

УДК 004.04
Р.М. Дубан, аспірант
Національний авіаційний університет

ЕРМІТІВ КУБІЧНИЙ СПЛАЙН З ФІКСОВАНИМИ КРАЯМИ – МОДЕЛЬ ПРОФІЛІВ IRT

В статті запропоновано в якості функцій профілів складності завдань тесту і рівнів підготовленості учасників тестування застосовувати ермітів кубічний сплайн з фіксованими краями. Отримано вирази та показано особливості роботи з такими моделями. Завдяки використанню розроблених сплайн-моделей можлива автоматизація процесу розрахунку профілів IRT за емпіричними даними тестування. Показано результати оцінювання IRT профілів розробленими моделями.

Ключові слова: IRT, сплайн-моделі, ермітів кубічний сплайн, тестовий контроль знань.

Вступ

Відомо, що для використання тестів у якості інструменту вимірювання знань тести повинні мати певні норми якості, що ґрунтуються на теорії тестового контролю. Теоретичні досягнення тестового контролю складають класична теорія тестів (Classical Test Theory)[1] та сучасна теорія Item Response Theory (IRT)[2]. В порівнянні з класичною теорією, IRT має наступні переваги: оцінка складності тестових завдань мало залежить від вибірки респондентів на яких вона була отримана; оцінка рівня підготовленості учнів не залежить від набору тестових завдань що використовуються; неповнота даних (пропуск деяких комбінацій рівня знань учня – рівня складності завдання) не є критичним[3].

Суть IRT полягає в тому, що тестові питання та респонденти характеризуються деякою функціональною залежністю від складності питання та рівня знань респондента. Ці складові є латентними, прихованими, а теорія встановлює зв'язок між множинами цих характеристик. Теорія базується на математичних моделях, що дозволяють будувати профілі складності тестів та рівнів знань респондентів. Більш відомими є логістичні моделі Г. Раша та А. Бірнбаума. Основою для багатьох моделей IRT, в тому числі і моделей Бірнбаума, є одно параметрична модель Раша - Rasch measurement[4]. В його моделі використовується термін ймовірності $P(\theta_i, \beta_j)$ правильного виконання i -м учасником тестування j -го тестового завдання, що залежить від їх параметрів. Ця залежність називається функцією успіху. Ймовірність визначається за різницею рівнів знань учасника тестування θ_i та рівня складності завдання β_j :

$$P(\theta_i, \beta_j) = \frac{e^{D(\theta_i - \beta_j)}}{1 + e^{D(\theta_i - \beta_j)}}. \quad (1)$$

Модель Раша базується на найбільш важливому параметрі $(\theta_i - \beta_j)$ - різниці знань респондента та складності завдання. Множник D , зазвичай приймає значення $D=1.7$ для сумісності моделі Г.Раша з моделлю А. Фергасона [5]. Оскільки ще в класичній теорії тестів було з'ясовано, що завдання мають різну диференційною здатність, в двопараметричну модель Бірнбаума додатково увійшла диференційна здатність завдання, і функція успіху прийняла вигляд

$$P(\theta_i, \beta_j) = \frac{e^{D \cdot a_j \cdot (\theta_i - \beta_j)}}{1 + e^{D \cdot a_j \cdot (\theta_i - \beta_j)}}, \quad (2)$$

де a_j - диференційна здатність завдання, що характеризує нахил (крутизну) профілю завдання.

Окрім згаданих вище моделей в IRT використовуються ще й інші моделі і їх кількість збільшується [6]. Причиною цього є, насамперед, значний інтерес до цих питань в освіті, і бажання отримати більш точну, надійну та просту у використанні модель. Різні автори в IRT пропонують нові параметри та їх комбінації, обґрунтовуючи необхідність їх врахування і застосування. Питання вибору оптимальної моделі залишається актуальним і сьогодні.

Хоча значного поширення і застосування серед моделей IRT набула саме однопараметрична модель Г.Раша, проте і її застосування є досить складним процесом [7]. Нелінійна залежність моделі від параметрів значно ускладнює оцінювання функцій за емпіричними даними. Так, якщо

модель не може адекватно описати емпіричні данні, то емпіричні данні вибраковуються і не використовуються. Такий підхід порушує цілісність емпіричних даних і є малопродуктивним. Тому серед моделей профілів особливої уваги заслуговують сплайн-моделі, які дозволяють описувати функціональні залежності достатньо складної форми, у поєднанні із простотою розрахунків та лінійною залежністю від параметрів. Не зважаючи на це, застосування сплайн-моделей в IRT не набуло широкого вжитку. Розроблені сплайн-моделі IRT [8] використовують в якості базисів лінійні поліноми, так звані В-сплайни, що не враховують особливостей профілів IRT.

Адекватність сплайн-моделі профілям IRT досягається правильним підбором базису сплайна, який забезпечить виконання апріорних умов профілів. Теоретичні та практичні аспекти застосування сплайнів освітлені в роботах [9-10]. Отримані сплайн моделі обов'язково мають бути перевірені на відповідність профілям IRT.

Основний матеріал

Зазвичай показники θ_i та β_j вимірюються у логітах, хоча також їх можна вимірювати у відповідних безумовних ймовірностях. Перетворення із логіт у відносні величини здійснюється для рівня знань за формулою

$$\theta v_i = \frac{e^{\theta_i}}{1 + e^{\theta_i}}, \quad (3)$$

де θ_i - рівень підготовленості учасника тестування в логітах,

а θv_i - перерахований у відносних величинах показник рівня підготовленості.

Зворотне перетворення із відносних величин у логіти здійснюється за формулою

$$\theta_i = \ln\left(\frac{\theta v_i}{1 - \theta v_i}\right). \quad (4)$$

Формули перетворень величин для рівня складності завдань тесту β_j є аналогічними формулам (3) та (4).

При статистичному опрацюванні результатів тестувань та оцінках похибки моделей краще користуватися відносними значеннями показників θ_i та β_j , оскільки нелінійне перетворення на логіти зумовить ненормальність розподілу випадкової складової. Після підстановки в однопараметричну модель Раша (1) виразів перетворення у відносні величини параметрів θ_i та β_j , отримаємо формулу для побудови функції у відносних величинах на проміжку $[0;1]$:

$$Pv(\theta v_i, \beta v_j) = \frac{\left(\frac{\theta v_i}{\theta v_i - 1}\right)^D}{\left(\frac{\beta v_j}{\beta v_j - 1}\right)^D + \left(\frac{\theta v_i}{\theta v_i - 1}\right)^D}. \quad (5)$$

Для двопараметричної моделі Бірнбаума (2) формула (5) матиме вигляд:

$$Pv(\theta v_i, \beta v_j) = \frac{\left(\frac{\theta v_i}{\theta v_i - 1}\right)^{D \cdot a_j}}{\left(\frac{\beta v_j}{\beta v_j - 1}\right)^{D \cdot a_j} + \left(\frac{\theta v_i}{\theta v_i - 1}\right)^{D \cdot a_j}}. \quad (6)$$

Розглянемо характерні особливості профілів тестових питань та респондентів яким має відповідати вибрана модель. В IRT вважається, що респондент з рівнем знань $\theta v = 1$ відповідає на питання будь якої складності з ймовірністю $P = 1$. Якщо ігнорувати вгадування (або маємо значну кількість варіантів відповідей) маємо очевидне припущення, що респондент зі знаннями на рівні $\theta v = 0$ не відповідає на завдання будь якої складності (відповідає з ймовірністю $P = 0$). Якщо враховувати вгадування то P при рівні знань $\theta v = 0$ буде відповідати ймовірності вгадування (при 4 варіантах відповідей $P = 1/4$). Вважаємо що профілі запитання є монотонною не спадаючою функцією.

Розглянемо в якості моделі профілю сплайн-функцію. Це кусочна функція із хорошими властивостями наближення. Сплайн складається з фрагментів функцій одного виду, які між собою певним чином з'єднані. Найпростішим сплайном є кусково-постійна функція – ламана. Найбільш відомими є В-сплайни. Це сплайни утворені з допомогою локальних базисних сплайн-функцій. Сплайн з базисів будують згідно:

$$S(x) = \sum_{i=0}^r a_i B_i(x), \quad (7)$$

де $B_i(x)$ – базисний сплайн,

a_i – числові коефіцієнти,

r – кількість фрагментів сплайна.

Сплайни мають хороші властивості наближення завдяки тому, що зменшення похибки наближення досягається не через ускладнення базису, а через скорочення довжини окремих фрагментів. Саме тому системи лінійних рівнянь, що ґрунтуються на сплайнових моделях як правило добре обумовлені, а число обумовленості практично не залежить від порядку сплайнового полінома – r . Виходячи із структури сплайна очевидно що існує практично необмежене різноманіття цих функцій, що надає дослідникам широкі можливості при моделюванні. Існують ермітові, експоненційні, фракціональні, тригонометричні, напружені, сплайни Безьє, сплайни Паде та інші.

В практиці обробки даних широко застосовують ермітові сплайни [11]. Базис ермітових сплайнів називають ще інтерполяційними імпульсами і за формою він нагадує поліноми Лагранжа. В центральній точці він має значення рівне 1, а в інших вузлових точках – нульові. Завдяки цьому числові значення сплайна при інтерполяції співпадають зі значеннями функції у вузлах яку інтерполюють. Характерною особливістю ермітового сплайна є дотримання певних умов стикування фрагментів. Найчастіше це рівність значень і, принаймні, першої похідної. Неперервність першої похідної можна досягти якщо використовувати в якості фрагментів кубічний алгебраїчний поліном, наприклад кубічний ермітів сплайн. Ще однією особливістю сплайнів є крайові умови, які зумовлені тим, що сплайн по суті відрізок, який має два кінці. На цих кінцях відсутні сусідні фрагменти, через що відсутні умови стикування і значення похідних доводиться задавати. Існують сплайни для яких ця проблема відсутня – це періодичні сплайни де перший фрагмент є продовженням останнього, і сплайни у яких перший і останній кінці продовжені у нескінченність (кубічний ермітів сплайн).

Для моделювання виберемо ермітів кубічний сплайн, оскільки він забезпечуючи неперервність значення першої похідної у вузлах є найбільш простим у розрахунку, а його коефіцієнти a_i з полінома (7) мають той же зміст, що й процес який ми моделюємо.

Для його розрахунку необхідно вирішити систему інтерполяційних рівнянь. В ермітового сплайна базисні функції побудовані так, що числові коефіцієнти є значеннями сплайна та похідними сплайна у вузлах

$$S(x) = \sum_{i=0}^{R-1} f(u_i) H_i(x) + \sum_{i=0}^{R-1} f'(u_i) \hat{H}_i(x), \quad (8)$$

де $H_i(x)$ – базисна функція сплайна,

R – кількість вузлів сплайна,

u - вузли сплайна.

Для точки x_k , що належить фрагменту i вираз (8) можна записати як

$$S(x_k) = f(u_i) {}^0 h_i(x_k) + f(u_{i+1}) {}^1 h_{i+1}(x_k) + f'(u_i) {}^0 \hat{h}_i(x_k) + f'(u_{i+1}) {}^1 \hat{h}_{i+1}(x_k), \quad (9)$$

де h – складові базисних сплайнів $H_i(x)$, $H_{i+1}(x)$, $\hat{H}_i(x)$, $\hat{H}_{i+1}(x)$.

Загальні вирази для таких складових базисних сплайнів отримано в [2.2.]:

$${}^0 h_i(x) = -\frac{(x - u_{i+1})^2 (2x - 3u_i + u_{i+1})}{(u_i - u_{i+1})^3}, \quad (10)$$

$${}^1 h_{i+1}(x) = \frac{(x - u_i)^2 (2x + u_i - 3u_{i+1})}{(u_i - u_{i+1})^3}, \quad (11)$$

$${}^0\hat{h}_i(x) = \frac{(x-u_i)(x-u_{i+1})^2}{(u_i-u_{i+1})^2}, \quad (12)$$

$${}^1\hat{h}_{i+1}(x) = \frac{(x-u_i)^2(x-u_{i+1})}{(u_i-u_{i+1})^2}. \quad (13)$$

Аби не мати справу із похідними та двома видами базисних функцій $H_i(x)$ та $\hat{H}_i(x)$, похідні замінюють центральними розділеними різницями у вузлах сплайна:

$$f'(u_i) \approx \frac{u_{i+1}-u_i}{u_{i+1}-u_{i-1}} \cdot \frac{f(u_i)-f(u_{i-1})}{u_i-u_{i-1}} + \frac{u_{i-1}-u_i}{u_{i-1}-u_{i+1}} \cdot \frac{f(u_{i+1})-f(u_i)}{u_{i+1}-u_i}. \quad (14)$$

Модель-профіль має важливі особливості, які явно має врахувати сплайн-модель. В IRT існує два типи профілів – тестових завдань і респондентів. Профілі респондентів в сенсі їх побудови можна розглядати, як дзеркальне відображення профілів питань.

Для профілів завдань сплайн-модель має бути “зафіксована” на краях згідно умов:

$$f(0) = 0; \quad f(1) = 1. \quad (15)$$

Для профілів респондентів властиві зворотні умови: $f(0) = 1, f(1) = 0$. Якщо не врахувати ці особливості, то сплайн модель може суттєво порушувати ці умови й буде неадекватною процесу.

Позначимо кубічний ермітів сплайн, що моделює профіль завдання тесту і має зафіксовані кінці як $F^+(x)$. $F^+(x)$ має вигляд що показано на рисунку 1.

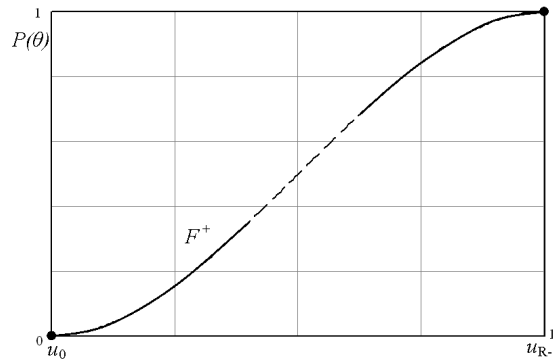


Рис. 1. Сплайн-профіль $F^+(x)$ завдання тесту

Необхідно отримати розрахункові вирази для $F^+(x)$. $F^+(x)$ визначена на відрізку $x \in [u_0; u_{R-1}]$. У відносних одиницях $u_0 = 0$, $u_{R-1} = 1$, а в логітах $u_0 = -\infty$, $u_{R-1} = +\infty$, тому користуємось відносною шкалою.

Розглянемо перший ліворуч фрагмент сплайн-профілю $F^+(x)$. Із загального виразу (8) згідно умов (15) врахувавши $f(0) = 0, f'(0) = 0$, та локальні властивості базисів отримаємо аналогічно (9):

$$F_1^+(x) = f(u_1) {}^1h_1(x) + f'(u_1) {}^1\hat{h}_1(x). \quad (17)$$

Підставивши (11) та (13) з врахуванням умов (15) в (17) та врахувавши (14), після підстановок та отримаємо:

$$F_1^+(x) = f(u_1) \frac{x^2(u_1^2 - 2u_1u_2 + xu_2)}{u_1^3(u_1 - u_2)} - f(u_2) \frac{x^2(x - u_1)}{u_1u_2(u_1 - u_2)}. \quad (18)$$

Графічно в загальному вигляді функція першого фрагмента (18) для профілю питання тесту зображено на рисунку 2

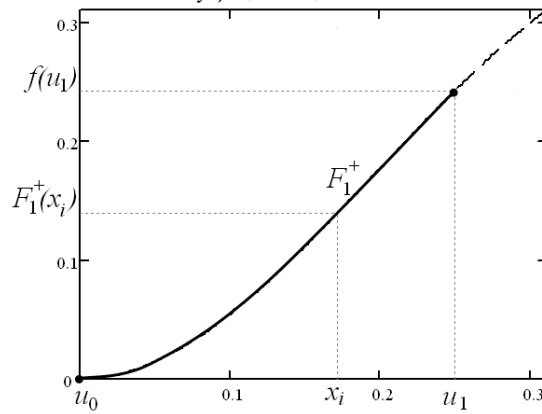


Рис. 2. Перший фрагменти фіксованого сплайна $F^+(x)$

Розглянемо останній фрагмент сплайн-профілю $F^+(x)$, де $x \in [u_{R-2}; u_{R-1}]$. Із загального виразу (8) згідно умов (15) врахувавши $f(1)=1, f'(1)=0$, та локальні властивості базисів, підставимо (10-12) з врахуванням (15), та врахувавши (14) вираз останнього фрагменту прийме вигляд:

$$F_{R-1}^+(x) = \frac{p_3(p_6 p_4 p_3 + p_5 p_1^2)}{p_4 p_2^3} - f(u_{R-3}) \frac{p_3 p_1^2}{p_5 p_4 p_2} - f(u_{R-2}) \frac{p_1^2 p_7}{p_5 p_2^3}, \quad (19)$$

де:

$$p_1 = x - 1; \quad p_2 = u_{R-2} - 1; \quad p_3 = u_{R-2} - x; \quad p_4 = u_{R-3} - 1; \quad p_5 = u_{R-3} - u_{R-2};$$

$$p_6 = u_{R-2} + 2x - 3; \quad p_7 = u_{R-2}^2 - 2u_{R-3}u_{R-2} + u_{R-3} - x + xu_{R-3}.$$

Графічно в загальному вигляді функції останнього фрагменту сплайна $F^+(x)$ зображено на рисунку 3.

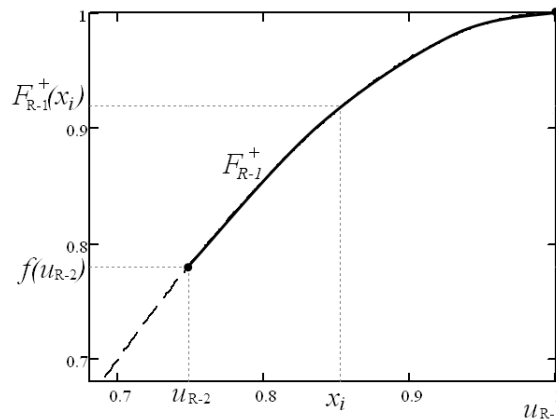


Рис. 3. Останній фрагменти фіксованого сплайна $F^+(x)$

Для побудови сплайна кількість вузлів R має бути не менше трьох. Якщо вузлів сплайна лише три, тобто фрагментів r лише два, то другий фрагмент є останнім. В такому разі вузол u_1 співпадає з вузлом u_{R-2} , а вузол u_0 – з вузлом u_{R-3} .

Зазвичай, в процесі оптимізації розміщення вузлів виникає потреба збільшити кількість вузлів, тому доцільно відразу встановити кількість вузлів $R = 4$. В загальному вигляді сплайн-модель $F^+(x)$ профілів тестових завдань на проміжку $x \in [u_0; u_{R-1}]$, для $R = 4$ матиме вигляд:

$$F^+(x) \begin{cases} F_1^+(x), \text{ якщо } x \in [u_0, u_1]; \\ F_2^+(x), \text{ якщо } x \in [u_1, u_2]; \\ F_{R-1}^+(x), \text{ якщо } x \in [u_2, u_{R-1}]. \end{cases} \quad (20)$$

В (20) перший фрагмент розраховується за (18), а останній за (19). Середній фрагмент розраховується за загальною формулою (9) але з врахуванням умов (15) та (14) і має вигляд:

$$F_2^+(x) = f(u_1) \frac{P_5 P_6}{u_1 p_1 p_3^2} + f(u_2) \frac{P_2 P_7}{u_2 p_4 p_3^2} + \frac{P_2^2 P_5}{p_1 p_3 p_4}, \quad (21)$$

де:

$$p_1 = u_1 - 1; \quad p_2 = u_1 - x; \quad p_3 = u_1 - u_2; \quad p_4 = u_2 - 1; \quad p_5 = u_2 - x;$$

$$p_6 = u_1^2 - u_1^2 x + x^2 - u_1 x - u_2 x + u_1 u_2 x; \quad p_7 = 2u_2 x - x^2 - u_1 u_2 - u_2^2 x + u_1 u_2 x.$$

Якщо фрагментів сплайна більше трьох то другий фрагмент після врахування (15) та (14) прийме вигляд:

$$F_2^+(x) = f(u_1) \frac{P_4 P_6}{u_1 p_2^2 p_3} - f(u_2) \frac{P_1 P_7}{u_2 p_2^2 p_3} + f(u_3) \frac{P_1^2 P_4}{p_2 p_3 p_5}, \quad (22)$$

де:

$$p_1 = u_1 - x; \quad p_2 = u_1 - u_2; \quad p_3 = u_1 - u_3; \quad p_4 = u_2 - x; \quad p_5 = u_2 - u_3;$$

$$p_6 = u_1^2 u_3 - u_1^2 x + u_3 x^2 + u_1 u_2 x - u_1 u_3 x - 2u_2 u_3 x; \quad p_7 = u_2^2 x + u_3 x^2 + u_1 u_2 u_3 - u_1 u_2 x - 2u_2 u_3 x.$$

А передостанній фрагмент прийме вигляд:

$$F_{R-2}^+(x) = f(u_{R-2}) \frac{P_5 (P_2 P_5 P_7 P_8 - P_4 P_5 P_8 P_9 - P_4 P_6 P_2^2)}{p_4 p_8 p_3^3} -$$

$$- f(u_{R-3}) \frac{P_2 (P_2 P_4 P_6 P_{10} + P_1 P_5^2 P_6 - P_4 P_5 P_{11})}{p_4 p_6 p_3^3} -$$

$$- f(u_{R-4}) \frac{P_2^2 P_5}{p_3 p_6 p_8} - \frac{P_2 P_5^2}{p_1 p_3 p_4}, \quad (23)$$

де:

$$p_1 = u_{R-2} - 1; \quad p_2 = u_{R-2} - x; \quad p_3 = u_{R-2} - u_{R-3}; \quad p_4 = u_{R-3} - 1; \quad p_5 = u_{R-3} - x;$$

$$p_6 = u_{R-3} - u_{R-4}; \quad p_7 = u_{R-3} - 2u_{R-2} + 1; \quad p_8 = u_{R-2} - u_{R-4};$$

$$p_9 = u_{R-3} - 3u_{R-2} + 2x; \quad p_{10} = u_{R-2} - 3u_{R-3} + 2x; \quad p_{11} = u_{R-4} - 2u_{R-3} + u_{R-2}.$$

Якщо ж фрагментів більше чотирьох, то усі фрагменти з другого по передостанній розраховуються за загальною формулою ермітового кубічного сплайна (9). В загальному вигляді сплайн-модель $F^+(x)$ профілів тестових завдань на проміжку $x \in [u_0; u_{R-1}]$, для $R \geq 5$ має вигляд:

$$F^+(x) \begin{cases} F_1^+(x), \text{ якщо } x \in [u_0, u_1); \\ F_2^+(x), \text{ якщо } x \in [u_1, u_2); \\ F_{i+1}^+(x), \text{ якщо } x \in [u_i, u_{i+1}), i \in [2, R-3], R > 5; \\ F_{R-2}^+(x), \text{ якщо } x \in [u_{R-3}, u_{R-2}); \\ F_{R-1}^+(x), \text{ якщо } x \in [u_{R-2}, u_{R-1}). \end{cases} \quad (24)$$

Графічно сплайн-модель $F^+(x)$ при $R \geq 4$ зображена на рисунку 4.

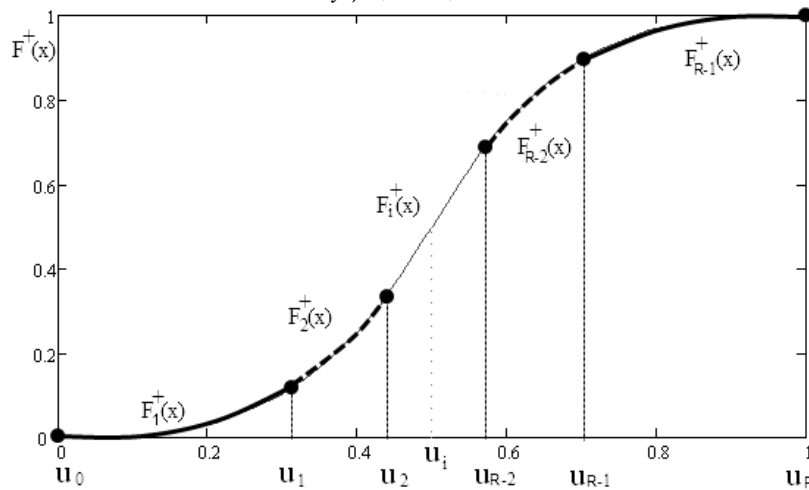


Рис. 4. Сплайн-модель профілів тестових завдань $F^+(x)$ при $R \geq 4$

Для побудови профілю рівня знань респондента, використовується сплайн-функція $F^-(x)$, яка має враховувати умови $f(0) = 1, f(1) = 0$. $F^-(x)$ отримаємо з виведеної функції $F^+(x)$, як:

$$F^-(x) = F^+(1-x). \quad (24)$$

Незначним ускладненням сплайн-моделі ермітового кубічного сплайна отримали модель, що потребує меншої кількості вхідних параметрів та вирішує проблему фіксації крайніх точок. Це дозволило забезпечити виконання однієї із апріорних умов профілів IRT.

Оцінку адекватності моделі проведемо на побудові профілю питання із рівнем складності $\beta\nu = 0.5$, а рівень підготовленості учасників тестування $\theta\nu_i$ змінюється від 0 до 1 із кроком 0,01. Перевіримо створену сплайн-модель на адекватність однопараметричній моделі Раша (1), або двопараметричній моделі Бірнбаума (2) за умови що диференційна здатність питання $a = 1$. Візьмемо сплайн з кількістю вузлів $R = 4$. Перший та останній вузли інтегровані в модель (20): $tu_0 = 0$ та $tu_3 = 1$. Другий та третій вузол встановимо в позиції $tu_1 = 0.4$ і $tu_2 = 0.6$. Значення функції у вузлових точках сплайна визначаються за формулою (6). Ці значення співпадають із параметрами $f(u)$ сплайна $F^+(x)$ (20). Результат побудови функції Раша за описаними умовами та її інтерполяція створеною моделлю (20) із вузлами в tu показано на рисунку 5.

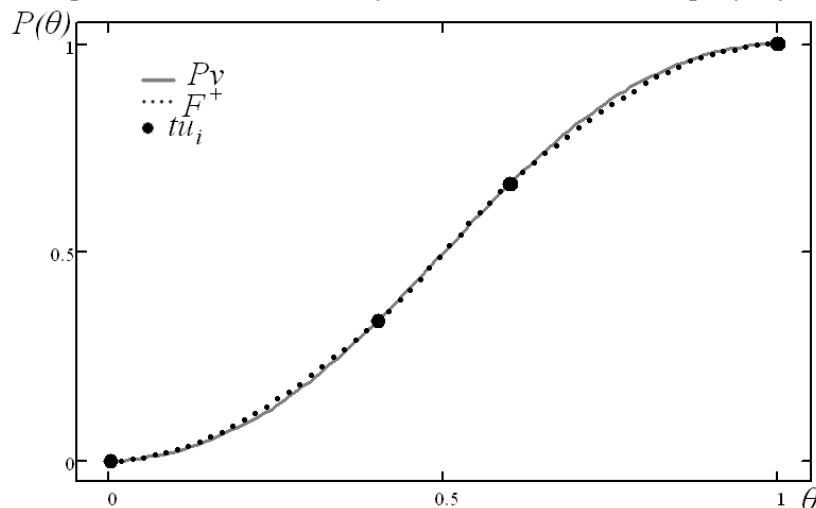


Рис. 5. Інтерполяція функції Раша сплайн-моделлю $F^+(x)$ при $R = 4$

Як видно із рисунку 5 для досить гарної інтерполяції функції Раша вистачило всього 4 вузли сплайна. Два із чотирьох вузлів вже є інтегрованими у сплайн модель, тому розрахунок потрібен лише для двох середніх вузлів. Цього достатньо, щоб похибка інтерполяції майже не перевищила 1% (рис. 6.).

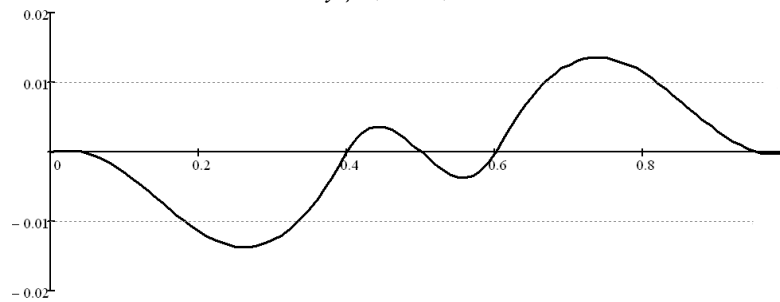


Рис. 6. Похибка інтерполяції функції Раша сплайн-моделлю $F^+(x)$ при $R = 4$

Похибка розраховується як різниця початкових даних отриманих за (6) та даних отриманих з інтерполяційного сплайна (20) при заданих вузлах t_i та розрахованих їх значеннях за МНК. Похибку можна дещо зменшити шляхом покоординатного зміщення позиції вузлів при оптимізації їх розміщення, або збільшенням кількості вузлів.

Висновки

Отримана модель ермітового кубічного сплайна з фіксованими краями досить добре дозволяє описувати характеристичні криві за однопараметричною моделлю Раша (1), або за двопараметричною моделлю Бірнбаума (2) із невисокою диференційною здатністю завдання тесту. Модель інтегрована в інформаційну систему підтримки тестового контролю знань "Logit" [<http://logit.kdpu.edu.ua/>], що дозволило перевірити модель на реальних емпіричних даних. Результати експерименту показали хорошу адекватність моделі при невеликому рівні диференційної здатності $a \leq 3$, але цього в більшості випадків достатньо. Диференційну здатність $a > 3$ можуть мати завдання в добре підготовлених тестах, що вже пройшли попередні оцінки та вдосконаленні. Застосування отриманої сплайн-моделі в інформаційній системі дозволило проводити розрахунки та побудову профілів в автоматичному режимі, без участі оператора.

Література

1. Linda M. Crocker, James Algina. Introduction to Classical and Modern Test Theory. –New-York: Harcourt Brace Jovanovich, 1986. – 527 p.
2. Baker F.B. The Basics of Item Response Theory. – ERIC, 2001. –172p.
3. Ким В.С. Тестирование учебных достижений. Монография. Уссурийск. УГПИ, 2007. – 214 с.
4. Rasch G. Probabilistic Model for Some Intelligence and Attainment Tests. – Chicago: Univ. of Chicago Press, 1980. – 184 p.
5. Fergusson, G.A. Item Selection by the Constant Process / Psychometrika, 1942, v.VII, pp. 19 - 29.
6. C. DeMars. Item Response Theory. Oxford University Press: 2010. – 144 p.
7. Wilson M. Constructing Measures: An Item Response Modeling Approach. – Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum associates, 2005. – 228 p.
8. Michal Abrahamowicz, James O. Ramsay. Multicategorical spline model for item response theory / Psychometrika, 1992, vol. 57, no. 1, pp. 5-27.
9. Де Бор К. *Практическое руководство по сплайнам.* — С. 304. — Москва : Радио и связь, 1985.
10. Корнейчук Н.П. *Сплайны в теории приближения.* — С. 352. — Москва : Наука, 1984.
11. Шелевицький І.В. Сплайни в цифровій обробці даних і сигналів / І.В. Шелевицький, М.О. Шутко, В.М. Шутко, О.О. Колганова. - Кривий Ріг, 2008. – 232 с.