УДК 65.011.56 : 664.001.73 (07)

Л.Ю. Федік, М.Р. Шабас
Луцький національний технічний університет

МЕТОДИ РІШЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

У статті описане призначення оптимального керування. Викладено методи дослідження функцій класичного аналізу. Зроблений аналіз існуючих методів рішення задач оптимізації.

Ключові слова: оптимізація, методи, задача, рішення, керування, програмування.
Табл. 1, літ. 8.

Постановка проблеми. В останні десятиліття значна увага приділяється оптимальному керуванню. Завданням якого є проектування системи, де дотримується закон керування чи керуюча послідовність впливів, максимум або мінімум заданої сукупності критеріїв якості системи. Оптимальне керування базується на поєднанні варіаційних методів, теорії автоматичного регулювання і застосуванні швидкодіючих обчислювальних машин.

Тому виникла велика необхідність у викладі методів рішення задач оптимізації що надало б інженеру і студенту основи, необхідні для проектування систем автоматичного керування [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Значний внесок у розвиток сучасної теорії оптимізації внесли А.Я. Дубовицький, А.А.Мілютін, А.М.Летова, А.Таккер, А.А.Фельдбаума, В.А.Троіцького, В.Г.Болтянського, Г.Кун, Дж.Данциг, Л.В.Канторович, Л.С. Потрягін, Н.Н.Моісєєв, Р.Беллман, Р.Гоморі, і ін., а також американських математиків Р.Беллмана, Дж.Лейтмана, і ін. вчені, чиї праці не тільки розширили границі застосування кількісних методів прийняття рішень, але й сприяли створенню нових напрямків у науці [3].

Формулювання мети дослідження. Завданням дослідження є аналіз методів рішення задач оптимізації під час проектування систем керування.

Виклад основного матеріалу дослідження. У даний час для рішення задач оптимізації застосовують в основному такі методи: методи дослідження функцій класичного аналізу; методи, які базуються на застосуванні невизначених множників Лагранжа; варіаційне обчислення; динамічне програмування; принцип максимуму; лінійне програмування; нелінійне програмування, геометричного програмування.

Методи дослідження функцій класичного аналізу являють собою найбільш відомі методи рішення нескладних оптимальних задач, з якими інженер знайомиться під час вивчення курсу математичного аналізу. Звичайною сферою застосування даних методів є задачі з відомим аналітичним виразом критерія оптимальності, що дозволяє знайти не дуже складний аналітичний вираз для похідних. Отримані результати прирівнюємо до нуля похідних рівняння, визначаючі екстремальні рішення оптимальної задачі. Це досить рідко вдається розв'язати аналітичним шляхом, тому, як правило, застосовують обчислювальні машини. При цьому потрібно розв'язати систему кінцевих рівнянь, частіше за все нелінійних, для чого потрібно застосовувати числові методи, аналогічні методам нелінійного програмування.

Додаткові труднощі під час рішення оптимальної задачі методами дослідження функцій класичного аналізу виникають внаслідок того, що система рівнянь, що отримується в результаті їх застосування, забезпечує лише необхідні умови оптимальності. Тому для рішення даної системи (а їх може бути і декілька) повинні бути перевірені на достатність. У результаті такої перевірки спочатку відкидають рішення, які не визначають екстремальні значення критерія оптимальності, а потім серед решти екстремальних рішень вибирають рішення, задовольняюче умови оптимальної задачі, то б то найбільшому чи найменшому значенню критерія оптимальності в залежності від постановки задачі.

Методи дослідження при наявності обмежень на область зміни незалежних змінних можна застосовувати тільки для відшукання екстремальних значень всередині вказаної області. Особливо це стосується задач з великою кількістю незалежних змінних (практично більше двох), в яких аналіз значень критерія оптимальності на межі допустимої області зміни змінних стає досить складним [2].

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі простішою. Для цього цільову функцію замінюють іншою, з більшою кількістю змінних, тобто такою, яка включає в себе умови, що подані як обмеження. Після такого перетворення дальше розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

При цьому існують обмеження типу рівностей на незалежні змінні. До вимоги можливості отримання аналітичних виразів для похідних від критерію оптимальності при цьому добавляється аналогічна вимога відносно аналітичного виду рівнянь обмежень.

В основному під час застосування метода множників Лагранжа доводиться розв'язувати ті ж задачі, що і без обмежень. Деяке ускладнення в даному випадку виникає лише від введення додаткових невизначених множників, внаслідок чого порядок системи рівнянь, яка розв'язується для знаходження екстремумів критерію оптимальності, відповідно підвищується на число обмежень. У решті процедура пошуку рішень і перевірки їх на оптимальність відповідає процедурі рішення задач без обмежень.

Множники Лагранжа можна застосовувати для рішення задач оптимізації об'єктів з розподіленими параметрами і задач динамічної оптимізації. При цьому замість рішення системи кінцевих рівнянь для відшукання оптимуму необхідно інтегрувати систему диференціальних рівнянь.

Необхідно відмітити, що множники Лагранжа застосовують також у якості допоміжного засобу і під час рішення спеціальними методами задач інших класів з обмеженнями типу рівностей, наприклад, у варіаційному обчисленні і динамічному програмуванні. Особливо ефективне застосування множників Лагранжа в методі динамічного програмування, де за допомогою їх деколи вдається знизити розмірність розв'язуючої задачі [2; 4-8].

Метод варіаційного обчислення зазвичай застосовують для рішення задач, в яких критерії оптимальності подаються у вигляді функціоналів і рішеннями яких слугують невідомі функції. Такі задачі виникають зазвичай під час статичної оптимізації процесів з розподіленими параметрами чи в задачах динамічної оптимізації.

Варіаційні методи дозволяють у цьому випадку звести рішення оптимальної задачі до інтегрування системи диференціальних рівнянь Ейлера, кожне з яких є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку з граничними умовами, заданими на обох кінцях інтервалу інтегрування. Кількість рівнянь вказаної системи при цьому дорівнює кількості невідомих функцій, визначаючих під час рішення оптимальної задачі. Кожну функцію знаходять у результаті інтегрування одержуваної системи.

Рівняння Ейлера виводяться як необхідні умови екстремуму функціоналу. Тому отримані інтегруванням системи диференціальних рівнянь функції повинні бути перевірені на екстремум функціоналу.

За наявності обмежень типу рівностей, які мають вигляд функціоналів, застосовують множники Лагранжа, що дає можливість перейти від умовної задачі до безумовної. Найбільш значні труднощі під час застосування варіаційних методів виникають під час рішення задач з обмеженнями типу нерівностей.

Заслуговують уваги прямі методи рішення задач оптимізації функціоналів, зазвичай дозволяючі звести початкову варіаційну задачу до задачі нелінійного програмування, розв'язати яку деколи простіше, ніж крайову задачу для рівнянь Ейлера.

Серед методів рішення задач оптимізації під час проектування систем керування найбільш широко застосовуються такі методи як: варіаційне обчислення, динамічне програмування, принцип максимуму Понтрягіна.

Динамічне програмування слугує ефективним методом рішення задач оптимізації дискретних багатостадійних процесів, для яких критерій оптимальності задається як адитивна функція критеріїв оптимальності окремих стадій. Методи динамічного програмування використовуються не лише в дискретних, але і в неперервних керованих процесах, наприклад, у таких процесах, коли в кожен момент певного інтервалу часу необхідно приймати рішення, при чому наступне управління повинно обиратися оптимальним відносно стану, до якого прийде система в кінці цього кроку.

Цей метод, побудований на використанні принципу оптимальності і дозволяє встановити співвідношення між екстремальними значеннями цільової функції в задачах, що характеризуються різною тривалістю процесу і різними початковими станами. При цьому необхідно враховувати наслідки реалізації знайденого оптимального рішення і для наступних рішень.

При цьому, якщо в задачах лінійного програмування залежності між критеріальною функцією та змінними обов'язково лінійні, то в задачах динамічного програмування ці залежності можуть мати й нелінійний характер.

Під багатостадійністю при цьому розуміють або багатостадійну структуру процесу, або розподілення управління на ряд послідовних етапів (ступенів, кроків), що відповідають, як правило, різним моментам часу. Без особливих ускладнень вказаний метод можна поширити і на випадок, коли критерій оптимальності заданий в іншій формі, однак при цьому зазвичай збільшується розмірність окремих стадій.

Найбільш доцільно динамічне програмування застосувати для вирішення таких практичних задач, в яких пошук оптимального рішення вимагає поетапного підходу. По суті метод динамічного програмування являє собою алгоритм визначення оптимальної стратегії керування на всіх стадіях процесу. При цьому закон керування на кожній стадії знаходять шляхом рішення окремих задач оптимізації послідовно для всіх стадій процесу за допомогою методів дослідження функцій класичного аналізу чи методів нелінійного програмування. Результати рішення зазвичай не можуть бути виражені в аналітичній формі, а отримуються у вигляді таблиць.

Обмеження на змінні задачі не мають впливу на загальний алгоритм рішення, а враховуються під час рішення окремих задач оптимізації на кожній стадії процесу. За наявності обмежень типу рівностей інколи навіть вдається знизити розмірність цих окремих задач за рахунок застосування множників Лагранжа.

Застосування методу динамічного програмування для оптимізації процесів з розподіленими параметрами чи в задачах динамічної оптимізації приводить до рішення диференціальних рівнянь в окремих похідних. Замість рішення таких рівнянь найчастіше значно простіше представити неперервний процес як дискретний з досить великою кількістю стадій. Подібний прийом виправданий особливо в тих випадках, коли існують обмеження на змінні задачі і пряме рішення диференціальних рівнянь ускладнюється необхідністю обліку вказаних обмежень.

Хоча метод динамічного програмування суттєво спрощує вихідні задачі, та безпосереднє його використання, як правило, пов'язане з громіздкими обчисленнями, що приводь до застосування цифрових обчислювальних машин, які мають достатній об'єм пам'яті для збереження проміжних результатів рішення, що зазвичай отримуються у табличній формі [2; 4-8].

Принцип максимуму застосовують для рішення задач оптимізації процесів, описуючих системами диференціальних рівнянь. Достоїнством математичного апарату принципу максимуму є те, що рішення може визначатися у вигляді розривних функцій. Це властиве багатьом задачам оптимізації, наприклад задачам оптимального керування об'єктами, що описуються лінійними диференціальними рівняннями.

Знаходження оптимального рішення під час застосування принципу максимуму зводиться до задач інтегрування системи диференціальних рівнянь процесу і спряженої системи для допоміжних функцій при граничних умовах, заданих на обох кінцях інтервалу інтегрування, то б то до рішення крайової задачі. На області зміни змінних можуть бути накладені обмеження. Систему диференціальних рівнянь інтегрують, застосовуючи звичайні програми на цифрових обчислювальних машинах.

Принцип максимуму для процесів, описуючих диференціальними рівняннями, за деяких припущень є і достатньою умовою оптимальності. Тому додаткової перевірки на оптимум отримуючих рішень зазвичай не потрібно.

Для дискретних процесів принцип максимуму в цьому ж формулюванні, що і для неперервних, несправедливий. Однак умови оптимальності, дозволяють знайти досить зручні алгоритми оптимізації [2].

Лінійне програмування являє собою математичний апарат, розроблений для рішення оптимальних задач з лінійними виразами для критерія оптимальності і лінійними обмеженнями на область зміни змінних. Сутність лінійного програмування базується на знаходженні точок найбільшого чи найменшого значення деякої функції при певному наборі обмежень, які накладаються на аргументи і утворюють систему обмежень, що має, як правило, безкінечну кількість рішень.

Такі задачі зазвичай зустрічаються під час рішення питань оптимального планування виробництва з обмеженою кількістю ресурсів, під час визначення оптимального плану перевезень (транспортні задачі) і т.д.

У зв’язку з тим, що: математичні моделі великої кількості економічних задач лінійні відносно шуканих змінних; ці типи задач у даний час найбільш вивчені; для них розроблені спеціальні кінцеві методи, за допомогою яких ці задачі розв’язуються, і відповідні стандартні програми для їх рішення на ЕОМ; багато задач лінійного програмування, знайшли широке практичне застосування в народному господарстві; деякі задачі, які в початковому формулюванні не є лінійними, після певних додаткових обмежень і припущень можуть стати лінійними чи можуть бути приведені до такої форми, що їх можна розв’язувати методами лінійного програмування.

Для рішення великої кількості задач лінійного програмування існує практично універсальний алгоритм – симплексний метод, дозволяючий за кінцеву кількість ітерацій знаходити оптимальне рішення переважної більшості задач. Тип застосовуючих обмежень (рівності чи нерівності) не впливає на можливості застосування вказаного алгоритму. Додаткової перевірки на оптимальність для отримуючих рішень не потрібно. Як правило, практичні задачі лінійного програмування відрізняються досить значною кількістю незалежних змінних. Тому для їх рішення зазвичай застосовують обчислювальні машини, необхідна потужність яких визначається розмірністю розв’язуючої задачі.

У більшості інженерних задач побудову математичної моделі не вдається звести до задачі лінійного програмування.

Математичні моделі в задачах проектування реальних об’єктів або технологічних процесів повинні відбивати реальні протікаючі в них фізичні і, як правило, нелінійні процеси. Змінні цих об’єктів або процесів пов’язані між собою фізичними нелінійними законами. У результаті, більшість задач математичного програмування, які зустрічаються в науково-дослідних проектах і в задачах проектування – це задачі нелінійного програмування.

При цьому на незалежні змінні можуть бути накладені обмеження також у вигляді нелінійних співвідношень, які мають вид рівностей чи нерівностей. По суті методи нелінійного програмування застосовують, якщо не один з вказаних вище методів не дозволяє скількись просунутись в рішенні оптимальної задачі. Тому вказані методи інколи називають також прямими методами рішення оптимальних задач.

Для отримання числових результатів важливе місце відводиться нелінійному програмуванню і під час рішення оптимальних задач такими методами, як динамічне програмування, принцип максимуму і т.п. на певних етапах їх застосування.

Назвою «методи нелінійного програмування» об’єднується велика група числових методів, деякі з яких пристосовані для рішення оптимальних задач відповідного класу. Вибір того чи іншого методу обумовлений складністю обчислення критерія оптимальності і складністю обмежуючих умов, необхідною точністю рішення, потужністю обчислювальної машини і т.д. Ряд методів нелінійного програмування практично постійно застосовується в поєднанні з іншими методами оптимізації, як, наприклад, метод сканування в динамічному програмуванні. Крім того, ці методи слугують основою побудови систем автоматичної оптимізації – оптимізаторів, що безпосередньо застосовуються для керування виробничими процесами.

Методи розв’язування задач нелінійного програмування бувають прямі та непрямі. За допомогою прямих методів знаходження оптимальних планів здійснюють у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) значення цільової функції. Типовим представником цієї групи методів є градієнтні. Методика застосування непрямих методів передбачає зведення задачі до такої, оптимум якої слід знаходити простішими методами. Серед непрямих найкраще розробленими є методи розв’язування задач квадратичного та сепарабельного програмування.

Найпростішими для розв’язування є задачі нелінійного програмування, в яких система обмежень складається лише з рівнянь.

Останнім часом з нелінійного програмування виділилися самостійні розділи: випукле програмування; квадратичне програмування; цілочислове програмування; стохастичне програмування; динамічне програмування і ін.

Задачі випуклого програмування – це задачі, в яких визначається мінімум випуклої функції (чи максимум вгнутої), заданої на випуклій замкненій множині. Якщо множина планів – випуклий багатокутник, то ці методи допускають застосування симплексного методу.

Ці задачі серед задач нелінійного програмування найбільш вивчені. Серед задач випуклого програмування найбільш детально вивчені задачі квадратичного програмування.

У задачах цілочислового програмування невідомі параметри можуть приймати тільки цілочислові значення.

У задачах стохастичного програмування в цільовій функції чи в функціях обмежень містяться випадкові величини, які підкоряються законам теорії ймовірності [2; 4-8].

Геометричне програмування відноситься до класу задач нелінійного програмування. Це метод рішення за якого критерій оптимальності і обмеження задаються спеціальним видом функціями позіномами – виразами, які являють собою суму добутків степеневих функцій від незалежних змінних. Деякі задачі нелінійного програмування інколи можна звести до вказаного вигляду, застосовуючи апроксимаційне подання для цільових функцій і обмежень.

Специфічною особливістю методів рішення оптимальних задач (за винятком методів нелінійного програмування) є те, що до деякого етапу оптимальну задачу розв'язують аналітично, то б то знаходять певні аналітичні вирази, наприклад, системи кінцевих чи диференціальних рівнянь, звідки вже відшукують оптимальне рішення. На відміну від вказаних методів під час застосування методів нелінійного програмування, які, можуть бути названі прямими, застосовують інформацію, отримуючу під час розрахунку критерія оптимальності, зміна якого слугує оцінкою ефективності тої чи іншої дії.

Важливою характеристикою будь-якої оптимальної задачі є її розмірність *n*, яка дорівнює кількості змінних, задання значень яких необхідне для однозначного визначення стану оптимізуючого об'єкта. Як правило, рішення задач високої розмірності пов'язане з необхідністю виконання великої кількості обчислень. Ряд методів (наприклад, динамічне програмування і дискретний принцип максимуму) спеціально призначений для рішення задач оптимізації процесів високої розмірності, які можуть бути представлені як багатостадійні процеси з відносно невисокою розмірністю кожної стадії.

У табл. 1 подана характеристика областей застосування різних методів оптимізації, при цьому за основу покладена порівняльна оцінка ефективності застосування кожного метода для рішення різних типів оптимальних задач. Передбачається, що рішення оптимальної задачі для процесів, описуючих системами кінцевих рівнянь, визначається як кінцевий набір значень керуючих впливів (статична оптимізація процесів із зосередженими параметрами), а для процесів, описуючих системами звичайних диференціальних рівнянь, керуючі впливи характеризуються функціями часу (динамічна оптимізація процесів із зосередженими параметрами) чи просторових змінних (статична оптимізація процесів із розподіленими параметрами).

Таблиця 1. Сфери застосування методів оптимізації

Вид опису процесу		Кінцеві рівняння						Диференціальні рівняння					
Тип обмежень на змінні		ні		рівності		нерівності		ні		рівності		нерівності	
Кількість змінних *n*													
Назва методу	Методи класичного аналізу	1	2	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4
	Множники Лагранжа	–	–	1	2	–	–	–	–	2	3	–	–
	Варіаційне обчислення	–	–	–	–	–	–	2	3	2;7	3;7	–	–
	Динамічне	1;5	3;5	1;5;7	3;5;	1;5	3;5	2	3	3	3	3	3

	програмування				7								
	Принцип максимуму	2;5	1;5	2;5	2;5	2;5	2;5	1	1	2	2	2	2
	Лінійне програмування	–	–	–	2;6	2;6	1;6	–	–	–	–	–	–
	Методи нелінійного програмування	2	1	2	1	2	1	4	4	4	4	4	4
	Геометричне програмування	2;8	2;8	–	–	2;8	2;8	–	–	–	–	–	–

Класифікація задач по групах з кількістю незалежних змінних, більших і менших трьом або рівних трьом як характеристика розмірності задач з великою і малою кількістю змінних, досить умовна і в даному випадку вибрана швидше з міркувань наочності графічного зображення простору зміни змінних задачі – фазового простору (при кількості змінних більше трьох графічне зображення фазового простору звичайними прийомами відсутнє). Тим паче, така класифікація до деякого ступеня все ж відображає дійсні труднощі, виникаючі під час рішення задач з розмірністю вище трьох.

Висновки. Отже, методи оптимізації застосовуються до пошуку оптимального рішення. У наш час для рішення задач оптимізації застосовують різні методи, застосування яких чи самостійне чи взаємопов'язане між собою. Серед методів рішення задач оптимізації під час проектування систем керування найбільш широко застосовуються такі методи: варіаційне обчислення, динамічне програмування.

Перспективи подальших досліджень у даному напрямку є аналіз алгоритмів методів рішення задач оптимізації під час проектування систем керування.

1. Атанс М., Фалб П.Л. Оптимальное управление. Перевод с английского. Под ред. д-ра техн.наук проф. Ю.И.Топчеева. – М.: Машиностроение, 1968. – С.9.
2. Бояринов А.И., Кафаров В.В. Методы оптимизации в химической технологии. Изд. 2-е. – М.: Химия, 1975. – С. 29-37
3. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации: Учеб.пособие для вузов. – М.: Сов.радио, 1980. – С.3-4
4. Web-ресурс: http://uk.wikipedia.org/wiki/
5. Наконечний С.І. Метод множників Лагранжа.
6. Web-ресурс: http://matmetod-popova.narod.ru/theme21.htm
7. Трифонов А.Г. Постановка задачи оптимизации и численные методы ее решения //
8. Тынкевич М.А. Экономико-математические методы (исследование операций): Учебное пособие (издание второе, исправленное и дополненное). – Кемерово, 2000 //