

УДК 532.516

Г.В. Кит, Н.М. Ліщина, А.Н. Сильвестров

**МЕТОДЫ ЦЕНИВАНИЯ МОДЕЛИ ГАММЕРШТЕЙНА**

*Рассматриваются новые методы несмещенного параметрического оценивания линейной и непараметрического оценивания нелинейной частей модели Гаммерштейна. Приводятся примеры решения задач для каждого из предлагаемых подходов.*

*Ключевые слова: аппроксимация, идентификация, модель Гаммерштейна, оптимизация, сходимость.*

**Кит Г.В., Лищина Н.М., Сильвестров А.Н. Методы оценивания модели Гаммерштейна.** Рассматриваются новые методы несмещенного параметрического оценивания линейной и непараметрического оценивания нелинейной частей модели Гаммерштейна. Приводятся примеры решения задач для каждого из предлагаемых подходов.  
Библ. 8, ил. 10.

**Кит Г.В., Лищина Н.М., Сильвестров А.М. Методи оцінювання моделі Гаммерштейна.** Розглядаються нові методи незміщеного параметричного оцінювання лінійної та непараметричного оцінювання нелінійної частин моделі Гаммерштейна. Наводяться приклади вирішення задач для кожного із підходів, що пропонуються.  
Бібл. 8, іл. 10.

**Kit G.V., Lishchyna N.M., Silvestrov A.N. Methods of estimation model of Hammerstein.** The new methods of nonmoved parametric estimation of linear and nonparametric estimation of nonlinear parts of model of Hammerstein are proposed. Numerical examples are presented.  
Ref. 8, il. 10.

**Введение.**

Подобно математике, где имеются понятия необходимых и достаточных условий (устойчивости, оптимальности и т.п.), в теории идентификации также можно сформулировать два вида условий [1]:

- необходимые – это задача аппроксимации с точностью до  $\varepsilon$  "поведения" объекта идентификации моделью произвольной структуры;
- достаточные, когда в дополнение к необходимым требуется выполнение условия близости структуры и параметров модели к структуре и параметрам реально существующего в объекте (в конечной пространственно-временной области) отображения входных переменных на переменные состояния и выходные переменные.

Например, определение (диагностика) для заданного режима аэродинамических коэффициентов (АДК) летательных аппаратов (ЛА) по данным летных испытаний (ЛИ); определение балансирующих (статических) нелинейных зависимостей ЛА из неопределенной динамики ЛИ; определение нелинейных тарировочных зависимостей  $f(x)$  первичных измерительных преобразователей, физика которых соответствует модели Гаммерштейна [2]

$$\sum \beta_i \frac{d^i y}{dt^i} = f[x(t)], \quad (1)$$

где  $n, \beta_i, f(x)$  неизвестны,  $x(t)$  и  $y(t)$  измеряются с шумами на ограниченном нестационарностью, стоимостью и другими причинами интервале  $T$  времени.

Реальная ситуация, как правило, характеризуется недостаточной статистической представительностью выборки данных, неавтономностью, нелинейностью, нестационарностью объекта идентификации и, как следствие, приближенностью его модели. Стремление повысить адекватность локальных моделей путем сужения пространственно - временной области поведения объекта приводит к возрастанию в измерениях соотношения "шум – сигнал". Стремление учесть нелинейность и параметризовать ее резко расширяет размерность вектора  $\beta$  неизвестных коэффициентов. В обоих случаях имеет место некорректность [3] задачи идентификации.

**1. Метод несмещенного оценивания параметров модели при наличии шумов в измерениях входных и выходных сигналов**

В ограниченной пространственно-временной области  $G$  нелинейная нестационарная динамика реального объекта

$$\dot{\mathbf{x}}^* = f^*(\mathbf{x}^*, t^*), \quad (2)$$

где звездочкой (\*) обозначены точные значения;

вектор-функция  $f$  представима (с точностью до  $\varepsilon^*$ ) линейной моделью

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{x}^* \cdot \beta^* + \varepsilon^*, \quad (3)$$

где  $\mathbf{y}^* = \dot{\mathbf{x}}^*$ ,  $\beta^*$  -- искомые коэффициенты.

Чем уже область  $G$ , тем точнее модель (3), но и тем больше соотношение "шум – сигнал" в измерениях

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^* + N_y; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* + N_x.$$

Известны методы конfluence анализа [4], статистически оптимального нелинейного оценивания (расширенный фильтр Калмана, квазилинеаризация и инвариантное погружение [5]). Однако этим методам необходима информация о вероятностных характеристиках помех и/или они не гарантируют сходимости релаксационного процесса приближения оценок  $\beta$  к  $\beta^*$ .

Простой способ несмещенного оценивания состоит в замене МНК - оценок [5]

$$\hat{\beta} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{y} = A_1^{-1} B_1, \quad (4)$$

которые имеют смещение

$$\Delta \hat{\beta}' = \hat{\beta} - \beta^* = -(A^* + \Delta A_1)^{-1} \Delta A_1 \cdot \beta^*, \quad (5)$$

где  $A^* = \mathbf{x}^{*T} \mathbf{x}^*$ ,  $\Delta A_1 = A_1 - A^*$ , СМНК - оценками [6]

$$\hat{\beta}_m = A_2^{-1} B_2, \quad (6)$$

полученными из условия минимума функционала

$$J(\varepsilon) = \varepsilon_0^T (\varepsilon_m + \varepsilon_{-m}) + (\varepsilon_m + \varepsilon_{-m})^T \varepsilon_0, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_0 = \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 \hat{\beta}_m$ ,  $\varepsilon_{\pm m} = \mathbf{y}_{\pm m} - \mathbf{x}_{\pm m} \cdot \hat{\beta}_m$ ; индексы 0 и  $\pm m$  означают нулевое или сдвинутый во времени на  $m$  отсчетов массив данных.

Если сдвиг  $m$  больше времени корреляции помех в  $\mathbf{x}$ , но меньше критического  $m_{кр}$  [6], когда матрица  $A_2$  вырождена, то оценка (6) будет несмещенной. Чем более гладкой является  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $N_x(t)$  ближе к "белому шуму", тем лучше оценка (6). Если множество сдвигов  $m$  в пределах от 1 до  $m_{кр}$  не единично, то с целью улучшения эффективных оценок можно использовать усредненную по  $m$  оптимально взвешенную функцией  $\eta(m)$  оценку  $\hat{\beta}$  интегрального СМНК:

$$\hat{\beta} = \left( \sum_{-m_{кр}}^{m_{кр}} \eta(m) \right)^{-1} \cdot \sum \eta(m) \cdot \hat{\beta}_m, \quad (8)$$

где выбором  $\eta(m)$  достигается компромисс между смещением и дисперсией оценки (8). В условиях неопределенности характеристик помех вес  $\eta(m)$  оптимизируется по внешнему (проверочному [7], главному [6]) критерию  $I$ .

Задачу синтеза можно параметризовать, задав симметричную относительно  $m=0$  финитную функцию такую, что  $\eta(0) = \eta(\pm m_{кр}) = 0$ . Например,

$$\eta(m) = (1 + |m|)^\theta \cdot \left( 1 - \cos \frac{2\pi m}{m_{кр}} \right)^\gamma, \quad (9)$$

где  $\theta$  и  $\gamma$  -- оптимизируемые по  $I$  параметры.

$$(\theta^*, \gamma^*) = \arg \underset{\theta, \gamma}{extr} I(\theta, \gamma). \quad (10)$$

Параметр  $\gamma$  влияет на ширину импульсов  $\eta(\pm m)$ ,  $\theta$  - на несимметрию (рис. 1).

В частности, при  $\theta \rightarrow \infty$  оценка (8) равна (4), при  $\gamma \rightarrow \infty$  оценка (8) равна (6).

*Тестовый пример.* Модель:

$$y^*(t) = \beta_1^* x_1^*(t) + \beta_2^* x_2^*(t) + \varepsilon^*(t), \quad \beta_1^* = \beta_2^* = 1;$$

$$R_{x_1 x_2}^*(\tau) = e^{-k\tau}, \quad k = 0, 1; \quad i = 0, 1; \quad R_{x_1 x_2}^*(\tau) = 0, 5,$$

$\varepsilon^*(t)$  -- белый шум с единичной дисперсией. Измерения  $x_i(t) = x_i^*(t) + N_{x_i}(t)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $y(t) = y^*(t) + N_y(t)$ , где помехи  $N_{x_i}(t)$  и  $N_y(t)$  -- взаимно некоррелированные шумы с соответствующими автокорреляциями  $R_{x_i}(\tau) = e^{-\tau}$ .

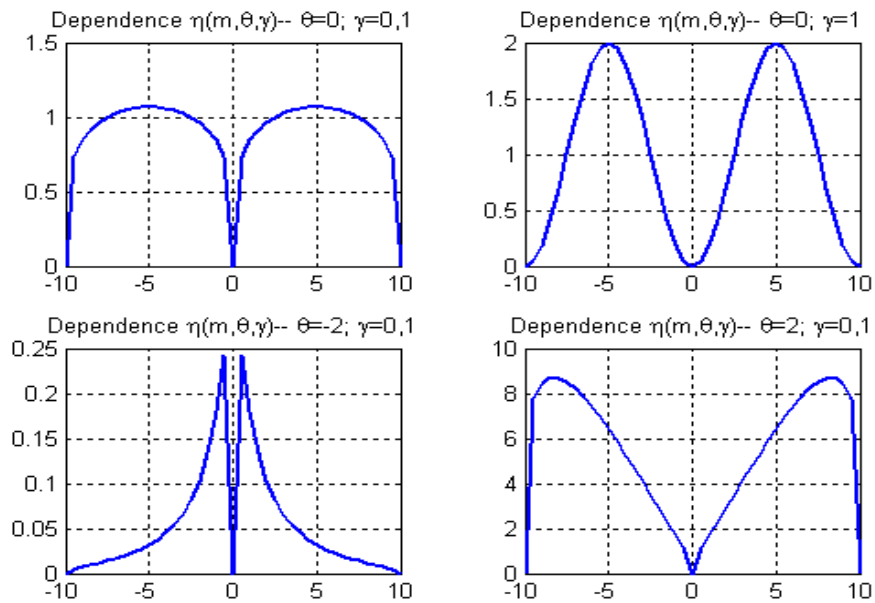


Рис. 1. Зависимость  $\eta(m, \theta, \gamma)$ .

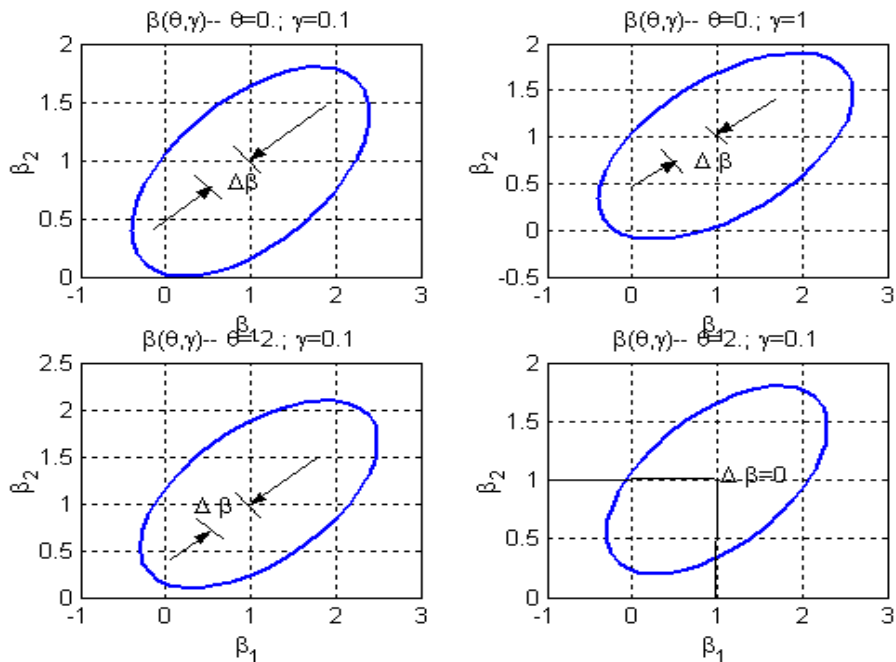


Рис. 2. Зависимость  $\hat{\beta}(\theta, \gamma)$ .

На рис. 2 приведены эллипсы рассеивания оценок (8)  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ , полученные для 100 выборок по 100 точек и соответствующих рис. 1 значениям  $\theta$  и  $\gamma$ . На рис. 2а значения  $\sigma_{\hat{\beta}}$  и  $\Delta\hat{\beta}$  меньше средних, на рис.2б – средние значения  $\sigma_{\hat{\beta}}$  и  $\Delta\hat{\beta}$ ; на рис.2в --  $\min \sigma_{\hat{\beta}}$  и  $\max \Delta\hat{\beta}$ ; на рис.2г --  $\max \sigma_{\hat{\beta}}$  и  $\min \Delta\hat{\beta}$ . Параметр  $m_{кр}$  практически определяется из условия вырожденности матрицы  $A_2$  для сглаженных простейшим фильтром значений  $x_i(t)$ .

**2. Метод корректного оценивания в сколь угодно малой области G фазового пространства  $X^*$  вектора линейной составляющей (3) нелинейной модели (2).**

Естественная (вследствие конечной мощности реальных процессов) гладкость отображения (2) позволяет представить его рядом Тейлора. Для  $i$ -й компоненты вектор-функции  $y^*(t)$  в отклонениях от центра  $x_H^*$  области  $G$ , имеем:

$$\Delta y_i^*(k) = \left. \frac{\partial f_i^*}{\partial \mathbf{x}^*} \right|_{\mathbf{x}_H^*} \Delta \mathbf{x}^*(k) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^*(k) \left. \frac{\partial^2 f_i^*}{\partial \mathbf{x}^* \partial \mathbf{x}^{*T}} \right|_{\mathbf{x}_H^*} \Delta \mathbf{x}^{*T}(k) + \dots \quad (11)$$

где:  $t_k = k\Delta t$ . В векторно-матричном виде имеем:

$$\Delta \mathbf{y}_i^* = \Delta \mathbf{x}^* \beta_i + \Delta \mathbf{x}^* B_i \Delta \mathbf{y}_i^{*T} + \dots \quad (12)$$

$$\beta_i = [\beta_{i1}, \dots, \beta_{in}]^T; i = \overline{1, n}, k = \overline{1, M};$$

$$\Delta \mathbf{y}_i^* = \begin{bmatrix} \Delta y_i^*(1) \\ \dots \\ \Delta y_i^*(M) \end{bmatrix}; \Delta X^* = \begin{bmatrix} \Delta x_1^*(1) \dots \Delta x_n^*(1) \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ \Delta x_1^*(M) \dots \Delta x_n^*(M) \end{bmatrix}; B_i = \begin{bmatrix} b_{i11} \dots b_{in} \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ b_{im1} \dots b_{imn} \end{bmatrix}.$$

Цель идентификации в данном случае состоит в получении достаточно точных оценок вектора  $\beta_i$  в (2) по зашумленным (как и в предыдущем методе) выборкам данных  $Y(k)$ ,  $X(k)$ . Если область  $G$  сузить, растет отношение "шум - сигнал", если расширить ее, растет размерность задачи (от  $n$  для линейной модели (3) до  $n + n^2$  для квадратичной (12) и т.д.). И в первом и во втором случаях задача оценивания некорректна [3].

Основываясь на фундаментальном свойстве гладкости процессов, можно показать [1], что смещение  $\Delta \beta_i$  вследствие приближенности модели (3) относительно точной модели (2) будет также гладкой (а для квадратичной модели – линейной) функцией показателя величины области  $G$ . Так как МНК-оценка  $\hat{\beta}_i$  при условии квадратичной нелинейности (12) равняется

$$\hat{\beta}_i = Q \Delta Y_i = Q \Delta X \beta_i + Q (\Delta X \cdot B_i \Delta X^T) + \dots \quad (13)$$

где  $Q = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T$ .

Смещение

$$\Delta \beta_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \cdot (\Delta X \cdot B_i \Delta X^T) \quad (14)$$

является (вследствие усреднения произведений мгновенных значений нормы переменных) гладкой функцией отклонений  $\|\Delta X\|$ . При  $\|\Delta X\| \rightarrow 0$   $\hat{\beta}_i \rightarrow \beta_i$ ,  $\Delta \beta_i \rightarrow 0$ .

### 3. Метод непараметрического оценивания нелинейной статической составляющей динамической модели

В полной модели (2) выделим управляющие переменные  $U^*(t)$ :

$$\dot{X}^* = f^*(X^*, U^*, t). \quad (16)$$

Для реально ограниченных скоростей  $\dot{X}^*(t)$  в ограниченной области  $G$  изменения  $X^*(t)$  с точностью до  $\varepsilon^*(t)$  модель (16) представима в виде

$$\dot{X}^*(t) = AX^*(t) + f[U^*(t)] + \varepsilon^*(t) \quad (17)$$

или, относительно  $i$ -й составляющей  $x_i^*(t)$  вектор-функции  $X^*(t)$  в виде модели Гаммерштейна (1):

$$a_n \frac{d^n x_i^*}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_i^*}{dt^{n-1}} + \dots + x_i^*(t) = f[U^*(t)], \quad (18)$$

где  $a_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  и  $f(U^*)$  неизвестны.

Задача состоит в определении статической нелинейной зависимости

$$x_i^*(t) = f(U^*) \quad (19)$$

при неизвестных  $a_j$  из произвольного динамического режима изменения  $X^*(t)$  в  $G$ -области.

Произвольность режима не гарантирует линейной независимости переменных при  $a_j$  и, как следствие, невырожденности информационной матрицы  $A^*$ . Еще большая некорректность возникает в традиционном подходе при аппроксимации  $f(U)$  степенным полиномом от  $U$

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^m b_l U^l \quad (20)$$

или системой других квазиортогональных функций

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l(U), \quad (21)$$

когда из уравнения (18) в виде

$$\varepsilon(t) = x_i(t) - \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l[U(t)] + \sum_{j=1}^n a_j \frac{d^j x_i(t)}{dt^j} \quad (22)$$

при неточных  $x_i(t)$ ,  $U(t)$  и их производных необходимо определить  $m+n$  неизвестных, где числа  $m$  и  $n$  также неизвестны. Пусть, к примеру, в (18) линейно независимы только первая и вторая производные от  $x^*(t)$ . Тогда для преодоления этой проблемы воспользуемся априори известным свойством гладкости зависимости  $f(U)$ . Будем оценивать коэффициенты  $a_j$  уравнения (18) не из условия минимума среднего квадрата ошибки (22), а из условия гладкости зависимости  $f(U)$  [8]

$$(a_1, a_2) = \arg \min_{(a_1, a_2)} \sum_{k=1}^N \left( \frac{d^r x_{\text{ск}}(t_k)}{dU^r} \right)^2, \quad (23)$$

где  $r$  характеризует степень гладкости  $f(U)$ ;

$$x_{\text{ск}}(t_k) = x(t_k) - a_1 \frac{dx(t_k)}{dt} - a_2 \frac{d^2 x(t_k)}{dt^2}$$

-- скомпенсированное по динамике значение  $x(t_k)$ .

Практически в (23) вместо производных берутся конечные разности соответствующего порядка, которые вычисляются по предварительно сглаженным с помощью сплайнов и упорядоченным по возрастанию  $U$  массивам данных.

*Тестовый пример.* В качестве  $f(U)$  взята зависимость

$$f(U) = 4U - 60 \sin(0,065U). \quad (24)$$

Входное воздействие  $U(t)$  -- последовательность ступенек:

$$U(t) = U_{\max} \left[ -1 + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{16} 1(t - k\Delta t) \right].$$

На  $x^*(t)$  наложен 20% «белый шум». Результат совместного МНК-оценивания коэффициентов  $b_i$  и  $a_1, a_2$  приведен на рис. 6.

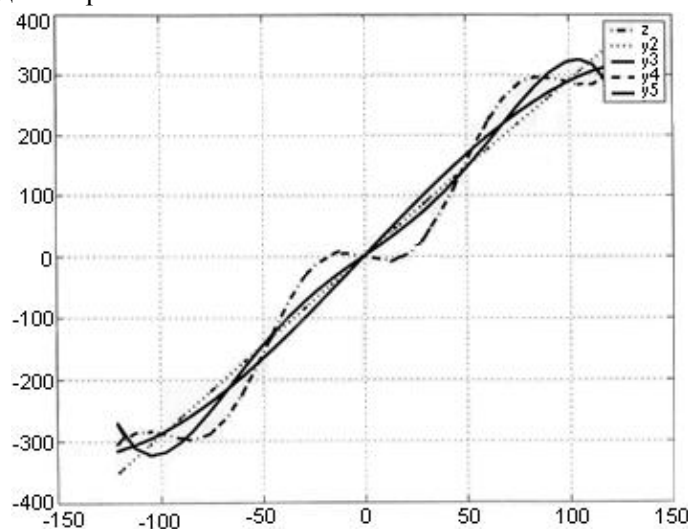


Рис. 3.

Результат непараметрического оценивания нелинейности (24) из условия (23) гладкости  $f(U)$  при  $r=1,2,3$  приведен на рис. 4.

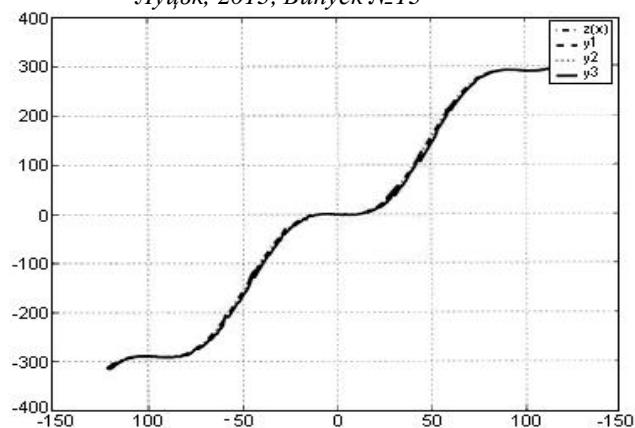


Рис. 4.

Как следует из сопоставления графиков на рисунках непараметрическая оценка  $\hat{f}(U)$  с коррекцией динамики из условия (23) существенно ближе к истинной  $f(U)$ , чем параметрическая МНК-оценка при совместном оценивании коэффициентов линейной и нелинейной части модели Гаммерштейна (18).

**Заключение.** В статье на конкретных примерах показана эффективность применения предложенных методов для:

- определения аэродинамических коэффициентов ЛА;
- построения нелинейных балансирующих зависимостей из динамики движения ЛА;
- аналитического описания многомерных нелинейных зависимостей, представленных таблично (результатов продувки в аэродинамической трубе).

Дальнейшее развитие работы требует более строгой математической формулировки; применения статистически оптимальных решений; создания современных программных продуктов для широкого применения представленных методов.

1. Два альтернативных подхода к идентификации реальных объектов/А.Н. Сильвестров // Проблемы управления и информатики. --1996, №6.-- С.54--65.
2. An iterative method for identification of nonlinear systems using a Hammerstein model./ K.S. Narendra, P.G. Gallman. // IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-11, p. 546, 1966.
3. Методы решения некорректных задач./ А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин // М: Наука, 1979.—286 с.
4. Дисперсионный анализ./Г. Шеффе// М: Физматгиз, 1963. – 625 с.
5. Идентификация систем/ Л. Льюнг./ Теория для пользователя. – М: Наука, 1991. – 432 с.
6. Идентификация и оптимизация автоматических систем/ А.Н. Сильвестров., П.И. Чинаев // М: Энергия, 1983. – 200 с.
7. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами/А.Г. Ивахненко//К: Техніка, 1975. – 312 с.
8. Модели технологических процессов./ Г.Е. Пухов, Ц.С. Хатиашвили// К: Техніка, 1974. – 223 с.