta_{in}]^T; i = \overline{1, n}, k = \overline{1, M}; \\ \Delta \mathbf{y}_i^* &= \begin{bmatrix} \Delta y_i^*(1) \\ \dots \\ \Delta y_i^*(M) \end{bmatrix}; \quad \Delta X^* = \begin{bmatrix} \Delta x_1^*(1) \dots \Delta x_n^*(1) \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ \Delta x_1^*(M) \dots \Delta x_n^*(M) \end{bmatrix}; \quad B_i = \begin{bmatrix} b_{i11} \dots b_{iin} \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ b_{im1} \dots b_{imn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Цель идентификации в данном случае состоит в получении достаточно точных оценок вектора β_i в (2) по зашумленным (как и в предыдущем методе) выборкам данных $Y(k)$, $X(k)$. Если область G сузить, растет отношение "шум - сигнал", если расширить ее, растет размерность задачи (от n для линейной модели (3) до $n + n^2$ для квадратичной (12) и т.д.). И в первом и во втором случаях задача оценивания некорректна [3].

Основываясь на фундаментальном свойстве гладкости процессов, можно показать [1], что смещение $\Delta \beta_i$ вследствие приближенности модели (3) относительно точной модели (2) будет также гладкой (а для квадратичной модели – линейной) функцией показателя величины области G . Так как МНК-оценка $\hat{\beta}_i$ при условии квадратичной нелинейности (12) равняется

$$\hat{\beta}_i = Q \Delta Y_i = Q \Delta X \beta_i + Q (\Delta X \cdot B_i \Delta X^T) + \dots \quad (13)$$

где $Q = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T$.

Смещение

$$\Delta \beta_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \cdot (\Delta X \cdot B_i \Delta X^T) \quad (14)$$

является (вследствие усреднения произведений мгновенных значений нормы переменных) гладкой функцией отклонений $\|\Delta X\|$. При $\|\Delta X\| \rightarrow 0$ $\hat{\beta}_i \rightarrow \beta_i$, $\Delta \beta_i \rightarrow 0$.

3. Метод непараметрического оценивания нелинейной статической составляющей динамической модели

В полной модели (2) выделим управляющие переменные $U^*(t)$:

$$\dot{X}^* = f^*(X^*, U^*, t). \quad (16)$$

Для реально ограниченных скоростей $\dot{X}^*(t)$ в ограниченной области G изменения $X^*(t)$ с точностью до $\varepsilon^*(t)$ модель (16) представима в виде

$$\dot{X}^*(t) = AX^*(t) + f[U^*(t)] + \varepsilon^*(t) \quad (17)$$

или, относительно i -й составляющей $x_i^*(t)$ вектор-функции $X^*(t)$ в виде модели Гаммерштейна (1):

$$a_n \frac{d^n x_i^*}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_i^*}{dt^{n-1}} + \dots + x_i^*(t) = f[U^*(t)], \quad (18)$$

где a_j , $j = \overline{1, n}$ и $f(U^*)$ неизвестны.

Задача состоит в определении статической нелинейной зависимости

$$x_i^*(t) = f(U^*) \quad (19)$$

при неизвестных a_j из произвольного динамического режима изменения $X^*(t)$ в G -области.

Произвольность режима не гарантирует линейной независимости переменных при a_j и, как следствие, невырожденности информационной матрицы A^* . Еще большая некорректность возникает в традиционном подходе при аппроксимации $f(U)$ степенным полиномом от U

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^m b_l U^l \quad (20)$$

или системой других квазиортогональных функций

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l(U), \quad (21)$$

когда из уравнения (18) в виде

$$\varepsilon(t) = x_i(t) - \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l[U(t)] + \sum_{j=1}^n a_j \frac{d^j x_i(t)}{dt^j} \quad (22)$$

при неточных $x_i(t)$, $U(t)$ и их производных необходимо определить $m+n$ неизвестных, где числа m и n также неизвестны. Пусть, к примеру, в (18) линейно независимы только первая и вторая производные от $x^*(t)$. Тогда для преодоления этой проблемы воспользуемся априори известным свойством гладкости зависимости $f(U)$. Будем оценивать коэффициенты a_j уравнения (18) не из условия минимума среднего квадрата ошибки (22), а из условия гладкости зависимости $f(U)$ [8]

$$(a_1, a_2) = \arg \min_{(a_1, a_2)} \sum_{k=1}^N \left(\frac{d^r x_{\text{ск}}(t_k)}{dU^r} \right)^2, \quad (23)$$

где r характеризует степень гладкости $f(U)$;

$$x_{\text{ск}}(t_k) = x(t_k) - a_1 \frac{dx(t_k)}{dt} - a_2 \frac{d^2 x(t_k)}{dt^2}$$

-- скомпенсированное по динамике значение $x(t_k)$.

Практически в (23) вместо производных берутся конечные разности соответствующего порядка, которые вычисляются по предварительно сглаженным с помощью сплайнов и упорядоченным по возрастанию U массивам данных.

Тестовый пример. В качестве $f(U)$ взята зависимость

$$f(U) = 4U - 60 \sin(0,065U). \quad (24)$$

Входное воздействие $U(t)$ -- последовательность ступенек:

$$U(t) = U_{\max} \left[-1 + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{16} 1(t - k\Delta t) \right].$$

На $x^*(t)$ наложен 20% «белый шум». Результат совместного МНК-оценивания коэффициентов b_i и a_1, a_2 приведен на рис. 6.

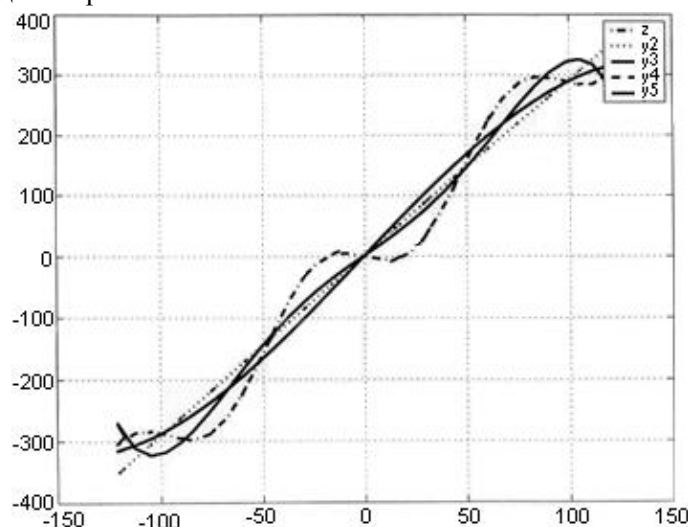


Рис. 3.

Результат непараметрического оценивания нелинейности (24) из условия (23) гладкости $f(U)$ при $r=1,2,3$ приведен на рис. 4.

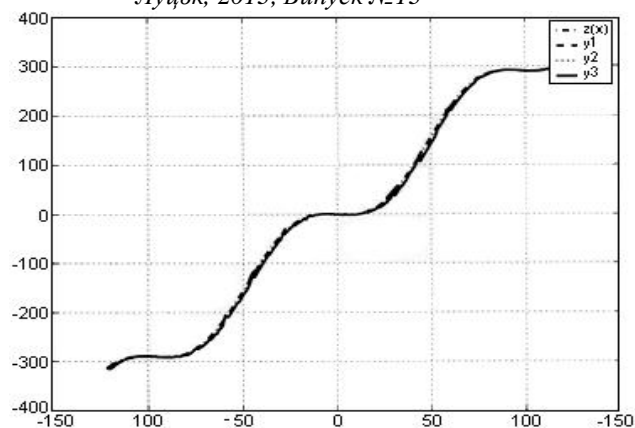


Рис. 4.

Как следует из сопоставления графиков на рисунках непараметрическая оценка $\hat{f}(U)$ с коррекцией динамики из условия (23) существенно ближе к истинной $f(U)$, чем параметрическая МНК-оценка при совместном оценивании коэффициентов линейной и нелинейной части модели Гаммерштейна (18).

Заключение. В статье на конкретных примерах показана эффективность применения предложенных методов для:

- определения аэродинамических коэффициентов ЛА;
- построения нелинейных балансирующих зависимостей из динамики движения ЛА;
- аналитического описания многомерных нелинейных зависимостей, представленных таблично (результатов продувки в аэродинамической трубе).

Дальнейшее развитие работы требует более строгой математической формулировки; применения статистически оптимальных решений; создания современных программных продуктов для широкого применения представленных методов.

1. Два альтернативных подхода к идентификации реальных объектов/А.Н. Сильвестров // Проблемы управления и информатики. --1996, №6.-- С.54--65.
2. An iterative method for identification of nonlinear systems using a Hammerstein model./ K.S. Narendra, P.G. Gallman. // IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-11, p. 546, 1966.
3. Методы решения некорректных задач./ А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин // М: Наука, 1979.—286 с.
4. Дисперсионный анализ./Г. Шеффе// М: Физматгиз, 1963. – 625 с.
5. Идентификация систем/ Л. Льюнг./ Теория для пользователя. – М: Наука, 1991. – 432 с.
6. Идентификация и оптимизация автоматических систем/ А.Н. Сильвестров., П.И. Чинаев // М: Энергия, 1983. – 200 с.
7. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами/А.Г. Ивахненко//К: Техніка, 1975. – 312 с.
8. Модели технологических процессов./ Г.Е. Пухов, Ц.С. Хатиашвили// К: Техніка, 1974. – 223 с.