

УДК 539.3

О.В. Гуда

Луцький національний технічний університет

**Згин круглї пластинки, защемленої по контуру, зосередженим навантаженням з урахуванням деформацій поперечного зсуву та поперечного обтиснення**

. Розглянуто згин защемленої по контуру круглї пластинки зосередженим навантаженням. Знайдено вирази для прогинів, згинальних моментів та напружень пластинки. З'ясовано, що при визначенні нормальних переміщень для ізотропної пластини, основну добавку дає врахування деформацій поперечного зсуву. При визначенні нормальних напружень вплив поперечного зсуву є незначним ближче до центру пластини.

Ключові слова: ізотропні та трансропні пластини, поперечний зсув, поперечне обтиснення, згинальні моменти, поперечні сили, прогин, напруження.

Одним із ефективних методів розрахунку пластин від дії зосереджених навантажень є метод лінійного спряження Н.І.Мухелішвілі [1], який побудований на властивостях аналітичних функцій комплексної змінної  $\xi = re^{i\theta}$ . Цей метод був застосований ним для розв'язання змішаних та контактних задач плоскої задачі теорії пружності. Стосовно згину ізотропних та тансверсально-ізотропних пластин детально розроблявся І.О.Прусом [2] для класичних рівнянь Кірхгофа-Лява та теорії тансверсально-ізотропних пластин середньої товщини.

Рівняння рівноваги та вирази для згинальних моментів і поперечних сил уточненої теорії згину пластин у випадку відсутності розподіленого навантаження мають вигляд [3]:

$$\Delta \Delta w = 0, \quad \Delta \Omega - k^2 \Omega = 0, \quad \Delta w_\tau = 0; \quad (1)$$

$$M_r = D \left( \frac{\partial \gamma_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r} \gamma_r \right);$$

$$M_\theta = D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\gamma_r}{r} + \nu \frac{\partial \gamma_r}{\partial r} \right);$$

$$M_{r\theta} = \frac{1}{2} D (1-\nu) \left( \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \gamma_\theta \right); \quad (2)$$

$$Q_r = K' \left( \frac{\partial w_\tau}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right);$$

$$Q_\theta = K' \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_\tau}{\partial \theta} + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right),$$

де  $K' = \frac{4}{3} G' h$ ,  $w_\tau = \frac{4}{5} \frac{D}{K'} \Delta w$ ,  $\gamma_r = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial r} - \frac{4}{5} \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$ ,  $\gamma_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} - \frac{4}{5} \frac{\partial \Omega}{\partial r}$ ,  $\bar{w} = w - \aleph w_\tau$ ,

$\aleph = 0.8 + 0.2\alpha$ ,  $\alpha = \frac{\nu' G'}{2G}$ ,  $w$  – переміщення серединної поверхні пластинки;  $\Omega$  – деяка вихрова

складова функцій переміщень (функція кручення),  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  – оператор Лапласа,

$$D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)}; \quad k^2 = 2.5 \frac{G'}{G} h^{-2}; \quad R \text{ і } 2h \text{ – радіус і товщина пластинки.}$$

Розглянемо можливість цього методу для дослідження згину круглї пластинки, защемленої по контуру. Пластинка згинається зосередженою силою  $P_0$ , що прикладена в центрі. Виразимо переміщення  $w$  через комплексні потенціали  $\varphi(\xi)$  і  $\chi(\xi)$  у вигляді модифікованої формули Гурса:

$$w = \operatorname{Re} \left[ \bar{\xi} \varphi(\xi) + \chi(\xi) - 4\varepsilon_1 \Phi(\xi) \right],$$

де  $\varepsilon_1 = \frac{8\tilde{G} - 3\nu''}{10(1-\nu)} h^2$ ;  $\varphi(\xi)$  і  $\chi(\xi)$  – довільні функції комплексної змінної  $\xi = re^{i\theta}$ ,

$\Phi(\xi) = [\varphi(\xi)]'$ ,  $\tilde{G} = G/G'$ . Зауважимо, що в теорії пластин І.О.Прусова [2], де не враховується

обтиснення, цей параметр дорівнює  $\varepsilon_{II} = \frac{2h^2\tilde{G}}{3(1-\nu)}$ .

Наслідуючи І.М. Карцивадзе, аналітичне продовження функції  $\Phi(\xi)$  на область поза пластинкою запишемо у вигляді

$$\Phi(\xi) = -\bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{\xi}\right) + \frac{R^2}{\xi} \bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{\xi}\right) + \frac{R^2}{\xi^2} \bar{\Psi}\left(\frac{R^2}{\xi}\right).$$

Тут функції  $\Psi(\xi) = \frac{d}{d\xi} \psi(\xi)$ ,  $\psi(\xi) = \frac{d}{d\xi} \chi(\xi)$ .

Виконавши певні математичні перетворення, отримаємо наступні вирази для згинальних моментів та поперечних сил:

$$\begin{aligned} M_r + M_\theta &= -2D(1+\nu) \left[ \Phi(\xi) + \bar{\Phi}(\xi) \right]; \\ M_r + iH_{r,\theta} &= -D \left[ 2 \left( \Phi(\xi) + \bar{\Phi}(\xi) \right) - (1-\nu) \left( \Phi(\xi) - \frac{R^2}{r^2} \Phi\left(\frac{R^2}{\xi}\right) + F_0 \right) \right]; \\ M_\theta + \nu M_r - i(1+\nu)H_{r,\theta} &= -D(1-\nu^2) \left[ \Phi(\xi) - \frac{R^2}{r^2} \Phi\left(\frac{R^2}{\xi}\right) + F_0 \right]; \\ Q_r - iQ_\theta &= -4D\Phi'(\xi), \\ F_0 &= \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left[ \bar{\Phi}(\xi) - \bar{\xi} \bar{\Phi}'(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Проекція головного вектора зусиль, що прикладені до будь-якого замкнутого контуру  $L$ , умовно виділеного з пластинки на вісь  $Oz$  дорівнює:

$$P_r^0 = r \int_L Q_r d\theta = \left\{ 2iD \left[ \Phi(\xi) - \bar{\Phi}(\xi) \right] \right\}_L. \quad (4)$$

Вважаючи, що на контурі  $L$  пластини, що займає область  $S^+$ , виконуються умови жорсткого защемлення  $\left( w = 0, \gamma_r = 0, Q_r = -\frac{P_0}{2\pi} \frac{1}{r} \right)$ , котрі записуються через граничні значення комплексних потенціалів у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) - \Phi^-(t) &= 0 \text{ на } L, t = Re^{i\theta}; \\ \operatorname{Im} \left[ \varphi^+(t) - \varphi^-(t) - 4\varepsilon \bar{\Phi}'(t) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

та приймаючи до уваги, що пластина згинається зосередженою силою  $P_0$ , прикладеною в центрі, функцію  $\Phi(\xi)$  можна записати у вигляді:

$$\Phi(\xi) = \frac{P_0}{8\pi D} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{\xi}{R} \right).$$

Звідси отримаємо вираз для прогинів плити в точках серединної поверхні:

$$w = \frac{P_0}{8\pi D} \left( \frac{1}{2} (R^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{R} + 4\varepsilon \ln \frac{R}{r} \right), \quad (6)$$

Застосувавши формули (3), знаходимо згинальні моменти  $M_r$ ,  $M_\theta$  і поперечну силу  $Q_r$ :

$$M_r = \frac{P_0}{4\pi} \left( (1+\nu) \ln \frac{R}{r} - 1 + \frac{4\nu''h^2}{5r^2} \right), \quad Q_r = -\frac{P_0}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad (7)$$

$$M_\theta = \frac{P_0}{4\pi} \left( (1+\nu) \ln \frac{R}{r} - \nu - \frac{4\nu''h^2}{5r^2} \right),$$

Напруження  $\sigma_r$  та  $\sigma_\theta$  на зовнішніх поверхнях плити ( $z = \pm h$ ) будемо шукати, додавши до них складову нормальних напружень –  $A'\sigma_z$ , яка буде враховуватись при визначенні напружень у центрі пластини:

$$\sigma_r = \pm \frac{3M_r}{2h^2} \mp \frac{1-\alpha}{5(1-\nu)} \left[ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} Q_r \right] \frac{G}{G'}. \quad (8)$$

Підставивши (7) в залежність (8), одержимо для  $z = h$ :

$$\sigma_r = \pm \frac{3M_r}{2h^2} \mp \frac{1-\alpha}{5(1-\nu)} \left[ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} Q_r \right] \frac{G}{G'} + A'\sigma_z;$$

$$\sigma_\theta = \pm \frac{3M_\theta}{2h^2} \mp \frac{1-\alpha}{5(1-\nu)} \left[ \frac{1}{r} Q_r + \nu \frac{\partial Q_r}{\partial r} \right] \frac{G}{G'} + A'\sigma_z, \quad (9)$$

де  $\sigma_z = -q^-$  при  $z = -h$ ,  $\sigma_z = 0$  при  $z = h$ ;  $q^- = P_0 / (\pi c^2)$ ,  $c$  – радіус круга, всередині якого розподілене зусилля  $q^-$ .

Підставивши (5) у залежність (3), одержимо для  $z = h$ :

$$\sigma_r = \frac{3P_0}{8\pi h^2} \left( (1+\nu) \ln \frac{R}{r} - 1 - \frac{2}{15} \left( 2 \frac{G}{G'} - 7\nu'' \right) \frac{h^2}{r^2} \right); \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3P_0}{8\pi h^2} \left( (1+\nu) \ln \frac{R}{r} - \nu + \frac{2}{15} \left( 2 \frac{G}{G'} - 7\nu'' \right) \frac{h^2}{r^2} \right).$$

Для  $z = -h$ , коли ( $r > c$ ) будемо мати

$$\sigma_r = -\frac{3P_0}{8\pi h^2} \left( (1+\nu) \ln \frac{R}{r} - 1 - \frac{2}{15} \left( 2 \frac{G}{G'} - 7\nu'' \right) \frac{h^2}{r^2} \right); \quad (11)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{3P_0}{8\pi h^2} \left( (1+\nu) \ln \frac{R}{r} - \nu + \frac{2}{15} \left( 2 \frac{G}{G'} - 7\nu'' \right) \frac{h^2}{r^2} \right).$$

Для випадків, коли ( $r < c$ ), до формул (11) необхідно додати величину  $-\frac{\nu''}{1-\nu} \frac{P_0}{\pi c^2}$ , яка враховує вплив напружень  $\sigma_z$ . Останнім доданком (квадратні дужки) у формулах (10), (11) визначається вплив поперечного зсуву та обтиснення на нормальні напруження  $\sigma_r, \sigma_\theta$ , а також розбіжність із результатами, отриманими за теоріями, що базуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява та І.О.Прусова, який у цих теоріях відсутній. Потрібно також зауважити, що формули (6)–(11) мають особливості в центрі пластинки (в точці прикладання сили  $P_0$ , а також, коли  $r = c = 0$ ) і, в зв'язку із цим, в околі навантаженої поверхні виникають великі стискуючі напруження  $\sigma_z$  та  $\sigma_r$ . Разом із тим, у центрі пластини на поверхні, що протилежна до навантаженої, виникають розтягувальні напруження, що мало залежать від розмірів зони та способу навантаження. У літературі, в цьому випадку, користуються зручною напівемпіричною формулою С. Войновського-Крігера [4] для згаданих напружень в ізотропній пластині у вигляді:

$$\sigma_r = \frac{P_0}{4h^2} (1+\nu) (0,485 \ln R/2h + 0,52). \quad (12)$$

Формула (12) отримана із розв'язку осесиметричної задачі для товстої пластини, навантаженої розподіленим навантаженням по зовнішній поверхні, радіусом  $r = c$ , коли впливом

складових нормальних напружень  $\sigma_r$ , із множниками  $c/h$ , на протилежній поверхні можна знехтувати.

Аналогічні формули для напружень  $\sigma_r$  у центрі пластини можна отримати із формул (10), (11), але порахованих не в центрі ізотропної пластини, а в точках на віддалі третини її півтовщини ( $r = h/3$ ) від центра для  $c = 0,1R$ :

$$\text{для } z = h: \quad \sigma_r^+ = \frac{3P_0}{8\pi h^2} \left( (1+\nu) \ln 3R/h + 8,4\nu - 3,4 \right); \quad (13)$$

$$\text{для } z = -h: \quad \sigma_r^- = -\frac{3P_0}{8\pi h^2} \left( (1+\nu) \ln 3R/h + 8,4\nu - 3,4 \right) - \frac{\nu''}{1-\nu} \frac{100P_0}{\pi R^2}. \quad (14)$$

Дані підрахунків за формулами (6)–(14) зведені у табл. 1 – 3.

Таблиця 1

Прогини  $\bar{w} = w \frac{16\pi D}{P_0 R^2}$  серединної поверхні плити

$r/R$	0,1		0,5		0,9		$G/G', \nu''$
	$\epsilon_1$	$\epsilon_{II}$	$\epsilon_1$	$\epsilon_{II}$	$\epsilon_1$	$\epsilon_{II}$	
$\bar{w}$	0,944	0,944	0,403	0,403	0,019	0,019	0; 0
	2,112	2,04	0,755	0,733	0,073	0,069	1; 0,3
	7,375	6,426	2,339	2,054	0,314	0,27	5; 0,3
	13,954	11,909	4,32	3,704	0,615	0,521	10; 0,3

Таблиця 2

Напруження  $\bar{\sigma} = \sigma_r \frac{2\pi h^2}{P_0}$  вздовж радіуса пластини

$h/R = 0.1$											
$r/R$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	$G/G'$
$\bar{\sigma}$	1,495	0,819	0,424	0,143	-0,074	-0,252	-0,402	-0,532	-0,647	-0,75	0
	1,505	0,822	0,425	0,144	-0,074	-0,252	-0,402	-0,532	-0,647	-0,75	1
	0,705	0,622	0,336	0,094	-0,106	-0,274	-0,418	-0,545	-0,657	-0,758	5
	-0,295	0,372	0,225	0,032	-0,146	-0,302	-0,439	-0,56	-0,669	-0,768	10

Таблиця 3

Порівняльна таблиця для напружень у центрі пластини ( $z = h$ ) за наближеними формулами

$$(r = h/3), \quad \bar{\sigma} = \sigma_r \frac{2\pi h^2}{P_0}$$

$\bar{\sigma}$ \diagdown $\frac{R}{h}$	4	5	8	10	15
$\bar{\sigma}_{B.-K.}$	1,748	1,969	2,435	2,656	3,057
$\bar{\sigma}_r$	1,763(0,9%)	1,980(0,6%)	2,439(0,2%)	2,656(0%)	3,051(0,2%)
$\bar{\sigma}_r^{кл.}$	1,673(4,3%)	1,890(4%)	2,349(3,5%)	2,566(3,4%)	2,961(3,1%)

Також побудовані графіки зміни безрозмірних переміщення  $\bar{w} = w \frac{16\pi D}{P_0 R^2}$  (рис. 1), коли

$\varepsilon_1 = 0$  (крива 1),  $\varepsilon_{II} = \frac{2h^2 \tilde{G}}{3(1-\nu)}$  (крива 2),  $\varepsilon_1 = \frac{8\tilde{G} - 3\nu''}{10(1-\nu)} h^2$  (крива 3) для  $\frac{h}{R} = \frac{1}{4}$ , та напруження

$\bar{\sigma} = \sigma_r \frac{2\pi h^2}{P_0}$  вздовж радіуса пластини (рис. 2) для  $G/G' = 0$  (крива 1),  $G/G' = 1$  (крива 2),

$G/G' = 5$  (крива 3),  $G/G' = 10$  (крива 4) у випадку  $\frac{h}{R} = \frac{1}{10}$ .

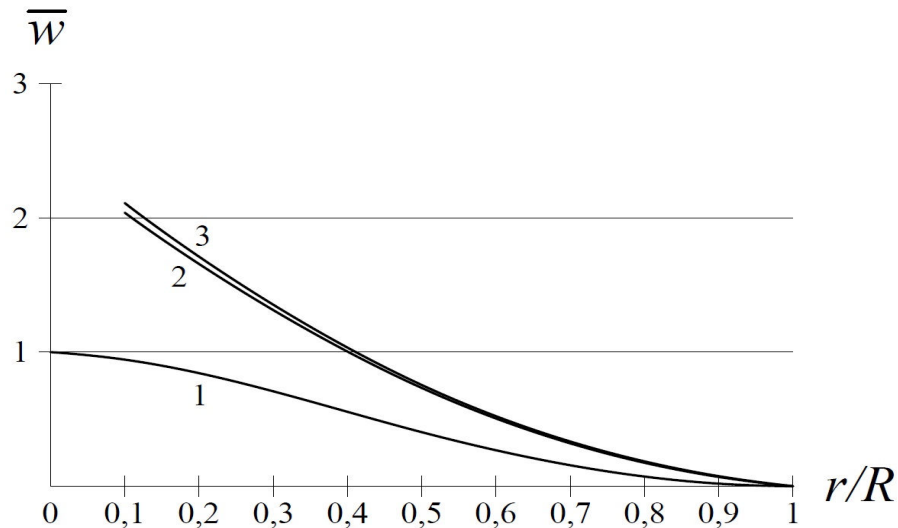


Рис. 1. Графік зміни переміщення вздовж радіуса пластинки

Аналіз числових результатів показує, що при визначенні нормальних переміщень для ізотропної пластини основну добавку (180%) дає врахування деформацій поперечного зсуву. При цьому, результати, знайдені за теорією І.А. Прусова та даною теорією між собою дуже близькі. Ефект поперечного обтиснення в даному випадку є незначним (у межах 5-10%). При визначенні нормальних напружень  $\sigma_r$  вплив поперечного зсуву та обтиснення може бути дуже значним ближче до центру пластини, на поверхні у місцях прикладання зосередженої сили. Але у цьому випадку необхідно користуватися рівняннями і розв'язками теорії пружності.

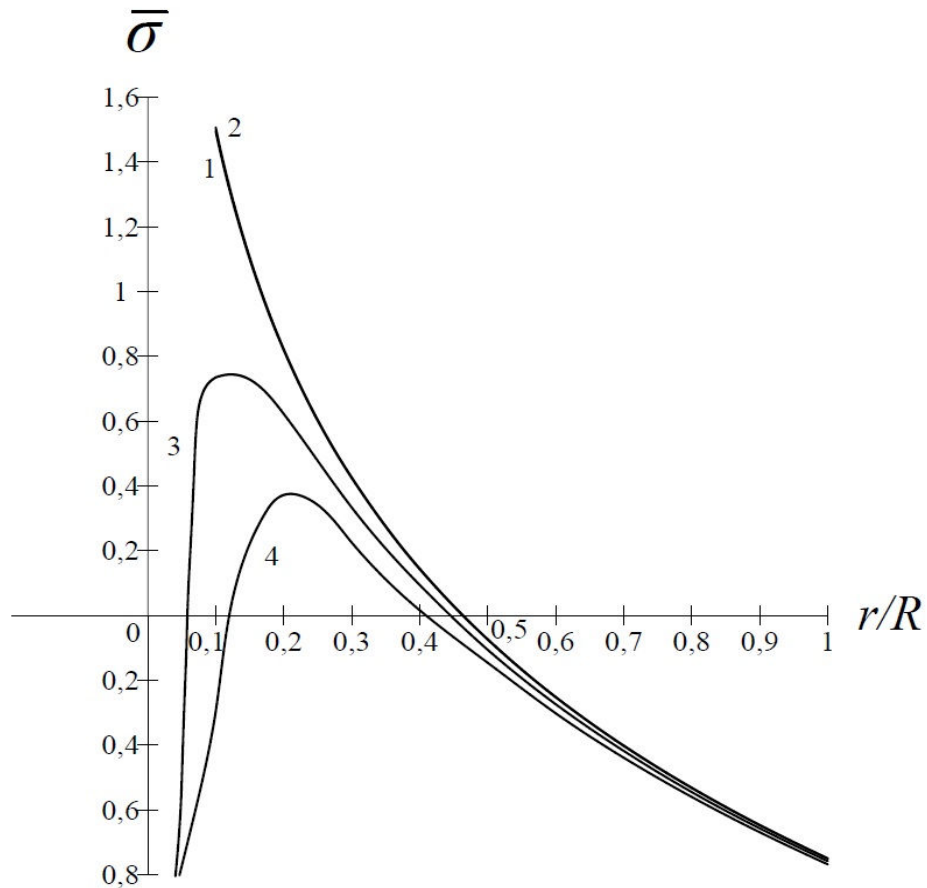


Рис. 2. Графік зміни напруження вздовж радіуса пластинки

Результати, знайдені за теорією І.А. Прусова та класичною теорією між собою будуть співпадати, бо теорія І.А. Прусова не дає уточнень при визначенні напружень  $\sigma_r$ . Значення напружень  $\sigma_r$  на нижній поверхні плити (у її центрі), знайдені за формулою (12) С. Войновського-Крігера та формулою (13), порахованою в точках на віддалі  $r = h/3$  від центра плити між собою дуже мало різняться (табл. 3). Похибка не перевищує 2%.

Висновок.

Розглянуто згин защемленої по контуру круглої пластинки зосередженим навантаженням. З'ясовано, що при визначенні нормальних переміщень для ізотропної пластини основну добавку дає врахування деформацій поперечного зсуву, проте ефект поперечного обтиснення в даному випадку незначний. При визначенні нормальних напружень вплив поперечного зсуву є незначним ближче до центру пластини. При визначенні нормальних напружень і переміщень для трансропної пластини основну добавку (за гладких навантажень) дає врахування деформації поперечного зсуву. Разом з тим, у місцях, де діють зосереджені навантаження, ефект від урахування поперечних нормальних напружень та поперечного обтиснення є переважаючим.

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

2. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов. – Минск: Издательство Белорусского государственного университета, 1975. – 256 с.

3. Швабюк В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально-изотропных плит / В.И. Швабюк // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16. – №9. – С. 71–77.

4. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1966. – 636 с.