УДК 515.2
В.В. Завіша
Луцький національний технічний університет

АЛГОРИТМИ ПОБУДОВИ ОДНОВИМІРНИХ КОМПЛЕКСНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

В статті розглянуто алгоритми побудови одномірних комплексних відображень на прикладі множин Жуліа, Мандельброта, Ньютона та створення програм в системі MATlab.
Ключові слова: фрактал, множина Жуліа, множина Мандельброта, бассейн Ньютона.
Форм. 4. Рис. 4. Літ. 4.

Постановка проблеми. Фрактали – унікальні об'єкти, породжені непередбачуваними рухами хаотичного світу. Їх знаходять у місцях таких малих, як клітинна мембрана і таких величезних, як Сонячна система. Розгалуження трубочок трахей, листя на деревах, вени в руці, вируюча річка, ринок цінних паперів – це все фрактали. Кольорові картинки фракталів сьогодні можна знайти скрізь: від листівок до футболок. Вони з'являється на обкладинках багатьох підручників математики, наукових журналів і коробках з комп'ютерним програмним забезпеченням. Отже, що це за кольорові форми, які ми бачимо всюди навколо?

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Піонером у цій новій області пізнання, якого багато хто називає батьком фракталів був франко–американський математик, професор Бенуа Б. Мандельброт (Benoit B. Mandelbrot). Термін «фрактал», уведений Мандельбротом в 1975 році, одержав широку популярність із виходом в 1977 році його ж книги «Фрактальна геометрія природи» [2]. Сьогодні Мандельброт та інші вчені, такі як Кліффорд А. Пікковер (Clifford A. Pickover), Джеймс Глейком (James Gleick) та Г.О. Пейтген (HO Peitgen) намагаються розширити область фрактальної геометрії так, щоб вона могла бути застосована практично до всього у світі, від передбачення цін на ринку цінних паперів до використання в теоретичній фізиці. Ось кілька прикладів:

Комп'ютерні системи

Найбільш корисне використання фракталів в комп'ютерній науці є фрактальне стиснення даних. Воно засновано на ідеї про те, що замість самого зображення можна зберігати стиснуте відображення, для якого це зображення (або деяке близьке до нього) є нерухомою крапкою. При цьому, зображення стискаються набагато краще, ніж це робиться звичайними методами (такими як **jpeg** або **gif**). Інша перевага фрактального стиснення в тому, що при збільшенні картинки, не спостерігається ефекту пікселізації (збільшення розмірів точок до розмірів, що спотворюють зображення). При фрактальному ж стисненні, після збільшення, навпаки картинка часто виглядає навіть краще, ніж до нього.

Децентралізовані мережі

Система призначення IP–адресов в мережі Netsukuku використовує принцип фрактального стиснення інформації для компактного збереження інформації про вузли мережі. Кожен вузол мережі Netsukuku зберігає всього 4 Кб інформації про стан сусідніх вузлів, при цьому будь-який новий вузол підключається до загальної мережі без необхідності в центральному регулюванні роздачі IP–адресів, що, наприклад, характерний для мережі Інтернет. Таким чином, принцип фрактального стиснення інформації гарантує повністю децентралізовану, а отже, максимально стійку роботу всієї мережі.

Механіка рідин

Вивчення турбулентності в потоках дуже добре підходить під фрактали. Турбулентні потоки хаотичні і тому їх складно точно змоделювати. За допомогою фракталів також можна змоделювати полум'я вогню. Пористі матеріали добре представляються у фрактальній формі у зв'язку з тим, що вони мають дуже складну геометрію. Це використовується в нафтовій науці.

Телекомунікації

Для передачі даних на відстані використовуються антени, що мають фрактальні форми, що сильно зменшує їх розміри і вагу.

Фізика поверхонь

Фрактали використовуються для опису кривизни поверхонь. Нерівна поверхня характеризується комбінацією з двох різних фракталів.

Медицина

Біосенсорні взаємодії, биття серця, система внутрішніх органів (система кровоносних судин) має фрактальну структуру.

Біологія

Моделювання хаотичних процесів, зокрема при описі моделей популяцій.

Економіка

Аналіз ринків – останнім часом фрактали стали популярним інструментом у трейдерів для аналізу стану біржових ринків.

Для багатьох вчених, вивчення фракталів не просто нова область пізнання, яка об'єднує математику, теоретичну фізику, мистецтво і комп'ютерні технології – це революція. Це відкриття нового типу геометрії, тієї геометрії, яка описує світ навколо нас і яку можна побачити не тільки в підручниках, а й у природі і скрізь у безмежному всесвіті.

Невирішені частини проблеми. Фрактал – це самоподібна структура, зображення якої не залежить від масштабу. Це рекурсивна модель, кожна частина якої повторює у своєму розвитку розвиток всієї моделі в цілому. Існує багато різних математичних моделей фракталів та алгоритмів їх побудов. Тому виникає необхідність практичної реалізації алгоритмів побудови фрактальних об'єктів в якому-небудь із сучасних математичних пакетів (MATLAB, Mathcad, Maple, Matematica і т. д.), що широко використовуються у викладанні цілого ряду фізико-математичних дисциплін. Але існує необхідність внесення до них певних коригувань, які враховують особливості обраного пакета (в першу чергу графічні).

Основна частина. Першими відкритими фракталами були так звані детерміновані фрактали. Їх відмінною рисою є властивість самоподібності, обумовлена особливостями методу їх генерації. Прийнято вважати називати ці фрактали класичними, геометричними фракталами або лінійними фракталами. Ці фрактали зазвичай формуються починаючи з ініціатора – фігури, до якої застосовується певний основний малюнок. У всіх детермінованих фракталах самоподібність проявляється на всіх рівнях. Це означає, що незалежно від того наскільки ви наближаєте фрактал, ви побачите все той же візерунок.

Але більшість фракталів не є детермінованими. Вони не лінійні і не складаються з однакових геометричних форм. Такі фрактали називаються складними. Якщо збільшити маленьку ділянку будь-якого складного фрактала, а потім виконати те ж саме з маленькою областю цієї ділянки, то ці два збільшення будуть значно відрізнятися один від одного. Два зображення будуть дуже схожі в деталях, але вони не будуть повністю ідентичними.

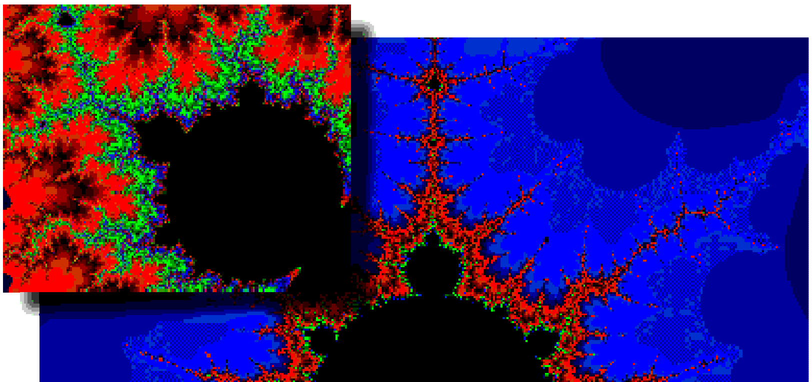


Рис 1. **Наближення множини Мандельброта**
Авторська розробка

Порівнюючи наведені тут зображення множини Мандельброта, одне з яких отримане при збільшенні деякої області іншої, видно, вони абсолютно не є ідентичними, хоча на обох є чорне коло, від якого в різні сторони йдуть палаючі щупальця. Ці елементи повторюються нескінченно часто в множині Мандельброта в зменшеній пропорції.

Складні фрактали відрізняються від детермінованих в тому сенсі, що вони нескінченно складні, але, при цьому, можуть бути згенеровані дуже простою формулою.

Множини Мандельброта і Жуліа, ймовірно, дві найбільш поширені серед складних фракталів. Їх можна знайти в багатьох наукових журналах, на обкладинках книг. Ці фрактали генерується простою формулою

$$Z_{n+1} = Z_n a + C$$

де Z і C – комплексні числа і a – дійсне число.

Розглянемо функції, які представляють собою поліноми однієї комплексної змінної. Нехай

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 2\,. \tag{1}$$

де коефіцієнти $a_n, a_{n-1}, ..., a_{1,} a_0$ – комплексні числа.

Множина Жюліа функції *f*, що позначається *J(f)*, визначається як

$$J(f) = \partial\left\{ z \in Z : \lim_{n \to \infty} f^n(z) = \infty \right\}. \tag{2}$$

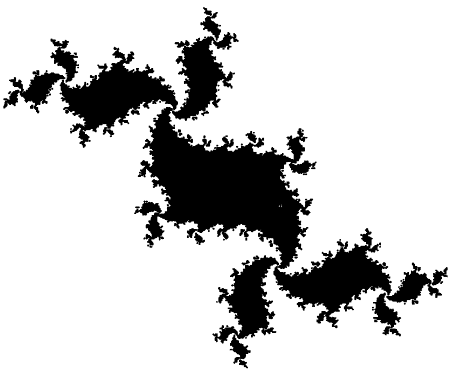
Таким чином, множина Жюліа функції *f* є границя множини точок *z*, що прагнуть до нескінченності при ітеруванні *f(z)*.

Найпростіша множина Жюліа відповідає випадку $f(z) = z^2$. Так як $f^{(n)} = z^{(2n)}$, то $f^n(z) \to \infty$ тоді і тільки тоді, коли | z | > 1. Границею цієї множини, тобто множиною Жюліа, є одиночне коло $\partial\{z : |z| = 1\}$, яке фракталом не є, хоча в загальному випадку множина Жюліа є фрактал.

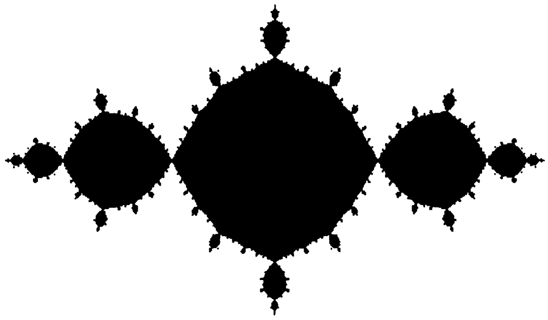
Розглянемо множину Жюліа квадратичних поліномів

$$f(z) = z^2 + c\,, \tag{3}$$

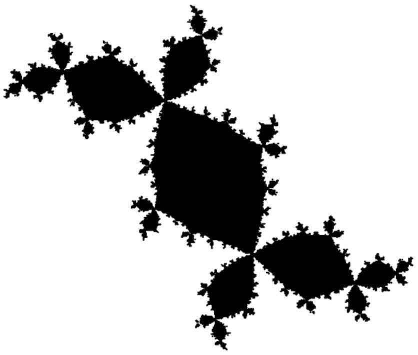
де *c* – комплексна константа. Такий підхід не є обмеженим, як це може здатися, оскільки розгляд довільного квадратичного полінома може бути зведене до вказаного вище окремого випадку простою заміною змінних.



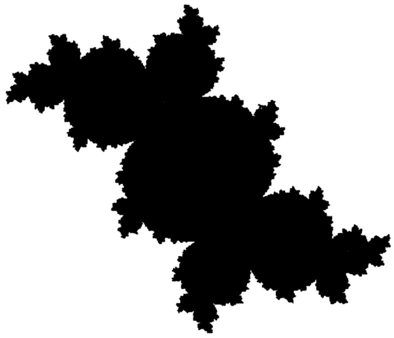
а) $f(z) = z^2 - 0.20 + 0.75i$



б) $f(z) = z^2 - 1$



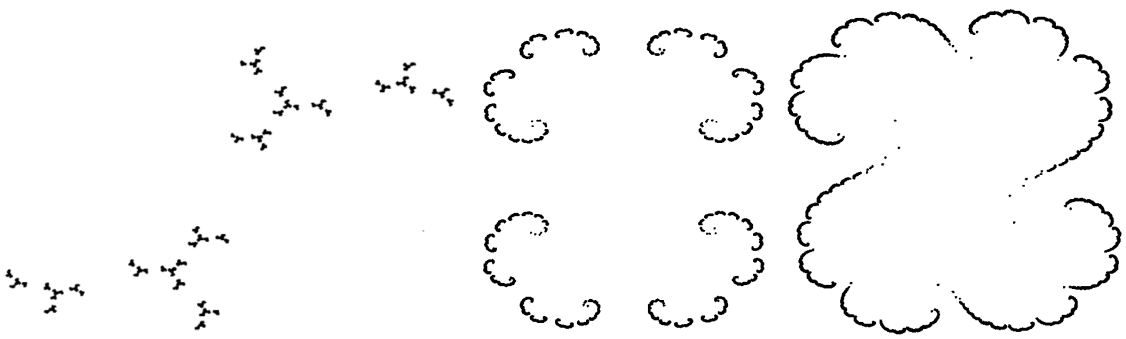
в) $f(z) = z^2 - 0.1244 + 0.7560i$



г) $f(z) = z^2 - 0.1194 + 0.6289i$

Рис. 2. **Приклади множин Жюліа**
[2]

Можна переконатися, що множини Жюліа функцій (рис. 2) володіють великою різноманітністю. Дійсно, для кожного нового значення *с* отримуємо вражаючі зображення. Проте, насправді існують усього два типи множин Жюліа. Кожна множина Жюліа функції або зв'язна, або майже незв’язна. Звичайно, вони можуть виглядати зовсім по-різному, навіть належачи до одного і того ж типу. Деякі зв'язні множини Жюліа виглядають як прості замкнуті криві, які є фракталами, як це має місце у випадку 0 <| *c* | <1/4. Існують також зв'язні множини Жюліа, які не є простими замкнутими кривими, як, наприклад, у випадку *c* = –1. З іншого боку, всі майже незв'язні множини Жюліа володіють тією властивістю, що вони являють собою «канторову пиль» (рис. 3).



а) $f(z) = z^2 - 1.2i$ б) $f(z) = z^2 + 0.5$ в) $f(z) = z^2 + 0.31 + 0.04i$

Рис. 3. **Множини «Канторова пиль»**
[2]

Множина Мандельброта (див. рис.1) *M* для полінома $f(z) = z^2 + c$ визначається як множина всіх значень параметра *с*, для яких орбіта точки *0* обмежена, тобто

$$M = \left\{ c \in C : \left\{ f_c^{(n)}(0)_{n=0}^{\infty} \right\} \text{обмежена} \right\}. \tag{4}$$

Теорема. Нехай *M* – множина Мандельброта. Тоді для кожної точки $c \in M$ відповідна їй множина Жюліа $J(f_c)$ зв'язна, а для $c \notin M$ відповідна множина Жюліа $J(f_c)$ майже незв'язна і є насправді Канторової множиною.

У 1879 році сер Артур Келі поставив задачу ітерування комплексних функцій, яка пізніше стимулювала дослідження Гастона Жюліа з проблем теорії множин, названих тепер його іменем. Проблема Келі полягає в дослідженні збіжності класичного алгоритму Ньютона знаходження кубічних коренів, але за умови, що дійсні числа замінюються на комплексні.

Якщо ж розглянути найпростіше рівняння третього степеня $z^3 - 1 = 0$, яке має один дійсний корінь $z_1 = 1$ і два комплексно-спряжені: $z_2 = 9{,}5 + i0{,}5\sqrt{3}$ і $z_2 = 9{,}5 - i0{,}5\sqrt{3}$. Вони утворюють рівносторонній трикутник. Ці корені є нерухомими точками (атракторами) відображення, яке описується ітераційним алгоритмом для функції $f(z) = z^3 - 1$: $z_{n+1} = \dfrac{2z_n^3 + 1}{3z_n^2}$. Беручи $z - x + iy$ і розділяючи дійсну і уявну частини, можна перейти до двовимірного дійсного відображення:

$$x_{n+1} - \frac{2}{3}x_n + \frac{x_n^2 - y_n^2}{3(x_n^2 + y_n^2)^2}, \; y_{n+1} - \frac{2}{3}y_n\left(1 - \frac{x_n}{(x_n^2 + y_n^2)^2}\right).$$

Стартувавши в безпосередній близькості від кожного кореня, отримуємо методом Ньютона збіжні до атракторів послідовності чисел. Геометрія меж областей притягання має складну форму.

Якщо розфарбувати різні області притягання різними кольорами, то на екрані монітора буде видно, що межі областей притягання складаються із переплетених само подібних (фрактальних) структур. На межі між будь-якими двома кольорами розміщується гірлянда острівців третього кольору. Межі цих острівців, у свою чергу, складаються із гірлянд острівців меншого розміру, відповідного доповнюючого кольору і т.д. таким чином, кожна точка такої фрактальної межі одночасно є суміжною з трьома областями притягання (рис. 4).

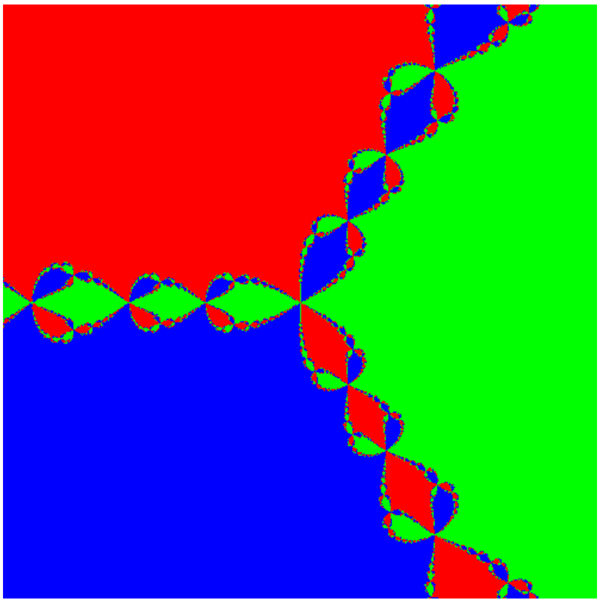


Рис. 4. **Басейни притягання для кубічних коренів з одиниці**
Авторська розробка

Висновки. Розглянута практична реалізація побудови одномірних комплексних відображень фракталів на прикладі множин Жуліа, Мандельброта, Ньютона, що дозволяє пояснити їх графічну природу та розробити програми їх подальшої модифікації.

1. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: «Институт компьютерных исследований», 2002. – 656 с.
3. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – Москва–Ижевск: «Институт компьютерных исследований», 2002. – 160 с.
4. Поршнев С.В. Реализация в MATLAB алгоритмов построения фрактальных объектов /С.В.Поршнев // Exponenta Pro. Математика в приложениях.— 2003.— №3.— С. 72–81.