УДК 534.1
Тимощук В.М.
Луцький національний технічний університет

ПРО ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРІЮ СТІЙКОСТІ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СИНХРОНІЗАЦІЇ k ОДНАКОВИХ МЕХАНІЧНИХ ВІБРОЗБУДЖУВАЧІВ

Розглядається питання про самосинхронізацію k механічних віброзбуджувачів з майже однаковими парціальними швидкостями, розміщеними на тримкому тілі з одним степенем вільності. Дослідження проведено методом прямого розділення швидкостей.

Ключові слова: віброзбуджувач, кратна самосинхронізація, плоскі коливання, лінійна коливальна система.

Явище динамічної синхронізації механічних віброзбуджувачів використовується для створення багатьох вібраційних пристроїв. В наш час теорія синхронізації розроблена досить повно [1, 2]. Проте існує багато задач (названих “непростими”, особливими) розв’язування яких вимагає додаткових досліджень у порівнянні з існуючими методиками. Це стосується, зокрема, випадків синхронізації декількох (трьох і більше) однакових віброзбуджувачів та задач про кратну синхронізацію віброзбуджувачів.

У праці [3] для розв’язування задач двократної синхронізації віброзбуджувачів використовуються гармонічні коефіцієнти впливу. У [4] наводиться теоретичне обґрунтування можливості застосування інтеґрального критерію стійкості для дослідження “непростих” задач теорії самосинхронізації, при цьому наведені приклади також стосуються лише кратної самосинхронізації віброзбуджувачів. У [5] викладена методика розв’язування “непростих” задач у випадку коливної системи з чотирма однаковими віброзбуджувачами встановленими на тримкому тілі з одним ступенем вільності методом малого параметра.

В даній статті за допомогою інтеґрального критерію стійкості розглядається випадок самосинхронізації довільної кількості однакових дебалансних віброзбуджувачів, що розміщені на тримкому тілі з одним “поступальним” ступенем вільності.

Нехай на тримкому твердому тілі встановлено k дебалансних віброзбуджувачів з майже однаковими парціальними швидкостями обертання, що приводяться в рух електродвигунами асинхронного типу (рисунок). Тримке тіло зв’язане з нерухомою основою за допомогою лінійних пружних елементів і може зміщуватися відносно нерухомої основи вздовж деякого фіксованого напрямку Ox. Система характеризується k узагальненими обертальними координатами – кутами повороту віброзбуджувачів φ_s, що відлічуються від напрямку Ox за стрілкою годинника, та однією узагальненою коливною координатою – переміщенням тримкого тіла x від статичного положення.

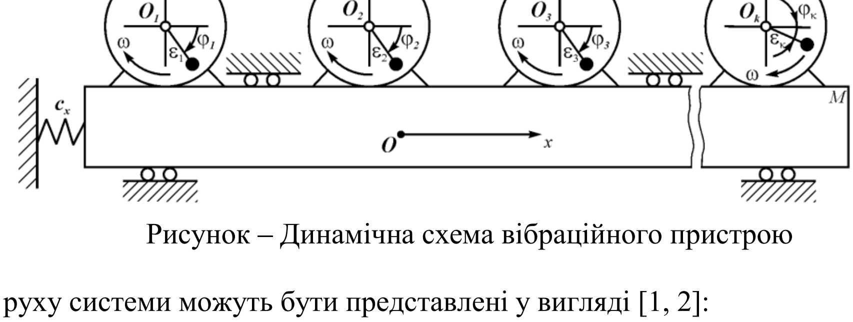

Рисунок – Динамічна схема вібраційного пристрою

Рівняння руху системи можуть бути представлені у вигляді [1, 2]:

$$I_s\ddot{\varphi}_s = L_s\left(\dot{\varphi}_s\right) - R_s\left(\dot{\varphi}_s\right) + m_s\varepsilon_s\left(\ddot{x}\sin\varphi_s + g\cos\varphi_s\right) \quad \left(s = 1,...,k\right), \tag{1}$$

$$M\ddot{x} + c_x x = \sum_{j=1}^{k} m_j\varepsilon_j\left(\ddot{\varphi}_j\sin\varphi_j + \dot{\varphi}_j^2\cos\varphi_j\right), \tag{2}$$

де m_s, ε_s, I_s – відповідно маса s – го віброзбуджувача, його ексцентриситет і момент інерції відносно осі обертання; $L_s(\dot{\varphi})$, $R_s(\dot{\varphi})$ – обертальний момент на валу асинхронного двигуна та момент сил опору обертанню; M – маса тримкого тіла; c_x – жорсткість пружних елементів; g – пришвидшення вільного падіння.

Розглянемо умови існування та стійкості розв'язків системи (1), (2) виду

$$\varphi_s = n_s \omega t + \alpha_s + \psi_s(\omega t), \qquad x = x(\omega t), \tag{3}$$

де n_s – цілі додатні числа; $\omega > 0$ – частота синхронного обертання віброзбуджувачів; α_s – сталі (початкові фази обертання); ψ_s і x – періодичні функції часу t з періодом $T = 2\pi/\omega$.

Згідно з інтеґральним критерієм, стійкі синхронні рухи відповідають точкам строгого мінімуму потенціальної функції D різниці фаз $\alpha_s - \alpha_i$. У розглядуваному випадку функція D являє собою середнє за період обертання функції Лагранжа твердого тіла [1, 2]

$$D = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} L d\tau = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(M\dot{x}^2 - c_x x^2 \right) d\tau. \tag{4}$$

Згідно з існуючою методикою розв'язання задач за допомогою інтеґрального критерію стійкості рівняння (2) досить розв'язати з припущенням, що віброзбуджувачі обертаються рівномірно за законом

$$\varphi_s = n_s \omega t + \alpha_s .$$

Підставивши у вираз (4) розв'язок рівняння (2) у вигляді

$$x = -\frac{\omega^2}{\omega^2 - p_x^2} \frac{m\varepsilon}{M} \sum_{i=1}^{k} \cos(\omega t + \alpha_j)$$

і виконавши усереднення за період $\tau = \omega t$, знайдемо потенціальну функцію

$$\begin{aligned} D &= \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(M(\dot{x}^0)^2 - c_x (x^0)^2 \right) d\tau = \\ &= \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \frac{m^2 \varepsilon^2}{4M} \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \cos\left(\alpha_s - \alpha_j\right) + C, \end{aligned} \tag{5}$$

де C – величина, що не залежить від фаз α_s.

Значення фаз $\alpha_1, ..., \alpha_s$ обертання віброзбуджувачів у можливих синхронних рухів визначаються з рівнянь $\partial D / \partial \alpha_s = 0$:

$$\sum_{j=1}^{k} \sin\left(\alpha_s - \alpha_j\right) = 0 \quad (s = 1, ..., k).$$

Ці рівняння допускають групу розв'язків

$$\alpha_s = q_s^* \pi + \alpha_o , \tag{6}$$

де q_s^* – числа, кожне з яких може дорівнювати нулю або одиниці, α_0 – довільна стала.

При застосуванні інтеґрального критерію дослідження стійкості спрощується, оскільки умови стійкості можуть бути виписані в явній формі. За відомою теоремою Сільвестра для того, щоб функція D мала мінімум у точках (6), необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні нерівності:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_1^2} \right|_{\alpha_1 = \alpha_1^*} > 0, \quad \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha_s = \alpha_s^*} > 0, \quad \dots (i, j = 1, 2); \\ &...., \quad \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha_s = \alpha_s^*} > 0 \qquad (i, j = 1, ..., k-1). \end{aligned} \tag{7}$$

Двічі про диференціювавши потенціальну функцію (5), одержимо останню умову (7)

$$\frac{1}{\left(\omega^2-p_x^2\right)^{k-1}}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1(k-1)} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2(k-1)} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & \dots & c_{3(k-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1(k-1)} & c_{2(k-1)} & c_{3(k-1)} & \dots & c_{(k-1)(k-1)} \end{vmatrix} > 0,$$

де $c_{ij}=-\cos\alpha_i-\sum_{s=1}^{k-1}\cos\left(\alpha_s-\alpha_i\right)$, $i=j,\ s\neq j;\ c_{ij}=\cos\left(\alpha_i-\alpha_j\right),\ i\neq j$,

або, враховуючи (6),

$$\frac{1}{\left(\omega^2-p_x^2\right)^{k-1}}\begin{vmatrix} \overbrace{a & 1 & \dots & 1}^{m} & \dots & \overbrace{-1 & \dots & -1 & -1}^{k-m-1} \\ 1 & a & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a & \dots & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & b & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & 1 & \dots & b & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & 1 & \dots & 1 & b \end{vmatrix} > 0 \qquad (8)$$

де $a=k-2m+1;\ b=-k+2m+1.$

Відмітимо, що при складанні детермінанта (8) фази вибрані таким чином, що m перших $\alpha_1^*,...,\alpha_m^*$ містять числа $q_s^*=1$.

Дослідимо стійкість можливих синхронних рухів віброзбуджувачів.

У випадку синфазного руху всіх віброзбуджувачів $\alpha_1^*=,...,=\alpha_k^*=0\ \ (m=0)$ діагональні члени (8) набувають значень $a=0,\ b=-k+1$. Тоді неважко показати, що у дорезонансній області стійким є синфазний рух усіх віброзбуджувачів, оскільки всі головні діагональні мінори детермінанта (8) при $\omega<p_x$ додатні.

В загальному випадку перша умова (7) для детермінанта (8) має вигляд $\dfrac{k-2m+1}{\omega^2-p_x^2}>0$. У той же час, якщо при складанні детермінанта (8) фази вибрати так, що m перших $\alpha_1,...,\alpha_m$ містять числа $q_s^*=0$, то дана умова набуває вигляду $\dfrac{-k+2m+1}{\omega^2-p_x^2}>0$. Ці дві нерівності одночасно можуть виконуватися лише за умови $k=2m$. Тому всі можливі синхронні рухи, крім розглянутого вище та можливого випадку при $m=k/2$ та $\omega>p_x$, є нестійкими.

Таким чином, у зарезонансній області стійкий рух можливий лише у випадку парної кількості віброзбуджувачів $k=2l$: для режиму $\alpha_1^*=,...,=\alpha_l^*=\pi,\ \ \alpha_{l+1}^*=,...,=\alpha_k^*=0,\ (m=l)$. У цьому випадку (8) набуває вигляду

$$\frac{1}{\left(\omega^2-p_x^2\right)^{k-1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad (9)$$

Зважаючи на рівність нулю всіх, крім першого, головних діагональних мінорів детермінанта (9) (невизначений випадок), для вирішення питання про стійкість необхідне додаткове дослідження.

Обчислимо потенціальну функцію $D = D^{(1)}$ з більшою точністю.

Скористаємося методом прямого розділення рухів [1, 2]. У цьому випадку розв'язки рівнянь (1) шукаються у вигляді

$$\varphi_s = n_s\sigma_s[\omega t + \alpha_s(t) + \psi_s(t, \omega t, \mu)],\ x = x\left(\omega t\right),$$

де $\alpha_s\left(t\right)$ - повільні, а ψ_s і x – швидкі 2π - періодичні по ωt складові; $\mu > 0$ – малий параметр.

Розв'язок рівняння, що описує коливання тримкого тіла, матиме вигляд

$$\begin{aligned} x^{(1)} = &-\frac{m\varepsilon\omega^2}{M\left(\omega^2-p_x^2\right)}\left[\frac{km^2\varepsilon^2\omega^2}{16MI\left(\omega^2-p_x^2\right)}+1\right]\sum_{j=1}^{k}\cos\left(\omega t+\alpha_j\right)- \\ &-\frac{2m^2\varepsilon^2 g}{MI\left(4\omega^2-p_x^2\right)}\sum_{j=1}^{k}\sin 2\left(\omega t+\alpha_j\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Тоді, враховуючи (10), одержуємо

$$\begin{aligned} D = D^{(1)} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\omega}\left(M\left(\dot{x}^{(1)}\right)^2 - c_x\left(x^{(1)}\right)^2\right)d\tau = \\ &= \frac{m^2\varepsilon^2\omega^4A^2}{4M\left(\omega^2-p_x^2\right)}\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\cos\left(\alpha_s-\alpha_j\right)+ \\ &+\frac{2m^4\varepsilon^4g^2}{MI^2\left(4\omega^2-p_x^2\right)}\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\cos 2\left(\alpha_s-\alpha_j\right)+C_1, \end{aligned}$$

де $A = 1+\dfrac{km^2\varepsilon^2\omega^2}{16MI\left(\omega^2-p_x^2\right)}$.

Детермінант (8) для невизначеного випадку ($m = l$) має вигляд

$$\begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{m} \quad \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k-m-1} \\ \begin{vmatrix} 1-B_1 & 1+B_2 & ... & 1+B & ... & -1+B_2 & ... & -1+B_2 & -1+B_2 \\ 1+B_2 & 1-B_1 & ... & 1+B & ... & -1+B_2 & ... & -1+B_2 & -1+B_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1+B_2 & 1+B_2 & ... & 1-B_1 & ... & -1+B_2 & ... & -1+B_2 & -1+B_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -1+B_2 & -1+B_2 & ... & -1+B_2 & ... & 1-B_1 & ... & 1+B_2 & 1+B_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -1+B_2 & -1+B_2 & ... & -1+B_2 & ... & 1+B_2 & ... & 1-B_1 & 1+B_2 \\ -1+B_2 & -1+B_2 & ... & -1+B_2 & ... & 1+B_2 & ... & 1+B_2 & 1-B_1 \end{vmatrix} > 0, \end{array}$$

де $B_1 = (k-1)B_2,\ B_2 = \mu \dfrac{4m^2\varepsilon^2 g^2}{I^2 A^2 \omega^4} \dfrac{\omega^2 - p_x^2}{4\omega^2 - p_x^2}.$

Головні діагональні мінори даного детермінанта відмінні від нуля, що дозволяє зробити висновок щодо стійкості руху. Для цього достатньо проаналізувати лише перші дві умови:

$$1-(k-1)B_2 > 0,$$

$$\left[1-(k-1)B_2\right]^2 - (1+B_2)^2 > 0.$$

Оскільки $\omega > p_x$, друга нерівність не виконується і рух буде нестійким.

Таким чином, для даної коливної системи у випадку більше трьох віброзбуджувачів з однаковими парціальними кутовими швидкостями при дослідженні стійкості необхідно враховувати вищі, ніж у існуючих методиках, наближення; при цьому, що важливо, достатньо розглянути лише перше наближення.

Отже, дана коливна система з одним поступальним ступенем вільності у випадку k віброзбуджувачів $(k > 3)$ має один стійкий синхронний рух: у дорезонансній області стійким є синфазне обертання всіх віброзбуджувачів; інші можливі синхронні рухи – нестійкі. Цей висновок є уточненням результату, одержаного раніше.

1. Blekhman I.I. Vibration Mechanics. Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific; 2000. – 509 p.
2. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. – М.: Наука, 1984. - 352 с.
3. Ярошевич Н.П. К теории кратной синхронизации механических вибровозбудителей, связанных с линейной колебательной системой // Проблемы машиностроения и надежности машин, РАН. – 2003. №4, С.3-10.
4. Blekhman I.I., Yaroshevich N.P. About expansion of applicability field of the stability integral criterion (extreme properties) in the problem about synchronization of the dynamic objects with nearly uniform relation //Advanced problems in mechanics. APM ’2002. Proceedings of the XXX Summer School. -St. Petersburg. - RAS RIMEP.- 2003.- P. 108-113.
5. Малахова О.З. Об особом случае в теории самосинхронизации механических вибровозбудителей //Изв. АН СССР, МТТ. – 1990.-№1.- С.29-36.