

УДК 539.3

О.В. Гуда

Луцький національний технічний університет

Алгоритм розрахунку власних частот транстропних пластин з урахуванням поперечного зсуву та деформацій поперечного обтиснення

Гуда О.В. Алгоритм розрахунку власних частот транстропних пластин з урахуванням поперечного зсуву та деформацій поперечного обтиснення. У даній роботі на основі рівнянь руху, які враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення, запропоновано алгоритм розрахунку поперечних коливань круглої пластинки. Здійснено розрахунок вільних коливань пластинки, що знаходиться під шаром рідини. Наведено аналіз розрахунків власних частот пластинки.

Ключові слова: ізотропні та транстропні пластини, поперечний зсув, поперечне обтиснення, згинальні моменти, поперечні сили, прогин, напруження, коливання.

Форм. 16. Табл. 9. Рис. 1. Літ. 6.

Гуда О.В. Алгоритм расчета собственных частот транстропных пластин с учетом поперечного сдвига и деформаций поперечного обжатия. В данной работе с помощью уравнений движения, которые учитывают деформации поперечного сдвига и обжатия, предложен алгоритм расчета поперечных колебаний круглой пластинки. Произведен расчет свободных колебаний пластинки под шаром жидкости. Приведен анализ расчетов собственных частот пластинки.

Ключевые слова: изотропные и транстропные пластины, поперечный сдвиг, поперечное обжатие, сгибальные моменты, поперечные силы, изгиб, напряжение, колебания.

Guda O.V. The algorithm of the calculation of natural frequencies of transtropic plates, considering transverse shear and deformations of transverse compression. In this work, based on the equations of motion, which take into account the deformations of transverse shear and compression, the algorithm of the calculation of transverse vibrations of a circular plate was proposed. The calculation of free vibrations of a plate under a layer of liquid, was realized. The analysis of the calculation of natural frequencies of the plate is shown.

Key words: isotropic and transtropic plates, transverse shear, transverse compression, bending moments, transverse forces, deflection, stress, vibrations.

Постановка проблеми. Проектування і розрахунок сучасних тонкостінних елементів конструкцій, якими є композитні балки та пластини середньої товщини, потребує підвищеної точності розрахунків для забезпечення міцності, довговічності та надійності їх в експлуатації. За таких розрахунків забезпечення елементів конструкції достатньою контактною міцністю та тріщиностійкістю є актуальною науково-технічною проблемою.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У багатьох працях вітчизняних та зарубіжних дослідників при розв'язанні названих проблем використовують розрахункові рівняння пластин та оболонок у неklasичній постановці. Проте більшість існуючих неklasичних теорій пластин і оболонок враховують лише деформацію поперечного зсуву та не враховують поперечне обтиснення, або враховують частково (теорії С.О. Амбарцумяна, В.З. Власова, Х.М. Муштарі, В.Г. Піскунова, О.О. Расказова, О.Ф. Рябова, Р. Крістенсена та ін.). Проте, як показують дослідження, у розрахунках за дії контактних та локалізованих навантажень, слід урахувувати поперечне обтиснення якнайповніше, що дозволяє задовольняти більшості умов на поверхні контакту пластини із іншими тілами чи основами. Впливу поперечного обтиснення на вищі частоти коливань пластин присвячено значно менше робіт. У багатьох випадках такі дослідження проводились у постановках просторової задачі теорії пружності.

Метою дослідження є побудова алгоритму розрахунку руху транстропних пластин середньої товщини, що враховує як ефекти поперечного зсуву, так і деформацію поперечного обтиснення.

Основні результати дослідження. Розглянемо вільні поперечні коливання трансверсально-ізотропної пластинки. Система диференціальних рівнянь вільних поперечних коливань трансверсально-ізотропної пластинки, буде мати вигляд [5,6]:

$$D\Delta^2 \tilde{w}(r, \theta, t) + m(1 - \varepsilon_1 \Delta) \frac{\partial^2 \tilde{w}(r, \theta, t)}{\partial t^2} + m\varepsilon' \frac{\rho}{4G} \frac{\partial^4 \tilde{w}(r, \theta, t)}{\partial t^4} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \Omega - k^2 \Omega = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2},$$

$$\text{де } \Delta = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right].$$

Записавши розв'язки системи рівнянь (1) для вільних коливань пластинки у вигляді:

$$w(r, \theta, t) = w(r) \cos n\theta \cos \omega t, \quad \Omega(r, \theta, t) = f(r) \sin n\theta \cos \omega t, \quad (2)$$

одержимо рівняння для власних форм коливань, знехтувавши в першому рівнянні (1) членом з четвертою похідною за змінною t , вважаючи його малим по відношенню до інших членів з похідними нижчого порядку, одержимо

$$D\Delta_n\Delta_n w(r) + m(1 + \varepsilon\Delta_n)\omega_i^2 w(r) = 0, \quad \Delta_n f(r) - k^2 f(r) = 0, \quad (3)$$

де ω_i – кругова частота власних коливань пластинки, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – кількість хвиль серединної

площини пластинки в кільцевому напрямку, $\Delta_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}$.

Загальний розв'язок системи (1) можна подати в вигляді:

$$\begin{aligned} w(r) &= C_1 J_n(\alpha_i r) + C_2 Y_n(\alpha_i r) + C_3 I_n(\beta_i r) + C_4 K_n(\beta_i r), \\ f(r) &= C_5 I_n(k_i r) + C_6 K_n(k_i r), \end{aligned} \quad (4)$$

де J_n, Y_n, I_n, K_n – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу, C_i – сталі, які знаходимо з початкових та граничних умов.

З характеристичного рівняння для першого диференціального рівняння (3) маємо:

$$\alpha_i = \left(\sqrt{\omega_i^2 \frac{m}{D} + \left(\frac{\varepsilon_1 \omega_i^2 m}{2D} \right)^2} + \varepsilon_1 \omega_i^2 \frac{m}{2D} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_i = \left(\sqrt{\omega_i^2 \frac{m}{D} + \left(\frac{\varepsilon_1 \omega_i^2 m}{2D} \right)^2} - \varepsilon_1 \omega_i^2 \frac{m}{2D} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Використовуючи рівняння (5), отримаємо вираз для знаходження частоти власних коливань пластинки:

$$\omega_i = \alpha_i^2 \sqrt{\frac{D}{m}} (1 + \varepsilon_1 \alpha_i^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Якщо розглядається суцільна пластинка радіуса R , то в цьому випадку слід прийняти $C_2 = C_4 = C_6 = 0$. Тоді, врахувавши (2) та (4), отримаємо:

$$\begin{aligned} w(r, \theta, t) &= (C_1 J_n(\alpha_i r) + C_3 I_n(\beta_i r)) \cos n\theta \cos \omega_i t, \\ \Omega(r, \theta, t) &= C_5 I_n(k_i r) \sin n\theta \cos \omega_i t. \end{aligned} \quad (6)$$

У випадку шарнірного опертя по контуру $r = R$ граничні умови запишемо наступним чином:

$$w(R, \theta, t) = 0, \quad M_r = 0, \quad Q_\theta = 0, \quad (7)$$

$$\text{де } M_r = -D \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} \right) - \varepsilon_0 h^2 q_2 + 0.8D(1-\nu) \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \Omega - \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right),$$

$$Q_\theta = K' \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_\tau}{\partial \theta} + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \tilde{w}) - \frac{\varepsilon_1 h^2}{r} \frac{\partial q_2}{\partial \theta} + K' \frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

$$q_2 = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha_i^2 \beta_i^2 D (C_1 J_n(\alpha_i r) + C_3 I_n(\beta_i r)) \cos n\theta \cos \omega_i t,$$

$$\tilde{w} = w + \frac{\varepsilon_2 q_2 h^4}{D}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{20(1-\nu)} \left(4 \frac{E}{G'} - \nu''(7-\nu) \right), \quad \varepsilon_1 = \frac{2}{5} (1-0.75\nu^*) \frac{\tilde{E}}{G'}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{20} (1-\nu^*) \frac{\tilde{E}}{E'};$$

$$\tilde{E} = E / (1-\nu^2); \quad \nu^* = 0.5\nu''G' / G; \quad w_\tau = -\frac{5}{4} \varepsilon_\tau h^2 \Delta w - \frac{\varepsilon_1 h^2}{r} q_2 - \frac{\varepsilon_2 h^4}{r} \Delta q_2, \quad \varepsilon_\tau = 0.4 \frac{\tilde{E}}{G'},$$

$$K' = \frac{4}{3} G' h, \quad k^2 = 2.5 h^{-2} G' / G, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \text{оператор Лапласа}, \quad D = \frac{2}{3} \frac{E h^3}{(1-\nu^2)}; \quad R \text{ i}$$

$2h$ – радіус і товщина пластинки.

З граничних умов (7) отримуємо систему трьох однорідних рівнянь відносно сталих інтегрування C_1, C_3, C_5 . Розв'язуючи дану систему, отримаємо наступне трансцендентне рівняння:

$$(\alpha_{0i}^2 + \beta_{0i}^2) \left(\frac{0,4n^2 E}{G'(1+\nu)} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{k_{0i} \frac{I_{n-1}(k_{0i})}{I_n(k_{0i})} - n} \right) - 1 \right) = (1-\nu) \left(\alpha_{0i} \frac{J_{n-1}(\alpha_{0i})}{J_n(\alpha_{0i})} - \beta_{0i} \frac{I_{n-1}(\beta_{0i})}{I_n(\beta_{0i})} \right). \quad (8)$$

Тут $\alpha_{0i} = R\alpha_i$, $\beta_{0i} = R\beta_i$, $k_{0i} = Rk_i$. Між коренями α_i та β_i існує зв'язок: $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{1 + \varepsilon\alpha_i^2}}$.

На основі наведених вище формул та рівнянь знайдено корені рівняння (8) та відповідні їм частоти $\tilde{\omega}_i = \sqrt{\frac{m}{D}}\omega_i$. Отримані результати, залежно від відношень G/G' та товщини пластини, подані в таблицях 1–3:

Таблиця 1. Перші частоти вільних коливань пластинки за різних матеріалів
($h/R = 0.05$)
Авторська розробка

n	$G/G', h/R = 0.05$							
	0		1		2		5	
	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$
0	2,262	5,102	2,2619	5,065	2,2618	5,029	2,2614	4,924
	5,4579	29,304	5,4577	28,165	5,4574	27,148	5,4567	24,654
	8,6126	71,278	8,6122	65,179	8,6118	60,418	8,6108	50,659
1	3,727	13,784	3,727	13,522	3,726	13,268	3,725	12,595
	6,9606	47,188	6,961	44,369	3,96	41,988	6,959	36,65
	10,1353	97,285	10,135	86,553	10,134	78,725	10,133	63,903
2	5,0596	25,241	5,0587	24,38	5,0578	23,602	5,055	21,645
	8,3715	67,486	8,3708	61,968	8,37	57,611	8,3677	48,565
	11,586	125,163	11,5852	108,378	11,5845	96,926	11,5823	76,606

Таблиця 2. Перші частоти вільних коливань пластинки за різних матеріалів
($h/R = 0.1$)
Авторська розробка

n	$G/G', h/R = 0.1$							
	0		1		2		5	
	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$
0	2,2603	5,052	2,2598	4,911	2,2594	4,782	2,258	4,448
	5,4544	27,948	5,4535	24,505	5,4526	22,083	5,4502	17,656
	8,6077	64,206	8,6065	50,19	8,6055	42,584	8,6027	31,385
1	3,724	13,457	3,722	12,54	3,720	11,788	3,716	10,15
	6,9563	43,871	6,955	36,365	6,953	31,73	6,946	24,206
	10,1297	84,942	10,1282	63,236	10,127	52,588	10,1229	37,89
2	5,0558	24,213	5,0521	21,256	5,0484	19,567	5,0364	15,844
	8,3664	61,079	8,3635	48,126	8,3606	40,972	8,3518	30,304
	11,5802	106,008	11,5777	75,742	11,5713	62,027	11,568	44,009

Таблиця 3. Перші частоти вільних коливань пластинки за різних матеріалів
($h/R = 0.2$)
Авторська розробка

n	$G/G', h/R = 0.2$							
	0		1		2		5	
	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$
0	2,2538	4,863	2,2521	4,41	2,251	4,065	2,2457	3,367
	5,4434	23,951	5,4411	17,435	5,439	14,376	5,4336	10,262

	8,5963	48,483	8,5944	30,94	8,5927	24,513	8,5891	16,844
1	3,7136	12,35	3,707	10,038	3,701	8,667	3,684	6,511
	6,9441	35,325	6,939	23,887	6,936	19,228	6,925	13,394
	10,1188	60,829	10,116	37,341	10,113	29,302	10,106	19,963
2	5,0439	21,087	5,0282	15,654	5,0103	12,973	4,9258	9,184
	8,3544	46,534	8,3439	29,879	8,3322	23,687	8,2807	16,207
	11,5702	72,634	11,5623	43,362	11,5536	33,803	11,516	22,849

Якщо в рівнянні (8) покласти величини $\frac{E}{G'} = 0$, $\nu'' = 0$, та виконати граничний перехід при $k_{0i} \rightarrow \infty$, то отримаємо відповідне трансцендентне рівняння класичної теорії тонких пластин:

$$I_{n-1}(\alpha_{0i})J_n(\alpha_{0i}) - I_n(\alpha_{0i})J_{n-1}(\alpha_{0i}) = \frac{2\alpha_{0i}}{I_n(\alpha_{0i})J_n(\alpha_{0i})},$$

розв'язки якого подані в наступній табл. 4:

Таблиця 4. Перші частоти вільних коливань пластинки в класичній теорії

Розроблено за [1]

$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$
2,2215	4,9350	3,7280	13,898	5,0729	25,734
5,4516	29,7199	6,9627	48,479	8,3776	70,184
8,6114	74,1562	10,1377	102,773	11,59074	134,345

Аналіз числових даних, наведених у таблицях 1–4 показує, що при збільшенні товщини пластинки від $h/R = 0.05$ до $h/R = 0.2$ усі перші три частоти мають стійку тенденцію до зниження порівняно з результатами класичної теорії тонких пластинок. Наприклад, для випадку $n = 1$ (табл. 4) частоти $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ і $\tilde{\omega}_3$, пораховані за рівняннями теорії Кірхгофа-Лява, відповідно дорівнюють 13,9; 48,5 та 102,8. Тоді, як за уточненими рівняннями для ізотропної пластинки ($G/G' = 1, \nu = 0.3$) відповідні результати (табл. 3, $h/R = 0.2$) будуть: 10,0; 23,9 та 37,3. Для трансверсальної плити ($G/G' = 5$) тієї ж самої товщини відповідні частоти зменшуються ще більше – до величин: 6,5; 13,4; 20,0, тобто перша частота зменшується більше ніж удвічі, друга в 3,6 рази, а третя – більше ніж у 5 раз порівняно із класичною теорією. У випадку трансверсально-ізотропних пластин явище резонансу може виникнути значно швидше, ніж це передбачається класичною теорією Кірхгофа-Лява, яка фактично не може виявити першу частоту. Тенденція завищення значень перших частот класичною теорією була підтверджена Г.Т. Грінченком [4] за допомогою тривимірних рівнянь теорії пружності.

Застосуємо даний алгоритм відшукування власних частот до випадку пластинки, що знаходиться під шаром рідини.

Нехай кругла однорідна трансверсально-ізотропна пластинка ($0 \leq r \leq R$), що лежить в горизонтальній площині $z = 0$ і немає опори в середині опорного контуру, знаходиться під шаром рідини, яка не стискається і займає обмежений об'єм $-h \leq z \leq h$; $0 \leq r \leq cR$; $c \geq 1$ (рис.1). Пластинка може бути навантажена динамічним навантаженням $q(r, t)$.

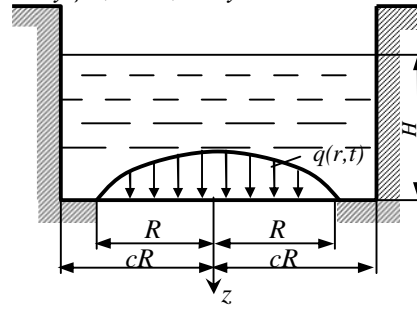


Рис.1. Кругла трансверсально-ізоотропна пластинка під шаром рідини

Розроблено за №3

Система диференціальних рівнянь вільних поперечних осесиметричних коливань пластинки, з урахуванням [2] та системи рівнянь (1), при взаємодії з рідиною (у випадку $q(r,t) = 0$) буде мати вигляд:

$$\frac{D}{R^4} \Delta^2 \tilde{w}(\rho, t) + m \left(1 - \frac{\Delta'}{R^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}(\rho, t)}{\partial t^2} + m \varepsilon' \frac{\gamma_n}{G} \frac{\partial^4 \tilde{w}(\rho, t)}{\partial t^4} = -\gamma_p \frac{\partial \varphi(\rho, \xi, t)}{\partial t} \Big|_{\xi=0}; \quad (9)$$

$$\left(\Delta + \frac{R^2}{H^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \varphi(\rho, \zeta, t) = 0, \quad (0 \leq \rho \leq c, 0 < \zeta \leq 1); \quad \frac{\partial \varphi(\rho, 1, t)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq \rho \leq c);$$

$$\frac{\partial \varphi(c, \zeta, t)}{\partial \rho} = 0 \quad (0 \leq \zeta \leq 1); \quad \frac{\partial \varphi(\rho, 0)}{\partial \zeta} = -HU(\rho) \frac{\partial w(\rho, t)}{\partial t}; \quad U(\rho) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho \leq 1, \\ 0, & 1 \leq \rho \leq c, \end{cases}$$

де $\Delta = \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$; $0 \leq \rho \leq 1$, $t > -\infty$, $\rho = \frac{r}{R}$, $\zeta = \frac{z}{H}$; γ_p – густина рідини, $\varphi(\rho, \zeta, t)$ – потенціал швидкості рідини; H – висота шару рідини.

Головні коливання можна записати в вигляді:

$$w(\rho, t) = w(\rho) \sin \omega_i t, \quad \varphi(\rho, \zeta, t) = \varphi(\rho, \zeta) \cos \omega_i t, \quad (10)$$

де ω_i – частота власних коливань.

Аналогічно, для визначення функцій $w(\rho)$ і $\varphi(\rho, \zeta)$ скористаємося рівнянням (9):

$$\frac{D}{R^4} \Delta \Delta w(\rho) + m \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon} \Delta}{R^2} \right) \omega_i^2 w(\rho) = \gamma_p \omega_i \varphi(\rho, \xi) \Big|_{\xi=0}; \quad (11)$$

$$\varphi(\rho, 1) = 0 \quad (0 \leq \rho \leq c); \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{1}{3} h^2 (1 + 1.7 A');$$

$$\left(\Delta + \frac{R^2}{H^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \varphi(\rho, \zeta) = 0, \quad (0 \leq \rho \leq c, 0 < \zeta \leq 1); \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi(c, \zeta)}{\partial \rho} = 0 \quad (0 \leq \zeta \leq 1); \quad \frac{\partial \varphi(\rho, 0)}{\partial \zeta} = -HU(\rho) \omega_i w(\rho);$$

В роботах [2, 3] вираз для потенціалу швидкостей $\varphi(\rho, \zeta)$ було запропоновано у вигляді

$$\varphi(\rho, \zeta) = \frac{2\omega_i R}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho \xi_n) \operatorname{sh} \left[\frac{H \xi_n}{R} (1 - \zeta) \right]}{\xi_n \operatorname{ch} \frac{H \xi_n}{R} J_0^2(c \xi_n)} \int_0^1 \rho w(\rho) J_0(\rho \xi_n) d\rho \quad (13)$$

в якому $\{\xi_n\}$ – невід'ємні корені рівняння $J_1(c \xi_n) = 0$.

Коренями відповідного характеристичного рівняння є:

$$\alpha_i = R \left(\sqrt{\omega_i^2 \frac{m}{D} \left(1 + \frac{m_i}{m}\right) + \left(\frac{\bar{\varepsilon}\omega_i^2 m}{2D}\right)^2} + \bar{\varepsilon}\omega_i^2 \frac{m}{2D} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_i = R \left(\sqrt{\omega_i^2 \frac{m}{D} \left(1 + \frac{m_i}{m}\right) + \left(\frac{\bar{\varepsilon}\omega_i^2 m}{2D}\right)^2} - \bar{\varepsilon}\omega_i^2 \frac{m}{2D} \right)^{\frac{1}{2}},$$
(14)

де $m_i = \frac{2\gamma_p R}{c^2 \|G(\mu_i)\|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{tg \frac{H\xi_n}{R}}{\xi_n J_0^2(c\xi_n)} \left[\int_0^1 \rho G(\rho\mu_i) J_0(\rho\xi_n) d\rho \right]^2$ – приєднана маса.

З рівняння (14), отримаємо вираз для знаходження частоти власних коливань пластинки з урахуванням впливу рідини:

$$\omega_i = \frac{\alpha_i^2}{R^2} \sqrt{\frac{D}{m} \left(1 + \frac{m_i}{m} + \frac{\bar{\varepsilon}\alpha_i^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

або у безрозмірному вигляді – $\tilde{\omega}_i = \alpha_i^2 \left(1 + \frac{m_i}{m} + \frac{\bar{\varepsilon}\alpha_i^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, де $\omega_i = R^2 \sqrt{\frac{m}{D}} \omega_i$.

Враховуючи граничні умови в випадку шарнірного оперття, отримаємо наступне трансцендентне рівняння для визначення власних частот:

$$\left(\alpha_i \frac{J_1(\alpha_i)}{J_0(\alpha_i)} + \beta_i \frac{I_1(\beta_i)}{I_0(\beta_i)} \right) \left(1 + \frac{m\varepsilon\varepsilon' \omega_i^2 R^2}{(1-\nu)D} \right) - \frac{\varepsilon'}{1-\nu} \left(\alpha_i^3 \frac{J_1(\alpha_i)}{J_0(\beta_i)} - \beta_i^3 \frac{I_1(\beta_i)}{I_0(\beta_i)} \right) = \frac{\alpha_i^2 + \beta_i^2}{1-\nu}. \quad (15)$$

За допомогою рівняння (15) знаходимо корені α_i та β_i .

Таблиця 5. Частоти власних коливань пластинки для $m_i/m = 0$, $H/h = 44.5$, $i = 1, 2, 3$
 Авторська розробка

E/G'	0		2.6			5		
h/R	α_i	ω_i^*	α_i	ω_i^*	$\tilde{\omega}_i$	α_i	ω_i^*	$\tilde{\omega}_i$
0.05	2.2215	4.935	2.223	4.911	4.894	2.224	4.881	4.867
	5.4516	29.720	5.455	28.691	28.136	5.457	27.642	27.219
	8.6114	74.156	8.616	68.102	65.230	8.619	62.771	60.833
0.1	2.2215	4.935	2.227	4.839	4.775	2.231	4.731	4.680
	5.4516	29.720	5.463	26.145	24.574	5.469	23.321	22.350
	8.6114	74.156	8.626	56.172	50.357	8.632	46.147	43.229
0.2	2.2215	4.935	2.242	4.582	4.376	2.256	4.244	4.104
	5.4516	29.720	5.484	20.184	17.620	5.494	15.898	14.739
	8.6114	74.156	8.645	37.217	31.153	8.648	27.395	25.050

Дані розрахунків частот власних коливань пластинки $\tilde{\omega}_i$ в залежності від її товщини та відношень $\frac{m_i}{m}$, $\frac{h}{R}$ та $\frac{E}{G'}$ при $\nu = 0.3$ наведені в табл.5 $\left(\frac{m_i}{m} = 0\right)$ та в табл. 6 $\left(\frac{m_i}{m} \div 2; 0.5; 0.2\right)$.

Значення $\frac{m_i}{m}$ відповідають величинам $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ та відношенню $\frac{H}{h} = 44.5$.

Таблиця 6. Частоти власних коливань пластинки для $m_i/m = 2; 0.5; 0.2$, $H/h = 44.5$,
 $i = 1, 2, 3$

Авторська розробка

E/G'	0		2.6			5		
h/R	α_i	ω_i^*	α_i	ω_i^*	$\tilde{\omega}_i$	α_i	ω_i^*	$\tilde{\omega}_i$
0.05	2.221	2.849	2,224	2.849	2.846	2,226	2.848	2.845
	5.452	24.266	5,455	23.712	23.396	5,459	23.124	22.875
	8.611	67.695	8,617	63.015	60.720	8,620	58.736	57.139
0.1	2.221	2.849	2,230	2.848	2.835	2,239	2.837	2.831
	5.452	24.262	5,466	22.254	21.262	5,477	20.474	19.810
	8.611	67.695	8,629	53.250	48.222	8,638	44.512	41.88
0.2	2.221	2.849	2,257	2.845	2.794	2,29	2.822	2.781
	5.452	24.266	5,500	18.318	16.347	5,524	15.008	14.031
	8.611	67.695	8,654	36.378	30.666	8,662	27.084	24.793

Аналіз результатів, наведених у табл. 5 показує, що вони відрізняються від відповідних значень ω_i^* , отриманих на основі рівнянь уточненої теорії С.О.Амбарцумяна [1], де не враховується ефект інерції обертання поперечних перерізів пластини. Різниця між ними може перевищувати 16,3% для $h/R = 0.2$. На частоти власних коливань впливають величини поперечного зсуву та обтиснення, а також товщина пластинки. Особливо великим цей вплив може бути для вищих частот (другої, третьої і т.д.). Наприклад, при $E/G' = 5$, $h/R = 0.2$ друга частота зменшується у два рази, а третя – у три рази в порівнянні з власними частотами ізотропної пластинки Кірхгофа-Лява. Аналіз даних табл. 6 показує, що на власні коливання пластинки впливає приєднана маса рідини в ту ж саму сторону (зменшення), що і поперечний зсув. Але найбільшим є її вплив на першу основну частоту як із врахуванням поперечного зсуву, так і без нього. Із збільшенням номера частоти цей вплив зменшується у порівнянні з частотами, де враховується поперечний зсув та обтиснення.

Відмітимо, що в випадку $E/G' = 0$ результати співпадають з результатами класичної теорії пластинок, а $E/G' = 2.6$ – випадку ізотропної пластинки.

Використаємо записані рівняння у випадку коливання пластинки (рис.1), що лежить на суцільній пружній вінклеревій основі і стиснута радіальним тиском інтенсивності p_0 .

Диференціальне рівняння осесиметричних власних коливань пластинки, що знаходиться під шаром рідини на пружній основі з урахуванням радіального стиску має вигляд:

$$\frac{D}{R^4} \Delta^2 \tilde{w}(\rho, t) + m \left(1 - \frac{\bar{\varepsilon} \Delta}{R^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}(\rho, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{2} m \varepsilon' \frac{\gamma_n}{G} \frac{\partial^4 \tilde{w}(\rho, t)}{\partial t^4} + \frac{p_0}{R^2} \Delta \tilde{w}(\rho, t) + k \tilde{w}(\rho, t) = -\gamma_p \frac{\partial \varphi(\rho, \zeta, t)}{\partial t} \Big|_{\zeta=0}, \quad (16)$$

де k – коефіцієнт постелі.

Записавши розв'язок через частоту власних коливань пластинки ω_i , визначимо її у вигляді:

$$\omega_i = \frac{\mu_i^2}{R^2} \left(\frac{D \left(1 - \frac{p_0 R^2}{\mu_i^2} + \frac{k R^4}{D \mu_i^4} \right)}{1 \pm \frac{\bar{\varepsilon} \mu_i^2}{R^2} + \frac{m_i}{m}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

або в безрозмірному вигляді $\tilde{\omega}_i^* \equiv R^2 \sqrt{\frac{m}{D}} \omega_i$, коли $\mu_{i1} = \alpha_i$:

$$\tilde{\omega}_i^* = \tilde{\omega}_i \sqrt{1 - \frac{2\tilde{p}_0}{\alpha_i^2} + \frac{c}{\alpha_i^4}},$$

де $\tilde{\omega}_i = \alpha_i^2 \left(1 + \frac{m_i}{m} + \frac{\bar{\varepsilon} \alpha_i^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$, $2\tilde{p}_0 = \frac{p_0 R^2}{D}$, $c = \frac{kR^4}{D}$.

Таблиця 7. Частоти пластинки за обтиснення радіальним тиском p_0 ($k = 1,6 \cdot 10^3 \text{ м/м}^3$),

$$\frac{m_i}{m} = 2; 0.5; 0.2$$

Авторська розробка

$\frac{h}{R}$	α_i		$\tilde{\omega}_i$		$\tilde{\omega}_i^*$					
					$\tilde{p}_0 = 0.5$		$\tilde{p}_0 = 1$		$\tilde{p}_0 = 1.5$	
	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'
0,1	2,6	5	2,6	5	2,6	5	2,6	5	2,6	5
	2.230	2,239	2.835	2,831	3.043	3,033	2.765	2,686	2.455	2,451
	5.466	5,477	21.262	19,81	21.014	19,575	20.647	19,237	20.283	19,78
0,2	2,6	5	2,6	5	2,6	5	2,6	5	2,6	5
	2.257	2,29	2.794	2,781	2.538	2,532	2.214	2,222	1.899	1,861
	5.500	5,524	16.347	14,031	16.079	13,803	15.803	13,568	15.522	13,324
	8,654	8,662	30.666	24,793	30.461	24,629	30.255	24,462	30.048	24,294

Дані розрахунків частот наведені в таблицях 7 та 8 при $k = 1,6 \cdot 10^3 \text{ м/м}^3$, $\nu = 0.3$ та

$$\frac{E}{G'} = 2.6 \text{ і } \frac{E}{G'} = 5.$$

Таблиця 8. Частоти пластинки за обтиснення радіальним тиском p_0 ($k = 1,6 \cdot 10^3 \text{ м/м}^3$)

$$\text{у випадку } \frac{m_i}{m} = 0$$

Авторська розробка

$\frac{h}{R}$	α_i		$\tilde{\omega}_i$		$\tilde{\omega}_i^*$					
					$\tilde{p}_0 = 0.5$		$\tilde{p}_0 = 1$		$\tilde{p}_0 = 1.5$	
	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'	E/G'
0,1	2,6	5	2,6	5	2,6	5	2,6	5	2,6	5
	2.227	2,231	4.775	4,68	5.127	4,814	4.659	4,563	4.138	4,054
	5.463	5,469	24.574	22,35	24.281	22,422	23.861	21,713	23.433	21,329
0,2	2,6	5	2,6	5	2,6	5	2,6	5	2,6	5
	8.626	8,632	50.357	43,229	50.058	42,973	49.716	42,674	49.381	42,377
	2.242	2,256	4.376	4,104	3.969	3,727	3.457	3,252	2.853	2,697
	5.484	5,494	17.62	14,739	17.332	14,498	17.034	14,249	16.731	13,995
	8.645	8,648	31.153	25,050	30.945	24,884	30.734	24,716	30.525	24,546

Значення $\frac{m_i}{m} = 2; 0.5; 0.2$ відповідають величинам $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i/R$, ($i = 1, 2, 3$), коли $h = 1$,

$\frac{H}{h} = 44.5$. В таблиці 8 наводяться дані, коли $\frac{m_i}{m} = 0$. В таблиці 9 показано випадок, коли

коефіцієнт постелі $k = 0$, $\frac{E}{G'} = 2.6$.

Таблиця 9. Частоти пластинки у випадку коефіцієнта постелі $k = 0$, $\frac{E}{G'} = 2.6$

Авторська розробка

$\frac{h}{R}$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	$\tilde{\omega}_i^*$		
			$\tilde{p}_0 = 0.5$	$\tilde{p}_0 = 1$	$\tilde{p}_0 = 1.5$
0,1	2.230	2.835	2,534	2,192	1,786
	5.466	21.262	20,903	20,538	20,166
	8.629	48.222	47,897	47,569	47,241
0,2	2.257	2.794	2,505	2,178	1,791
	5.500	16.347	16,075	15,797	15,515
	8.654	30.666	30,461	30,254	30,046

Аналіз одержаних результатів для власної частоти $\tilde{\omega}_i^*$, наведених у табл. 7 та табл. 8, свідчить, що вплив поперечного зсуву при обтисненні пластинки радіальним тиском p_0 має такий самий характер зниження, як і при його відсутності. Разом з тим сама розподілена стискувальна сила також зменшує частоту власних коливань пластинки. Це зниження найбільше впливає на першу основну частоту. У межах зміни стискувальної сили це зменшення становить 19%. Збільшення коефіцієнта постелі k веде до збільшення частоти власних коливань $\tilde{\omega}_i^*$. Випадок $k = 0$ (табл. 9) зменшує першу основну частоту до 27% для $h/R = 0.1$ та на 5% для $h/R = 0.2$, і майже не впливає на інші частоти.

Висновки. Досліджено, що на частоти власних коливань впливають величини поперечного зсуву та обтиснення, а також товщина пластинки. Цей вплив є значним для вищих частот (другої, третьої і т.д.). При $E/G' = 5$, $h/R = 0.2$ друга частота зменшується у два рази, а третя – у три рази в порівнянні з власними частотами ізотропної пластинки Кірхгофа-Лява.

Числові результати показують, що на власні коливання пластинки впливає приєднана маса рідини в ту ж саму сторону (зменшення), що і поперечний зсув, але найбільшим є її вплив на першу основну частоту як із врахуванням поперечного зсуву, так і без нього. Із збільшенням номера частоти цей вплив зменшується у порівнянні з частотами, де враховується поперечний зсув та обтиснення.

У випадку обтиснення пластинки радіальним тиском, вплив поперечного зсуву має такий самий характер зниження, як і при його відсутності, розподілена стискувальна сила також зменшує частоту власних коливань пластинки.

На збільшення частоти власних коливань впливає збільшення коефіцієнта постелі.

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания / С.А. Амбарцумян. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. Гершунов Е.М. Колебания круглой пластинки под слоем жидкости / Е.М. Гершунов // Прикладная механика. Отделение математики, механики и кибернетики АН УССР. – 1974. – Т.10. – Вып.4. – С. 60–67.
3. Гершунов Е.М. Расчет круглых и кольцевых пластинок на действие произвольной динамической загрузки / Е.М. Гершунов // Отделение математики, механики. Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – №6. – С. 89–95.
4. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. К.: Наукова думка, 1978. – 264 с.
5. Мелконян А.П. О колебаниях трансверсально-изотропных круглых пластинок / А.П. Мелконян, А.А. Хачатрян // Известия АН Армянской ССР. Механика. – 1966. – Т. 19. – №3. – С. 26–34.
6. Швабюк В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально-изотропных плит / В.И. Швабюк // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16. – №9. – С. 71–77.