

УДК 681.3:519.15

С. В. Гринюк

Луцький національний технічний університет

Дослідження ентропійних характеристик дискретних джерел інформації засобами Mathcad

Гринюк С.В. Дослідження ентропійних характеристик дискретних джерел інформації засобами Mathcad

Анотація. В роботі розглядаються основні ентропійні характеристики дискретних джерел інформації та досліджуються залежності ентропійних характеристик від часу роботи джерела та інформаційного зв'язку між повідомленнями, використовуючи програмне забезпечення Mathcad.

Вступ

Дискретним джерелом, з точки зору теорії інформації, вважають будь-який пристрій U_X , який в кожному одиницю часу вибирає одне з повідомлень, що належать деякому ансамблю X . Як правило, множина X одна для кожного моменту часу, хоча в деяких випадках для кожного моменту часу може бути свій ансамбль. Фізична природа джерела не входить в коло питань теорії інформації. Джерело вважається заданим, якщо для слів будь-якої довжини, локалізованих в будь-якому часовому інтервалі, існує спосіб визначення сімейства $p(x^n)$ розподілу ймовірностей, де $x^n = \{x^{(i+1)}, x^{(i+2)}, \dots, x^{(i+n)}\}$ – слово з n повідомлень, сформоване джерелом з моменту $T = i+1$. Джерело відноситься до класу стаціонарних, якщо розподіл $p(x^n)$ не залежить від i .

Постановка задачі

В основу постановки задачі покладено дослідження характеристик дискретних джерел інформації – залежності ентропійних характеристик від часу роботи джерела та інформаційного зв'язку між повідомленнями, використовуючи програмне забезпечення Mathcad.

Якщо джерело є простим ланцюгом Маркова, то його імовірнісні та інформаційні характеристики повністю визначені двома видами ймовірностей:

1. Абсолютними: $p(x_i^{(m)})$, де $x_i^{(m)}$ – повідомлення, яке джерело вибрало в момент часу m .
2. Умовними (перехідними): $p(x_i^{(m)} / x_j^{(l)})$, де $1 \leq l \leq m$.

Умовна ймовірність $p(x_i^{(m)} / x_j^{(l)})$ визначає ймовірність повідомлення x_i в момент m , якщо в деякий попередній момент l джерело вибрало повідомлення x_j . Зазвичай ці умовні ймовірності називають ймовірностями переходу від повідомлення x_j до повідомлення x_i за $(m - l)$ кроків.

Очевидно, що введені ймовірності є додатними і задовольняють умові нормування:

$$1. \sum_{i=1}^L p(x_i) = 1; \quad 2. \sum_{i=1}^L p(x_i / x_j) = 1, \quad p(x_i / x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, L.$$

На основі теореми повної ймовірності для безумовної ймовірності повідомлення x_i в момент часу m можна записати:

$$p(x_i^{(m)}) = \sum_{j=1}^L p(x_i^{(m)}, x_j^{(l)}) = \sum_{j=1}^L p(x_j^{(l)}) p(x_i^{(m)} / x_j^{(l)}), \quad i = 1, \dots, L.$$

Використовуючи формулу повної ймовірності й визначення ланцюга Маркова можна пересвідчитися, що

$$p(x_k^{(c)} / x_j^{(a)}) = \sum_{i=1}^L p(x_k^{(c)} / x_i^{(b)}) p(x_i^{(b)} / x_j^{(a)}), \quad j, k = 1, \dots, L; \quad 0 \leq a < b < c.$$

В матричному вигляді (для стислості запишемо для ансамблю з двох повідомлень):

$$p(x/x)^2 = \begin{bmatrix} p(x_1^{(k+1)} / x_1^{(k)}) & p(x_2^{(k+1)} / x_1^{(k)}) \\ p(x_1^{(k+1)} / x_2^{(k)}) & p(x_2^{(k+1)} / x_2^{(k)}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p(x_1^{(k+2)} / x_1^{(k+1)}) & p(x_2^{(k+2)} / x_1^{(k+1)}) \\ p(x_1^{(k+2)} / x_2^{(k+1)}) & p(x_2^{(k+2)} / x_2^{(k+1)}) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} p(x_1^{(k+1)} / x_1^{(k)}) & p(x_2^{(k+1)} / x_1^{(k)}) \\ p(x_1^{(k+1)} / x_2^{(k)}) & p(x_2^{(k+1)} / x_2^{(k)}) \end{bmatrix} = p(x_i^{(k+2)} / x_j^{(k)})$$

Якщо матрицю умовних ймовірностей піднести до третього степеня, тобто $p(x_i^{(k+2)} / x_j^{(k)})$ помножити ще раз на $p(x / x)$, то отримаємо перехідні ймовірності повідомлень, що розташовані вже через три кроки одне від одного. Аналогічно можна отримати перехідні ймовірності для повідомлень на будь-якій відстані.

При обмеженій довжині слова середня кількість інформації, що приходить на одне повідомлення джерела (ентропія на повідомлення), визначається таким чином:

$$H(X / X^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(X^n)}{n}.$$

Оскільки $H(X^n) = H(X^{n-1}X) = H(X^{n-1}) + H(X / X^{n-1})$, то приріст інформації за одну одиницю часу складе $\Delta H_n = H(X / X^{n-1})$. Для марковського ланцюга першого порядку умовна ентропія залежить лише від останнього моменту часу: $\Delta H_n = H(X / X)$. Таким чином, ентропію на повідомлення можна розрахувати безпосередньо за формулою (3.1), попередньо визначивши ймовірності всіх послідовностей ансамблю X^n , або скориставшись властивістю адитивності ентропії:

$$H(X^n) = H(X_1) + H(X_2 / X_1) + \dots + H(X_n / X_{n-1}).$$

Інформаційний зв'язок між першим $x^{(1)}$ і останнім $x^{(n)}$ повідомленнями визначається взаємною інформацією:

$$I(X_1; X_n) = H(X_n) - H(X_n / X_1).$$

Дослідження ентропійних характеристик дискретних джерел інформації.

Розглянемо дискретне джерело повідомлень, що в кожний момент часу випадково вибирає один елемент ансамблю $X = \{x_1, \dots, x_5\}$ згідно з розподілом ймовірностей. В початковий момент часу ($k = 1$) ймовірності дорівнюють

$$p = [p(x_1^{(1)}) \quad p(x_2^{(1)}) \quad p(x_3^{(1)}) \quad p(x_4^{(1)}) \quad p(x_5^{(1)})] = [1 - 0,01N \quad 0,01N \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

N – константа.

Умовні перехідні ймовірності:

$$p(x_i^{(k+1)} / x_j^{(k)}) = \begin{bmatrix} p(x_1^{(k+1)} / x_1^{(k)}) & \dots & p(x_5^{(k+1)} / x_1^{(k)}) \\ p(x_1^{(k+1)} / x_2^{(k)}) & \dots & \dots \\ p(x_1^{(k+1)} / x_3^{(k)}) & \dots & \dots \\ p(x_1^{(k+1)} / x_4^{(k)}) & \dots & \dots \\ p(x_1^{(k+1)} / x_5^{(k)}) & \dots & p(x_5^{(k+1)} / x_5^{(k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}.$$

Використавши засоби Mathcad, визначимо тривалість роботи джерела і по графіку візуально можна оцінити час переходу до стаціонарного режиму, середню кількість інформації на повідомлення та її залежність від часу.

ORIGIN:= 1

$$\log_2(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

$$s(p) := \text{if}(p = 0, 0, -p \cdot \log_2(p))$$

$$M(u) := \sum_{i=1}^{\text{length}(u)} s(u_i) \quad p := \begin{pmatrix} 1 - 0,01 \cdot N \\ 0,01 \cdot N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_u := \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$N := 9$

$$T := 50 \quad k := 1..T \quad p^{(k+1)} := p_u^T \cdot p^{(k)}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.91	0	$2.7 \cdot 10^{-3}$	0.015	0.048	0.058	0.062	0.065	0.067
2	0.09	0.409	0.205	0.385	0.239	0.16	0.146	0.136	0.128
3	0	0.564	0.082	0.043	0.086	0.076	0.067	0.066	0.066
4	0	0	0.564	0.082	0.043	0.086	0.076	0.067	0.066
5	0	0.027	0.147	0.476	0.585	0.619	0.648	0.666	0.673

$$HX_k := M(p^{(k)})$$

$$HX^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.436	1.134	1.659	1.619	1.653	1.678	1.605	1.56	1.542

$$i := 1..rows(p_u)$$

$$HX_{x_i} := M\left[\left(p_u^T\right)^{(i)}\right]$$

$$HX_x = \begin{pmatrix} 0.971 \\ 1.485 \\ 0 \\ 1 \\ 0.469 \end{pmatrix}$$

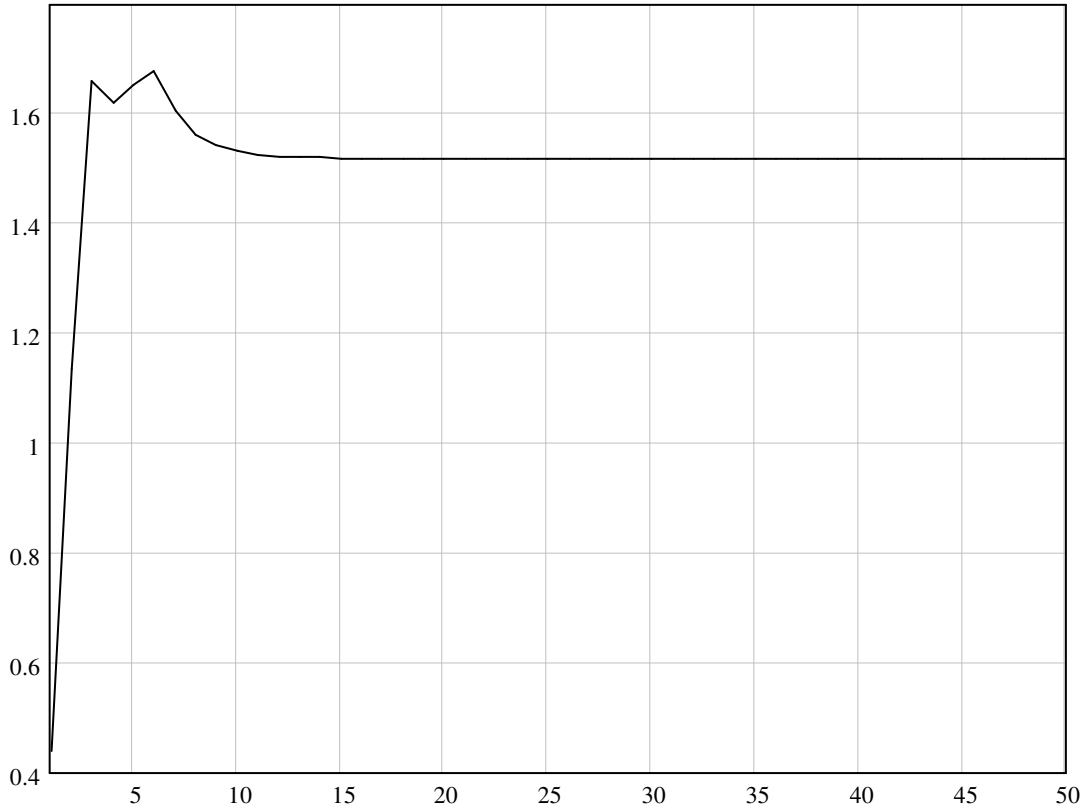


Рис. 1 Залежність ентропії ансамблю від моменту часу

$$HX_X := HX_x^T \cdot p$$

$$HX_X =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.017	0.62	0.939	0.892	0.719	0.671	0.658	0.644	0.636

$$P_{x..x}(p) := \begin{cases} \text{for } i \in 1.. \text{length}(p) \\ \text{for } j \in 1.. 5 \\ x_{(i-1) \cdot 5 + j} \leftarrow P_i \cdot P_{u_{\text{mod}(i-1, 5) + 1, j}} \end{cases}$$

$$k1 := 2.. 5$$

$$P_{x..x_1} := p^{(1)}$$

$$P_{x..x_{k1}} := P_{x..x} \left(P_{x..x_{k1-1}} \right)$$

Розрахунки середньої кількості інформації на повідомлення:

I спосіб:

$$k1 := 1.. 5$$

$$HX_{X..X_{k1}} := \frac{M(P_{x..x_{k1}})}{k1}$$

$$HX_{X..X}^T = (0.436 \ 0.727 \ 0.691 \ 0.753 \ 0.781)$$

II спосіб:

$$HX_{X..X_1} := HX_1$$

$$HX_{X..X_{k+1}} := \frac{1}{k+1} \cdot (HX_{X..X_k} \cdot k + HX_{X_1, k})$$

$$HX_{X..X}^T = \begin{array}{c|ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 0.436 & 0.727 & 0.691 & 0.753 & 0.781 & 0.771 & 0.756 & 0.744 & 0.733 \end{array}$$

$$j := 1.. 50$$

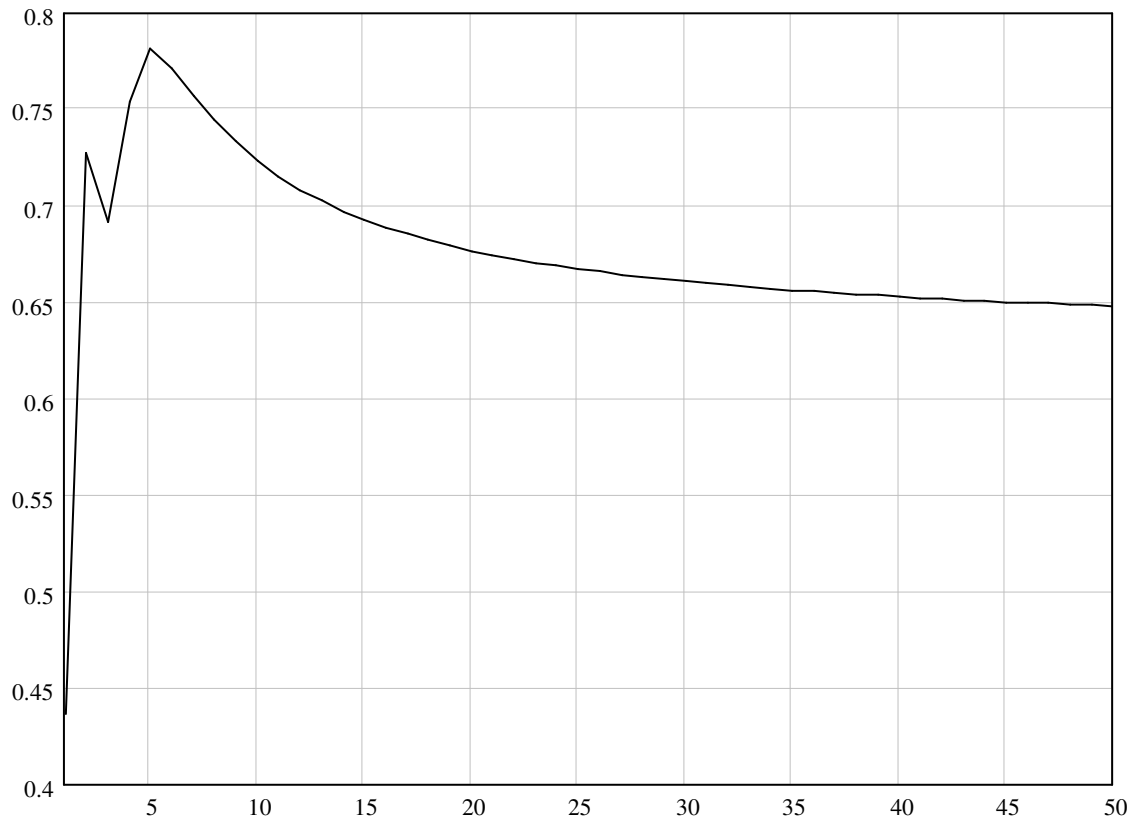


Рис. 2 Графік залежності середньої кількості інформації на повідомлення від часу

Висновки

В ході роботи досліджено основні ентропійні характеристики дискретного джерела інформації та зроблено розрахунок ймовірносних та інформаційних характеристик дискретного джерела, що є простим ланцюгом Маркова, за умови заданих абсолютних ймовірностей в початковий момент часу та перехідних ймовірностей. Отримані результати свідчать, що для джерела Маркова настає момент часу, після якого ймовірності появи повідомлень в кожен момент часу стають сталими величинами

1. Жураковський Ю.П., Полторак В.П. Теорія інформації та кодування: Підручник. – К.: Вища школа, 2001. – 255 с.
2. Кузьмін І. В. Основи теорії інформації і кодирования. – Минск: Вышэйшая школа, 1986.
3. Лидовский В.В. Теория информации: Уч. пособие. - М.: Компания Спутник+, 2004. - 111 с.
4. Стратонович Р.Л. Теория информации. – М: Изд-во "Сов. Радио", 1975.
5. Хемминг Р.В. Теория информации и теория кодирования. – М. Радио и связь, 1983.
6. Цымбал В.П. Теория информации и кодирование. – К. Вища школа, 1992. – 263 с.
7. Чисар И., Кернер Я. Теория информации. – М.: Мир, 1985.