УДК 681.3:519.15
С. В. Гринюк
Луцький національний технічний університет

Дослідження ентропійних характеристик дискретних джерел інформації засобами Mathcad

Гринюк С.В. Дослідження ентропійних характеристик дискретних джерел інформації засобами Mathcad
Анотація. В роботі розглядаються основні ентропійні характеристики дискретних джерел інформації та досліджуються залежності ентропійних характеристик від часу роботи джерела та інформаційного зв'язку між повідомленнями, використовуючи програмне забезпечення Mathcad.

Вступ

Дискретним джерелом, з точки зору теорії інформації, вважають будь-який пристрій U_X, який в кожну одиницю часу вибирає одне з повідомлень, що належать деякому ансамблю X. Як правило, множина X одна для кожного моменту часу, хоча в деяких випадках для кожного моменту часу може бути свій ансамбль. Фізична природа джерела не входить в коло питань теорії інформації. Джерело вважається заданим, якщо для слів будь-якої довжини, локалізованих в будь-якому часовому інтервалі, існує спосіб визначення сімейства $p(x^n)$ розподілу ймовірностей, де $x^n = \{x^{(i+1)}, x^{(i+2)}, \ldots, x^{(i+n)}\}$ – слово з n повідомлень, сформоване джерелом з моменту $T = i+1$. Джерело відноситься до класу стаціонарних, якщо розподіл $p(x^n)$ не залежить від i.

Постановка задачі

В основу постановки задачі покладено дослідження характеристик дискретних джерел інформації – залежності ентропійних характеристик від часу роботи джерела та інформаційного зв'язку між повідомленнями, використовуючи програмне забезпечення Mathcad.

Якщо джерело є простим ланцюгом Маркова, то його імовірнісні та інформаційні характеристики повністю визначені двома видами ймовірностей:

1. Абсолютними: $p(x_i^{(m)})$, де $x_i^{(m)}$ – повідомлення, яке джерело вибрало в момент часу m.

2. Умовними (перехідними): $p(x_i^{(m)} / x_j^{(l)})$, де $1 \le l \le m$.

Умовна імовірність $p(x_i^{(m)} / x_j^{(l)})$ визначає імовірність повідомлення x_i в момент m, якщо в деякий попередній момент l джерело вибрало повідомлення x_j. Зазвичай ці умовні ймовірності називають ймовірностями переходу від повідомлення x_j до повідомлення x_i за ($m – l$□ кроків.

Очевидно, що введені ймовірності є додатними і задовольняють умові нормування:

$$1. \sum_{i=1}^{L} p(x_i) = 1; \qquad 2. \sum_{i=1}^{L} p(x_i / x_j) = 1, \;\; p(x_i / x_j) \ge 0, \quad i = 1,..., L.$$

На основі теореми повної імовірності для безумовної імовірності повідомлення x_i в момент часу m можна записати:

$$p(x_i^{(m)}) = \sum_{j=1}^{L} p(x_i^{(m)}, x_j^{(l)}) = \sum_{j=1}^{L} p(x_j^{(l)}) p(x_i^{(m)} / x_j^{(l)}), \qquad i = 1,..., L..$$

Використовуючи формулу повної імовірності й визначення ланцюга Маркова можна пересвідчитися, що

$$p(x_k^{(c)} / x_j^{(a)}) = \sum_{i=1}^{L} p(x_k^{(c)} / x_i^{(b)}) p(x_i^{(b)} / x_j^{(a)}), \quad j,k = 1,..., L; \; 0 \le a < b < c.$$

В матричному вигляді (для стислості запишемо для ансамблю з двох повідомлень):

$$p(x/x)^2 = \begin{bmatrix} p(x_1^{(k+1)} / x_1^{(k)}) & p(x_2^{(k+1)} / x_1^{(k)}) \\ p(x_1^{(k+1)} / x_2^{(k)}) & p(x_2^{(k+1)} / x_2^{(k)}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p(x_1^{(k+2)} / x_1^{(k+1)}) & p(x_2^{(k+2)} / x_1^{(k+1)}) \\ p(x_1^{(k+2)} / x_2^{(k+1)}) & p(x_2^{(k+2)} / x_2^{(k+1)}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p(x_1^{(k+1)} / x_1^{(k)}) & p(x_2^{(k+1)} / x_1^{(k)}) \\ p(x_1^{(k+1)} / x_2^{(k)}) & p(x_2^{(k+1)} / x_2^{(k)}) \end{bmatrix} = p(x_i^{(k+2)} / x_j^{(k)})$$

Якщо матрицю умовних ймовірностей піднести до третього степеня, тобто $p(x_i^{(k+2)}/x_j^{(k)})$ помножити ще раз на $p(x/x)$, то отримаємо перехідні ймовірності повідомлень, що розташовані вже через три кроки одне від одного. Аналогічно можна отримати перехідні ймовірності для повідомлень на будь-якій відстані.

При обмеженій довжині слова середня кількість інформації, що приходиться на одне повідомлення джерела (ентропія на повідомлення), визначається таким чином:

$$H(X/X^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} H_n(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(X^n)}{n}.$$

Оскільки $H(X^n) = H(X^{n-1}X) = H(X^{n-1}) + H(X/X^{n-1})$, то приріст інформації за одну одиницю часу складе $\Delta H_n = H(X/X^{n-1})$. Для марковського ланцюга першого порядку умовна ентропія залежить лише від останнього моменту часу: $\Delta H_n = H(X/X)$. Таким чином, ентропію на повідомлення можна розрахувати безпосередньо за формулою (3.1), попередньо визначивши ймовірності всіх послідовностей ансамблю X^n, або скориставшись властивістю адитивності ентропії:

$$H(X^n) = H(X_1) + H(X_2/X_1) + ... + H(X_n/X_{n-1}).$$

Інформаційний зв'язок між першим $x^{(1)}$ і останнім $x^{(n)}$ повідомленнями визначається взаємною інформацією:

$$I(X_1; X_n) = H(X_n) - H(X_n/X_1).$$

Дослідження ентропійних характеристик дискретних джерел інформації.

Розглянемо дискретне джерело повідомлень, що в кожний момент часу випадково вибирає один елемент ансамблю $X = \{x_1, ..., x_5\}$ згідно з розподілом ймовірностей. В початковий момент часу ($k = 1$) ймовірності дорівнюють

$$p = [\,p(x_1^{(1)}) \quad p(x_2^{(1)}) \quad p(x_3^{(1)}) \quad p(x_4^{(1)}) \quad p(x_5^{(1)})] = [1-0{,}01N \quad 0{,}01N \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

N – констатнта.

Умовні перехідні ймовірності:

$$p(x_i^{(k+1)}/x_j^{(k)}) = \begin{bmatrix} p(x_1^{(k+1)}/x_1^{(k)}) & ... & p(x_5^{(k+1)}/x_1^{(k)}) \\ p(x_1^{(k+1)}/x_2^{(k)}) & ... & ... \\ p(x_1^{(k+1)}/x_3^{(k)}) & ... & ... \\ p(x_1^{(k+1)}/x_4^{(k)}) & ... & ... \\ p(x_1^{(k+1)}/x_5^{(k)}) & ... & p(x_5^{(k+1)}/x_5^{(k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}.$$

Використавши засоби Mathcad, визначимо тривалість роботи джерела і по графіку візуально можна оцінити час переходу до стаціонарного режиму, середню кількість інформації на повідомлення та її залежність від часу.

ORIGIN:= 1

$$\text{log\_2}(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

$$s(p) := \text{if}(p = 0, 0, -p\cdot \text{log\_2}(p))$$

$$M(u) := \sum_{i=1}^{\text{length}(u)} s(u_i) \qquad p := \begin{pmatrix} 1-0.01\cdot N \\ 0.01\cdot N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_u := \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$N := 9$

$T := 50 \qquad k := 1..T \qquad p^{\langle k+1\rangle} := {p_u}^T\cdot p^{\langle k\rangle}$

p =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.91	0	$2.7\cdot10^{-3}$	0.015	0.048	0.058	0.062	0.065	0.067
2	0.09	0.409	0.205	0.385	0.239	0.16	0.146	0.136	0.128
3	0	0.564	0.082	0.043	0.086	0.076	0.067	0.066	0.066
4	0	0	0.564	0.082	0.043	0.086	0.076	0.067	0.066
5	0	0.027	0.147	0.476	0.585	0.619	0.648	0.666	0.673

$HX_k := M\left(p^{\langle k\rangle}\right)$

$HX^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.436	1.134	1.659	1.619	1.653	1.678	1.605	1.56	1.542

$i := 1 .. \text{rows}\left(p_u\right)$

$HX_{x_i} := M\left[\left(p_u{}^T\right)^{\langle i\rangle}\right]$

$$HX_x = \begin{pmatrix} 0.971 \\ 1.485 \\ 0 \\ 1 \\ 0.469 \end{pmatrix}$$

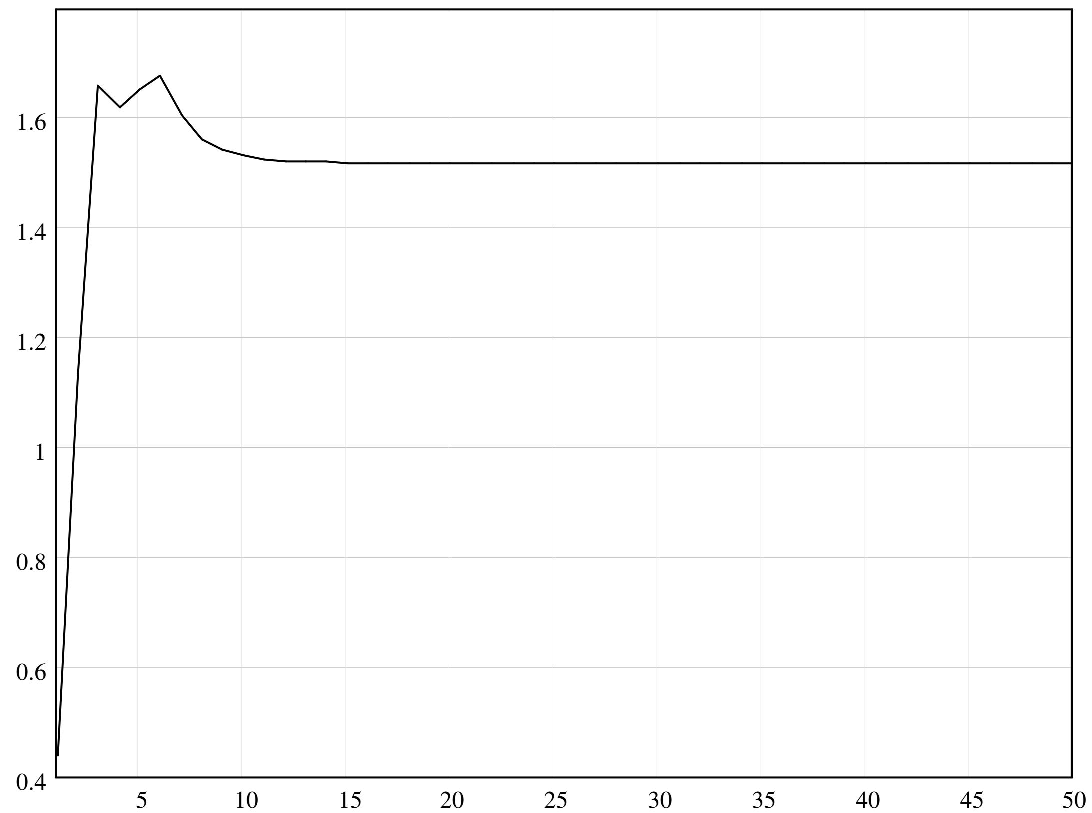

Рис. 1 Залежність ентропії ансамблю від моменту часу

$HX_X := HX_x{}^T \cdot p$

$HX_X =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.017	0.62	0.939	0.892	0.719	0.671	0.658	0.644	0.636

$$p_{x..x}(p) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{length}(p) \\ \quad \text{for } j \in 1..5 \\ \quad\quad x_{(i-1)\cdot 5+j} \leftarrow p_i \cdot pu_{\text{mod}(i-1,5)+1,\,j} \\ x \end{array} \right.$$

$k1 := 2..5$

$P_{x..x_1} := p^{\langle 1 \rangle}$

$P_{x..x_{k1}} := p_{x..x}\left(P_{x..x_{k1-1}}\right)$

Розрахунки середньої кількості інформації на повідомлення:

I спосіб:

$k1 := 1..5$

$$HX_{X..X_{k1}} := \frac{M\left(P_{x..x_{k1}}\right)}{k1}$$

$HX_{X..X}^{T} = (0.436 \;\; 0.727 \;\; 0.691 \;\; 0.753 \;\; 0.781)$

II спосіб:

$HX_{X..X_1} := HX_1$

$$HX_{X..X_{k+1}} := \frac{1}{k+1}\cdot\left(HX_{X..X_k}\cdot k + HX_{X_{1,k}}\right)$$

$HX_{X..X}^{T} =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.436	0.727	0.691	0.753	0.781	0.771	0.756	0.744	0.733

$j := 1..50$

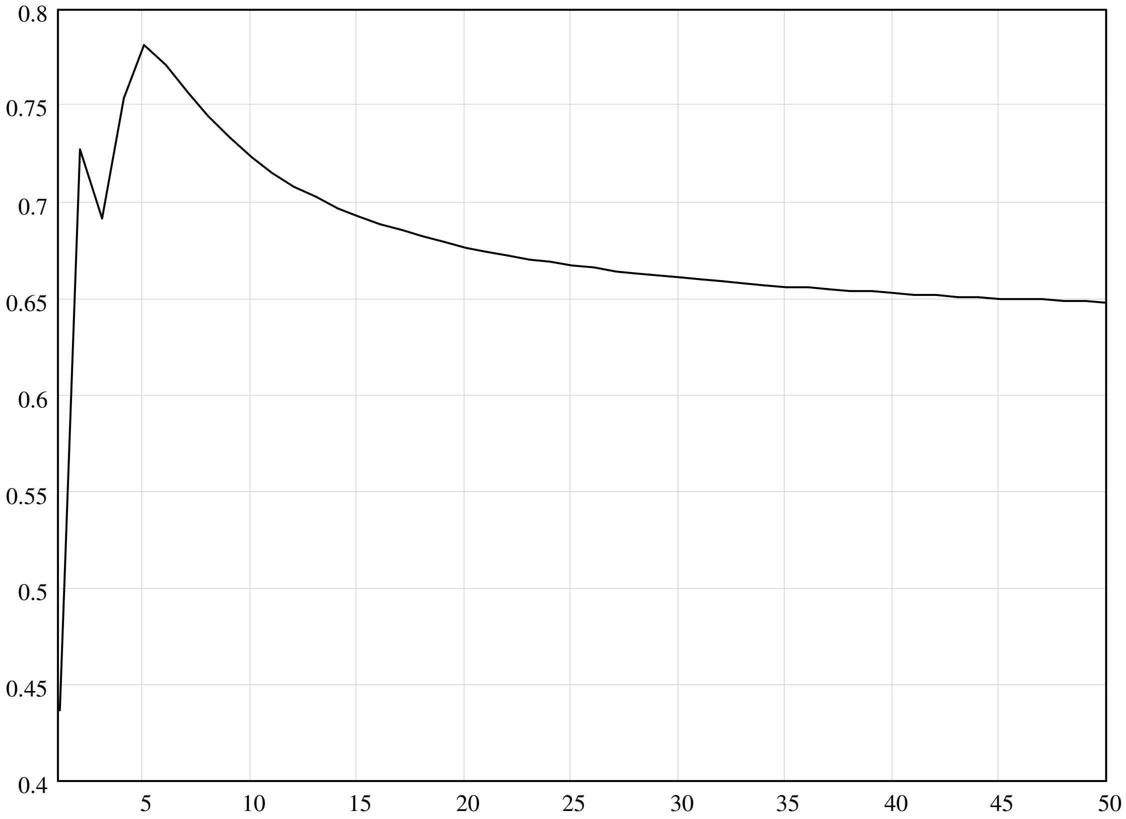

Рис. 2 Графік залежності середньої кількості інформації на повідомлення від часу

Висновки

В ході роботи досліджено основні ентропійні характеристики дискретного джерела інформації та зроблено розрахунок ймовірносних та інформаційних характеристик дискретного джерела, що є простим ланцюгом Маркова, за умови заданних абсолютних імовірностей в початковий момент часу та перехідних ймовірностей. Отримані результати свідчать, що для джерела Маркова наступає момент часу, після якого ймовірності появи повідомлень в кожен момент часу стають сталими величинами

1. Жураковський Ю.П., Полторак В.П. Теорія інформації та кодування: Підручник. – К.: Вища школа, 2001. – 255 с.
2. Кузьмин И. В. Основы теории информации и кодирования. – Минск: Вышэйшая школа,1986.
3. Лидовский В.В. Теория информации: Уч. пособие. - М.: Компания Спутник+, 2004. - 111 с.
4. Стратонович Р.Л. Теория информации. – М: Изд-во "Сов. Радио", 1975.
5. Хемминг Р.В. Теория информации и теория кодирования. – М. Радио и связь, 1983.
6. Цымбал В.П. Теория информации и кодирование. – К. Вища школа, 1992. – 263 с.
7. Чисар И., Кернер Я. Теория информации. – М.: Мир, 1985.