

УДК 621.397.3

В.О. Ліщина

Луцький інститут розвитку людини Університету "Україна"

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОЛИВАНЬ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ РІДИНИ У РУХОМИХ ЄМНОСТЯХ

В статті розглянуто задачу визначення коливань вільної поверхні рідини у рухомих ємкостях яка безпосередньо пов'язана із проблемою транспортування рідини повітряними судами. Отримані результати математичного моделювання дають можливість визначити оптимальне розташування продольних перегородок у рухомій ємності з метою гасіння коливань рідини і негативного впливу цих коливань на рух повітряного судна.

**Ключові слова:** коливання вільної поверхні рідини, рухомі ємності.

**Постановка проблеми.** Задача визначення коливань вільної поверхні рідини у рухомих ємкостях безпосередньо пов'язана із проблемою транспортування рідини повітряними судами (літаками, що призначені для тушіння пожеж, зокрема, лісових).

Під час транспортування води літаками у зону лісових пожеж з метою ліквідації лісових пожеж виникають коливання вільної поверхні ємкостей, частково наповнених водою. Ці коливання у разі, якщо не здійснити засобів їхнього гасіння під час польоту повітряного судна, можуть призвести до негативних наслідків, що можуть спричинити руйнування повітряного судна. Тож, задача демпфування коливань вільної поверхні рідини у рухомих ємкостях є важливою і актуальною для безпечного польоту повітряного судна у зону пожежі з метою її гасіння. Своєю чергою виявлення небезпечних коливань рідини у рухомих ємкостях на борту повітряного судна дає змогу сконструювати засоби гасіння цих коливань шляхом побудови демпфуючих перегородок (радіальних або осесиметричних).

**Метою роботи** є дослідження коливань рідини у рухомих ємкостях на борту повітряного судна з подальшою розробкою засобів гасіння коливань з метою забезпечення безпечного польоту судна у зону лісової пожежі.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Розглянемо ємність циліндричної форми із твердою стінкою  $S$ , яка частково заповнена рідиною із вільною поверхнею  $\Sigma$ . Початок системи координат  $Oxuz$  зв'яземо із центром незбуреної вільної поверхні  $\Sigma_0$ , вісь  $Ox$  спрямуємо у бік, протилежний напрямку вектора прискорення сил тяжіння  $\mathbf{g}$ .

Подемо рівняння збуреної вільної поверхні  $\Sigma$  у вигляді

$$x = f(y, z, t). \quad (1)$$

Відповідна нелінійна крайова задача про коливання обмеженого об'єму рідини формулюється так [1]:

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z, t) = 0, \quad \mathbf{r} \in Q; \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + gx = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma, \quad (5)$$

де  $\varphi(x, y, z, t)$  – потенціал швидкостей рідини;  $\mathbf{n}$  – орт зовнішньої нормалі до поверхні  $\Sigma$ .

Якщо запровадити функцію Гамільтона

$$H = -\rho \int_Q \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + gx \right] dQ, \quad (6)$$

крайова задача (2)–(5) є необхідна умова існування стаціонарного значення функціонала

$$W = \int_{t_1}^{t_2} H dt. \quad (7)$$

Враховуючи, що рівняння (2) і межева умова (5) є лінійні, потенціал  $\varphi(x, y, z, t)$  задамо у вигляді

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(t) \varphi_n(x, y, z), \quad (8)$$

де  $\varphi_n(x, y, z)$  – система гармонічних в області  $Q$  функцій, що задовольняють межу умову на поверхні ємності  $S$ .

Необхідність у вирішенні такої задачі пов'язана із розв'язанням задач демпфування коливань рідини у рухомому посуді. Подамо крайову задачу для функції  $\Omega_1(x, \xi, \eta, t)$  у циліндричній системі координат  $(x, \xi, \eta)$ :

$$\nabla^2 \Omega_1 = 0, \quad \mathbf{r} \in Q; \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Sigma} = -\frac{f_{\eta}}{N}; \quad \left. \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = 0, \quad (10)$$

де  $f(\xi, \eta, t)$  визначається виразом [3]

$$x = f(\xi, \eta, t) = \sum_{m,n} [r_{mn}(t) \sin m\eta + p_{mn}(t) \cos m\eta] \kappa_{mn} \psi(0, \xi). \quad (11)$$

За координатні функції слушно обрати систему гармонічних функцій

$$\varphi(x, \xi, \eta, t) = P_0(t) \psi_0(x, \xi) + [R_1(t) \sin \eta + P_1(t) \cos \eta] \psi_1(x, \xi) + [R_2(t) \sin 2\eta + P_2(t) \cos 2\eta] \psi_2(x, \xi) \quad (12)$$

як частинний випадок загального подання потенціала швидкостей

$$\varphi(x, \xi, \eta, t) = \sum_{m,n} [R_{mn}(t) \sin m\eta + P_{mn}(t) \cos m\eta] \psi_{mn}(x, \xi). \quad (13)$$

$$\psi_{mn}(x, \xi) = \frac{ch[\kappa_{mn}(x - x_0)]}{ch\kappa_{mn}h} Y_m(\kappa_{mn}\xi). \quad (14)$$

При побудові наближеного розв'язання (13) обмежимося членами третього порядку малості відносно параметрів у (11) і відповідно, у (13).

Будемо вирішувати поставлену задачу варіаційним методом, мінімізуючи Гамільтоніан (6) із обмеженнями у вигляді крайової задачі (2)–(5).

Циліндричну систему координат  $Ox\xi\eta$  зв'яжемо із незбуреною поверхнею рідини  $\Sigma_0$ , спрямовуючи вісь  $Ox$  у бік, протилежний вектору  $\mathbf{g}$ . Глибина рідини позначена через  $h$ , радіуси внутрішнього і зовнішнього циліндрів – через  $R_0$  і  $R_1$ . Відповідно до розкладання у ряди функцій  $x = f(y, z, t)$  і  $\varphi(x, y, z, t)$  вирази для форми вільної поверхні і потенціала швидкостей мають вигляд:

$$x = f(\xi, \eta, t) = \sum_{m,n} [r_{mn}(t) \sin m\eta + p_{mn}(t) \cos m\eta] f_{mn}(\xi), \quad (15)$$

$$f_{mn}(\xi) = Y_m(\kappa_{mn}\xi), \quad (16)$$

$$Y_m(\kappa_{mn}\xi) = \frac{J_m(\kappa_{mn}\xi)N'_m(\zeta_{mn}) - N_m(\kappa_{mn}\xi)J'_m(\zeta_{mn})}{J_m(\zeta_{mn})N'_m(\zeta_{mn}) - N_m(\zeta_{mn})J'_m(\zeta_{mn})}, \quad (17)$$

$$\psi_{mn}(x, \xi) = \frac{ch[\kappa_{mn}(x+h)]}{ch(\kappa_{mn}h)} Y_m(\kappa_{mn}\xi); \quad (18)$$

$J_m(\kappa_{mn}\xi)$  і  $N_m(\kappa_{mn}\xi)$  – функції Бесселя і Неймана  $m$ -го порядку;  $\zeta_{mn} = \kappa_{mn}R_1$  – корені рівняння

$$J'_m(\delta\zeta)N'_m(\zeta) - N'_m(\delta\zeta)J'_m(\zeta) = 0, \quad \delta = R_0/R_1.$$

$R_0, R_1$  – радіуси перегородки та циліндричної ємності.

Утримаємо у цих виразах основні гармоніки для значень  $m = 0, 1, 2$ .

Сформульована задача – варіаційна задача пошуку мінімуму функціонала (8) за наявності обмежень у вигляді крайової задачі (2)–(5). Її розв'язання дається виразами (15)–(18). Вирази для параметрів функції (12) отримані у вигляді [3]:

$$P_0(t) = C_0[r_1(t)\dot{r}_1(t) + p_1(t)\dot{p}_1(t)] + D_0\dot{p}_0(t), \quad (19)$$

$$R_1(t) = \frac{1}{\kappa_{11}} r_1(t) + C_2 r_1^2(t) \dot{r}_1(t) + D_3 p_1^2(t) \dot{r}_1(t) + C_1 r_1(t) p_1(t) \dot{p}_1(t) + D_2 [r_2(t) \dot{p}_1(t) - p_2(t) \dot{r}_1(t)] + \quad (20)$$

$$+ C_3 [p_1(t) \dot{r}_2(t) - r_1(t) \dot{p}_2(t)] + B_0 p_0(t) \dot{r}_1(t) + B_3 r_1(t) \dot{p}_0(t).$$

Аналогічний вигляд мають вирази для  $P_1(t), R_2(t), P_2(t)$ . Коефіцієнти  $C_0, C_1, C_2, C_3, B_0, B_1, B_2, B_3, D_0, D_1, D_2, D_3$  обчислюються через обчислення інтегралів від функцій Бесселя вигляду

$$i_{ij} = \int_{R_0}^{R_1} \xi Y_i Y_j Y_i' Y_j' d\xi.$$

Чисельне обчислення інтегралів такого вигляду пов'язане із проблемами точності інтегрування. У зв'язку з цією обставиною автор розробив алгоритм, що ґрунтується на апроксимації функцій Бесселя дробово-раціональними виразами, що дозволяє запобігти необхідності у чисельному інтегруванні й отримати значення таких інтегралів у аналітичному вигляді.

Диференціальні рівняння для визначення узагальнених координат  $p_0(t), r_1(t), r_2(t), p_2(t)$ , які входять у вирази вигляду (19),(20), отримані в [3]. Зокрема, рівняння відносно  $r_1(t)$  має вигляд:

$$\mu_1 \left( \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \sigma_1^2 r_1 \right) + d_1 r_1 \left[ r_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \left( \frac{dr_1}{dt} \right)^2 + p_1 \frac{d^2 p_1}{dt^2} + \left( \frac{dp_1}{dt} \right)^2 \right] + \quad (21)$$

$$+ d_2 \left[ p_1^2 \frac{d^2 r_1}{dt^2} + 2 p_1 \frac{dr_1}{dt} \frac{dp_1}{dt} - r_1 p_1 \frac{d^2 p_1}{dt^2} - 2 r_1 \left( \frac{dr_1}{dt} \right)^2 \right] -$$

$$- d_3 \left( p_2 \frac{d^2 r_1}{dt^2} - r_2 \frac{d^2 p_1}{dt^2} + \frac{dr_1}{dt} \frac{dp_2}{dt} - \frac{dr_2}{dt} \frac{dp_1}{dt} \right) + d_4 \left( r_1 \frac{d^2 p_2}{dt^2} - p_1 \frac{d^2 r_2}{dt^2} \right) +$$

$$+ d_5 \left( p_0 \frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{dr_1}{dt} \frac{dp_0}{dt} \right) + d_6 r_1 \frac{d^2 p_0}{dt^2} = 0.$$

Аналогічний вигляд мають рівняння відносно решти узагальнених координат. Коефіцієнти  $d_k$  обчислюються через обчислення раніше інтегралів від різних комбінацій функцій Бесселя. Отже, якщо відшукати розв'язки диференціальних рівнянь щодо функцій  $r_k(t), p_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , то можна знайти вирази для узагальнених координат потенціалів швидкостей, а, отже, отримати розв'язок системи рівнянь щодо коливань вільної поверхні рідини у рухомому резервуарі і дослідити процеси демпфування коливань рідини у резервуарі із подальшим оптимальним розташуванням демпфуючих перегородок у рухомому резервуарі.

З цією метою запишемо нелінійне диференціальне рівняння (21) (і решту з них за аналогічною схемою) у вигляді

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \zeta_1 \frac{dr_1}{dt} + \sigma_1^2 r_1 = H_1 \sin \omega t + N_1(t). \quad (22)$$

У цьому рівнянні запроваджено позначення  $H_1 = H \mu_1 \omega^2$ , а через  $N_1(t)$  позначено нелінійну частину рівняння (21). Нехай  $r_1^{(k)}(t) = r_1^{(0)}(t) + r_1^{(k-1)}(t)$ , де  $r_1^{(0)}(t)$  – розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \zeta_1 \frac{dr_1}{dt} + \sigma_1^2 r_1 = H_1 \sin \omega t. \quad (23)$$

Знайдемо розв'язок цього рівняння за допомогою інтегрального перетворення Лапласа.

$$R_1^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 + \zeta_1 p + \sigma_1^2} \frac{H_1 \omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{A(p + \alpha_1) + B s_1}{(p + \alpha_1)^2 + s_1^2} + \frac{-Ap + D\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad (24)$$

$$A = \frac{1+b(\sigma_1^2 - \omega^2)}{\zeta_1 \sigma_1^2}; \quad B = \frac{b - \zeta_1 / 2A}{s_1};$$

$$D = \frac{1 - b\omega^2}{\omega \sigma_1^2}; \quad b = \frac{\omega^2 - \sigma_1^2 + \zeta_1^2}{(\omega^2 - \sigma_1^2)^2 + \zeta_1^2 \omega^2}; \quad s_1^2 = \sigma_1^2 - \zeta_1^2 / 4.$$

У просторі оригіналів виразу (24) відповідає такий вираз:

$$r_1^{(0)}(t) = e^{-\alpha_1 t} (r_{01} \cos s_1 t + r_{02} \sin s_1 t) + r_{03} \cos \omega t + r_{04} \sin \omega t. \quad (25)$$

$$\alpha_1 = \zeta_1 / 2, r_{01} = H_1 \omega A, r_{02} = H_1 \omega B, r_{03} = -r_{01}, r_{04} = H_1 \omega D.$$

Оскільки нелінійна частина  $N_1(t)$  є функцією не тільки  $r_1(t)$ , а й решти узагальнених координат, пошук розв'язку будемо здійснювати за подвійною ітераційною схемою. Спочатку у нелінійній частині утримуватимемо тільки члени, що містять  $r_1(t)$ . Підставимо (25) у  $N_1[r_1(t)]$ . Після простих перетворень отримуємо

$$N_{r_1}(t) = (q_0 + q_1 \cos 2s_1 t + q_2 \sin 2s_1 t) e^{-2\alpha_1 t} + (q_4 \cos(s_1 + \omega)t + q_5 \sin(s_1 + \omega)t + (q_7 \cos(s_1 - \omega)t + q_8 \sin(s_1 - \omega)t) e^{-\alpha_1 t} + q_9 + q_{10} \cos 2\omega t + q_{11} \sin 2\omega t. \quad (26)$$

Коефіцієнти  $q_k, k = 1, 11$ , обчислюються за відповідними алгоритмами. Підставимо отриманий вираз у рівняння (22) і знову застосуємо до нього інтегральне перетворення Лапласа. Після відшукування відповідного оригіналу отримаємо розв'язок  $r_1^{(1)}(t)$ . На наступному наближенні вирішуємо за аналогічною схемою диференціальне рівняння відносно  $p_1^{(0)}(t), p_2^{(0)}(t), r_2^{(0)}(t)$  і  $p_0^{(0)}(t)$ . Повторюючи вказану процедуру, отримаємо розв'язки диференціальних рівнянь відносно всіх узагальнених координат у такому вигляді:

$$p_0^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N_{p_0}} [p_{0_{3i}}^{(k)} + p_{0_{3i+1}}^{(k)} \cos \beta_k t + p_{0_{3i+2}}^{(k)} \sin \beta_k t] e^{-\gamma_k t};$$

$$r_1^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N_{p_0}} [r_{1_{3i}}^{(k)} + r_{1_{3i+1}}^{(k)} \cos \beta_k t + r_{1_{3i+2}}^{(k)} \sin \beta_k t] e^{-\gamma_k t};$$

$$p_2^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N_{p_0}} [p_{2_{3i}}^{(k)} + p_{2_{3i+1}}^{(k)} \cos \beta_k t + p_{2_{3i+2}}^{(k)} \sin \beta_k t] e^{-\gamma_k t};$$

$$r_2^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N_{p_0}} [r_{2_{3i}}^{(k)} + r_{2_{3i+1}}^{(k)} \cos \beta_k t + r_{2_{3i+2}}^{(k)} \sin \beta_k t] e^{-\gamma_k t};$$

$$p_1^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N_{p_0}} [p_{1_{3i}}^{(k)} + p_{1_{3i+1}}^{(k)} \cos \beta_k t + p_{1_{3i+2}}^{(k)} \sin \beta_k t] e^{-\gamma_k t}.$$

Всі зазначені коефіцієнти обчислюються програмним шляхом за відповідними алгоритмами. Після вирішення цієї задачі маємо вираз для коливань вільної поверхні рідини у резервуарі [5]. Із урахуванням виразів для узагальнених координат коливань вільної поверхні отримуємо явний вираз для потенціала швидкостей (13), (15). Результати моделювання наведено на рис. 1–3.

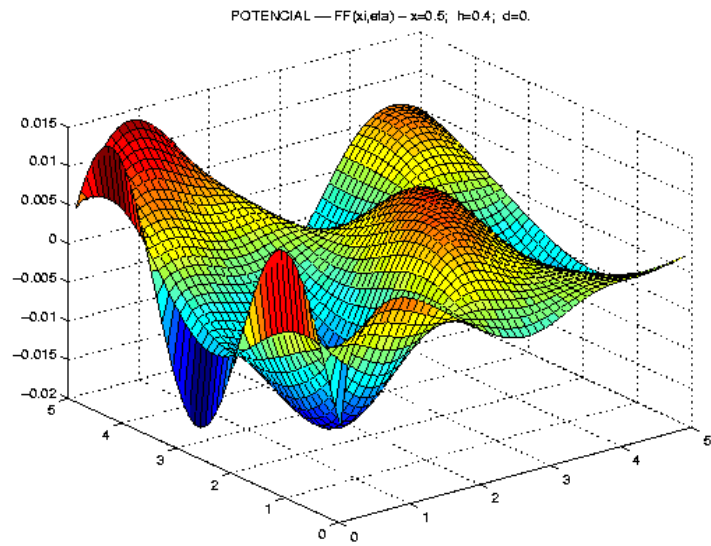


Рис. 1

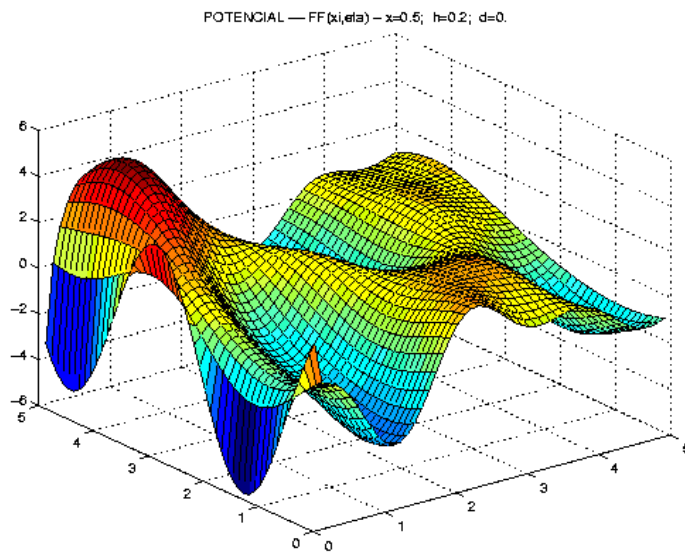


Рис. 2

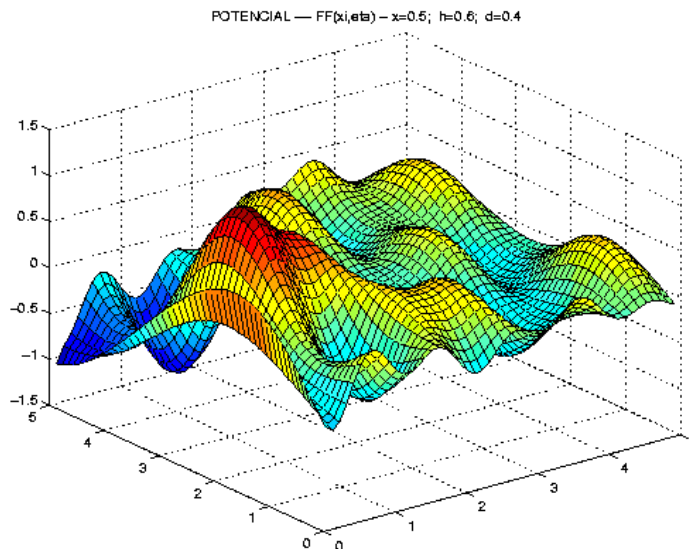


Рис. 3

### Висновки

Отримані результати математичного моделювання дають можливість визначити оптимальне розташування продольних перегородок у рухомій ємності з метою гасіння коливань рідини і негативного впливу цих коливань на рух повітряного судна.

1. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость / И.А. Луковский /—К.: Наукова думка, 1990.—296 с.
2. Лимарченко О.С. Исследование некоторых нелинейных задач динамики совместного пространственного движения цилиндрического резервуара и частично заполняющей его жидкости / О.С.Лимарченко/—К.: 1984.—57 с. (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 84.58).
3. Зеленський К.Х. Комп'ютерні методи прикладної математики /К.Х.Зеленський, В.М. Ігнатенко, О.П.Коц/.—К.: Академперіодика, 2002.—480 с.
4. Зеленский К.Х. Комп'ютерные методы прикладной математики. Т.2. Реализация. /К.Х. Зеленский, В.Н. Игнатенко, А.П. Коц / — К.: Академперіодика, 2000.—280 с.
5. Зеленський К.Х. Моделювання динаміки обмеженого обсягу рідини із вільною поверхнею / К.Х. Зеленський, В.О. Ліщина// Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова. — Київ, 2007.— №38.—С. 135—141.