

УДК 534.1

Тимощук В.М.

Луцький національний технічний університет

ПРО ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРІЮ СТІЙКОСТІ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СИНХРОНІЗАЦІЇ k ОДНАКОВИХ МЕХАНІЧНИХ ВІБРОЗБУДЖУВАЧІВ

Розглядається питання про самосинхронізацію k механічних віброзбуджувачів з майже однаковими парціальними швидкостями, розміщеними на тримкому тілі з одним ступенем вільності. Дослідження проведено методом прямого розділення швидкостей.

Ключові слова: віброзбуджувач, кратна самосинхронізація, плоскі коливання, лінійна коливальна система.

Явище динамічної синхронізації механічних віброзбуджувачів використовується для створення багатьох вібраційних пристроїв. В наш час теорія синхронізації розроблена досить повно [1, 2]. Проте існує багато задач (названих “непростими”, особливими) розв’язування яких вимагає додаткових досліджень у порівнянні з існуючими методиками. Це стосується, зокрема, випадків синхронізації декількох (трьох і більше) однакових віброзбуджувачів та задач про кратну синхронізацію віброзбуджувачів.

У праці [3] для розв’язування задач двократної синхронізації віброзбуджувачів використовуються гармонічні коефіцієнти впливу. У [4] наводиться теоретичне обґрунтування можливості застосування інтегрального критерію стійкості для дослідження “непростих” задач теорії самосинхронізації, при цьому наведені приклади також стосуються лише кратної самосинхронізації віброзбуджувачів. У [5] викладена методика розв’язування “непростих” задач у випадку коливної системи з чотирма однаковими віброзбуджувачами встановленими на тримкому тілі з одним ступенем вільності методом малого параметра.

В даній статті за допомогою інтегрального критерію стійкості розглядається випадок самосинхронізації довільної кількості однакових дебалансних віброзбуджувачів, що розміщені на тримкому тілі з одним “поступальним” ступенем вільності.

Нехай на тримкому твердому тілі встановлено k дебалансних віброзбуджувачів з майже однаковими парціальними швидкостями обертання, що приводяться в рух електродвигунами асинхронного типу (рисунок). Тримке тіло зв’язане з нерухомою основою за допомогою лінійних пружних елементів і може зміщуватися відносно нерухомої основи вздовж деякого фіксованого напрямку Ox . Система характеризується k узагальненими обертальними координатами – кутами повороту віброзбуджувачів φ_s , що відлічуються від напрямку Ox за стрілкою годинника, та однією узагальненою коливною координатою – переміщенням тримкого тіла x від статичного положення.

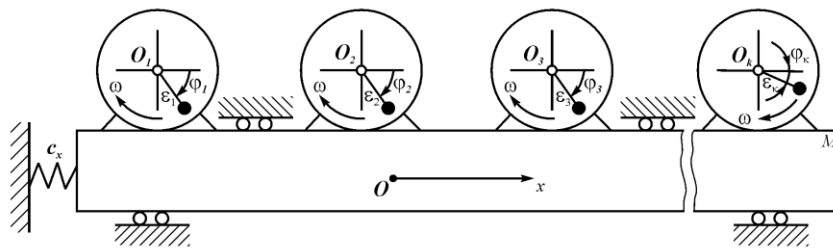


Рисунок – Динамічна схема вібраційного пристрою

Рівняння руху системи можуть бути представлені у вигляді [1, 2]:

$$I_s \ddot{\varphi}_s = L_s(\dot{\varphi}_s) - R_s(\dot{\varphi}_s) + m_s \varepsilon_s (\ddot{x} \sin \varphi_s + g \cos \varphi_s) \quad (1)$$

$$(s = 1, \dots, k),$$

$$M \ddot{x} + c_x x = \sum_{j=1}^k m_j \varepsilon_j (\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j + \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j), \quad (2)$$

де m_s, ε_s, I_s – відповідно маса s -го вібробудувача, його ексцентриситет і момент інерції відносно осі обертання; $L_s(\dot{\varphi}), R_s(\dot{\varphi})$ – обертальний момент на валу асинхронного двигуна та момент сил опору обертанню; M – маса тримкого тіла; c_x – жорсткість пружних елементів; g – пришвидшення вільного падіння.

Розглянемо умови існування та стійкості розв'язків системи (1), (2) виду

$$\varphi_s = n_s \omega t + \alpha_s + \psi_s(\omega t), \quad x = x(\omega t), \quad (3)$$

де n_s – цілі додатні числа; $\omega > 0$ – частота синхронного обертання вібробудувачів; α_s – сталі (початкові фази обертання); ψ_s і x – періодичні функції часу t з періодом $T = 2\pi/\omega$.

Згідно з інтегральним критерієм, стійкі синхронні рухи відповідають точкам строгого мінімуму потенціальної функції D різниці фаз $\alpha_s - \alpha_i$. У розглядуваному випадку функція D являє собою середнє за період обертання функції Лагранжа твердого тіла [1, 2]

$$D = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} L d\tau = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (M\dot{x}^2 - c_x x^2) d\tau. \quad (4)$$

Згідно з існуючою методикою розв'язання задач за допомогою інтегрального критерію стійкості рівняння (2) досить розв'язати з припущенням, що вібробудувачі обертаються рівномірно за законом

$$\varphi_s = n_s \omega t + \alpha_s.$$

Підставивши у вираз (4) розв'язок рівняння (2) у вигляді

$$x = -\frac{\omega^2}{\omega^2 - p_x^2} \frac{m\varepsilon}{M} \sum_{i=1}^k \cos(\omega t + \alpha_i)$$

і виконавши усереднення за період $\tau = \omega t$, знайдемо потенціальну функцію

$$\begin{aligned} D &= \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (M(\dot{x}^0)^2 - c_x (x^0)^2) d\tau = \\ &= \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \frac{m^2 \varepsilon^2}{4M} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k \cos(\alpha_s - \alpha_j) + C, \end{aligned} \quad (5)$$

де C – величина, що не залежить від фаз α_s .

Значення фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ обертання вібробудувачів у можливих синхронних рухів визначаються з рівнянь $\partial D / \partial \alpha_s = 0$:

$$\sum_{j=1}^k \sin(\alpha_s - \alpha_j) = 0 \quad (s = 1, \dots, k).$$

Ці рівняння допускають групу розв'язків

$$\alpha_s = q_s^* \pi + \alpha_0, \quad (6)$$

де q_s^* – числа, кожне з яких може дорівнювати нулю або одиниці, α_0 – довільна стала.

При застосуванні інтегрального критерію дослідження стійкості спрощується, оскільки умови стійкості можуть бути виписані в явній формі. За відомою теоремою Сільвестра для того, щоб функція D мала мінімум у точках (6), необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні нерівності:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_1^2} \right|_{\alpha_1 = \alpha_1^*} > 0, \quad \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha_s = \alpha_s^*} > 0, \quad \dots (i, j = 1, 2); \\ \dots, \quad \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha_s = \alpha_s^*} > 0 \quad (i, j = 1, \dots, k-1). \end{aligned} \quad (7)$$

Двічі про диференціювавши потенціальну функцію (5), одержимо останню умову (7)

$$\frac{1}{(\omega^2 - p_x^2)^{k-1}} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1(k-1)} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2(k-1)} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & \dots & c_{3(k-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1(k-1)} & c_{2(k-1)} & c_{3(k-1)} & \dots & c_{(k-1)(k-1)} \end{vmatrix} > 0,$$

де $c_{ij} = -\cos \alpha_i - \sum_{s=1}^{k-1} \cos(\alpha_s - \alpha_i)$, $i = j$, $s \neq j$; $c_{ij} = \cos(\alpha_i - \alpha_j)$, $i \neq j$,

або, враховуючи (6),

$$\frac{1}{(\omega^2 - p_x^2)^{k-1}} \begin{vmatrix} \overbrace{a \quad 1 \quad \dots \quad 1}^m & \overbrace{\dots \quad -1 \quad \dots \quad -1 \quad -1}^{k-m-1} \\ 1 \quad a \quad \dots \quad 1 & \dots \quad -1 \quad \dots \quad -1 \quad -1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 1 \quad 1 \quad \dots \quad a & \dots \quad -1 \quad \dots \quad -1 \quad -1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 & \dots \quad b \quad \dots \quad 1 \quad 1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 & \dots \quad 1 \quad \dots \quad b \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 & \dots \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad b \end{vmatrix} > 0 \quad (8)$$

де $a = k - 2m + 1$; $b = -k + 2m + 1$.

Відмітимо, що при складанні детермінанта (8) фази вибрані таким чином, що m перших $\alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*$ містять числа $q_s^* = 1$.

Дослідимо стійкість можливих синхронних рухів вібробуджувачів.

У випадку синфазного руху всіх вібробуджувачів $\alpha_1^* = \dots = \alpha_k^* = 0$ ($m = 0$) діагональні члени (8) набувають значень $a = 0$, $b = -k + 1$. Тоді неважко показати, що у дорезонансній області стійким є синфазний рух усіх вібробуджувачів, оскільки всі головні діагональні мінори детермінанта (8) при $\omega < p_x$ додатні.

В загальному випадку перша умова (7) для детермінанта (8) має вигляд $\frac{k - 2m + 1}{\omega^2 - p_x^2} > 0$. У той же час, якщо при складанні детермінанта (8) фази вибрати так, що m перших $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ містять числа $q_s^* = 0$, то дана умова набуває вигляду $\frac{-k + 2m + 1}{\omega^2 - p_x^2} > 0$. Ці дві нерівності одночасно можуть виконуватися лише за умови $k = 2m$. Тому всі можливі синхронні рухи, крім розглянутого вище та можливого випадку при $m = k/2$ та $\omega > p_x$, є нестійкими.

Таким чином, у зарезонансній області стійкий рух можливий лише у випадку парної кількості вібробуджувачів $k = 2l$: для режиму $\alpha_1^* = \dots = \alpha_l^* = \pi$, $\alpha_{l+1}^* = \dots = \alpha_k^* = 0$, ($m = l$). У цьому випадку (8) набуває вигляду

$$\frac{1}{(\omega^2 - p_x^2)^{k-1}} \begin{pmatrix} \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^m & \overbrace{\dots & -1 & \dots & -1 & -1}^{k-m-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} > 0 \quad (9)$$

Зважаючи на рівність нулю всіх, крім першого, головних діагональних мінорів детермінанта (9) (невизначений випадок), для вирішення питання про стійкість необхідне додаткове дослідження.

Обчислимо потенціальну функцію $D = D^{(1)}$ з більшою точністю.

Скористаємося методом прямого розділення рухів [1, 2]. У цьому випадку розв'язки рівнянь (1) шукаються у вигляді

$$\varphi_s = n_s \sigma_s [\omega t + \alpha_s(t) + \psi_s(t, \omega t, \mu)], \quad x = x(\omega t),$$

де $\alpha_s(t)$ - повільні, а ψ_s і x - швидкі 2π - періодичні по ωt складові; $\mu > 0$ - малий параметр.

Розв'язок рівняння, що описує коливання тримкого тіла, матиме вигляд

$$x^{(1)} = -\frac{m\varepsilon\omega^2}{M(\omega^2 - p_x^2)} \left[\frac{km^2\varepsilon^2\omega^2}{16MI(\omega^2 - p_x^2)} + 1 \right] \sum_{j=1}^k \cos(\omega t + \alpha_j) - \frac{2m^2\varepsilon^2g}{MI(4\omega^2 - p_x^2)} \sum_{j=1}^k \sin 2(\omega t + \alpha_j). \quad (10)$$

Тоді, враховуючи (10), одержуємо

$$\begin{aligned} D = D^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \left(M(\dot{x}^{(1)})^2 - c_x(x^{(1)})^2 \right) d\tau = \\ &= \frac{m^2\varepsilon^2\omega^4 A^2}{4M(\omega^2 - p_x^2)} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k \cos(\alpha_s - \alpha_j) + \\ &+ \frac{2m^4\varepsilon^4g^2}{MI^2(4\omega^2 - p_x^2)} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k \cos 2(\alpha_s - \alpha_j) + C_1, \end{aligned}$$

$$\text{де } A = 1 + \frac{km^2\varepsilon^2\omega^2}{16MI(\omega^2 - p_x^2)}.$$

Детермінант (8) для невизначеного випадку ($m = l$) має вигляд

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & \overbrace{\hspace{4cm}}^m & & & \overbrace{\hspace{4cm}}^{k-m-1} & & & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1-B_1 & 1+B_2 & \dots & 1+B & \dots & -1+B_2 & \dots & -1+B_2 & -1+B_2 \\
 1+B_2 & 1-B_1 & \dots & 1+B & \dots & -1+B_2 & \dots & -1+B_2 & -1+B_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1+B_2 & 1+B_2 & \dots & 1-B_1 & \dots & -1+B_2 & \dots & -1+B_2 & -1+B_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -1+B_2 & -1+B_2 & \dots & -1+B_2 & \dots & 1-B_1 & \dots & 1+B_2 & 1+B_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -1+B_2 & -1+B_2 & \dots & -1+B_2 & \dots & 1+B_2 & \dots & 1-B_1 & 1+B_2 \\
 -1+B_2 & -1+B_2 & \dots & -1+B_2 & \dots & 1+B_2 & \dots & 1+B_2 & 1-B_1
 \end{array} \right] > 0,
 \end{array}$$

$$\text{де } B_1 = (k-1)B_2, B_2 = \mu \frac{4m^2 \varepsilon^2 g^2}{I^2 A^2 \omega^4} \frac{\omega^2 - p_x^2}{4\omega^2 - p_x^2}.$$

Головні діагональні мінори даного детермінанта відмінні від нуля, що дозволяє зробити висновок щодо стійкості руху. Для цього достатньо проаналізувати лише перші дві умови:

$$1 - (k-1)B_2 > 0,$$

$$[1 - (k-1)B_2]^2 - (1+B_2)^2 > 0.$$

Оскільки $\omega > p_x$, друга нерівність не виконується і рух буде нестійким.

Таким чином, для даної коливної системи у випадку більше трьох вібробудувачів з однаковими парціальними кутовими швидкостями при дослідженні стійкості необхідно враховувати вищі, ніж у існуючих методиках, наближення; при цьому, що важливо, достатньо розглянути лише перше наближення.

Отже, дана коливна система з одним поступальним ступенем вільності у випадку k вібробудувачів ($k > 3$) має один стійкий синхронний рух: у дорезонансній області стійким є синфазне обертання всіх вібробудувачів; інші можливі синхронні рухи – нестійкі. Цей висновок є уточненням результату, одержаного раніше.

1. Blekhnman I.I. Vibration Mechanics. Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific; 2000. – 509 p.

2. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. – М.: Наука, 1984. - 352 с.

3. Ярошевич Н.П. К теории кратной синхронизации механических вибровозбудителей, связанных с линейной колебательной системой // Проблемы машиностроения и надежности машин, РАН. – 2003. №4, С.3-10.

4. Blekhnman I.I., Yaroshevich N.P. About expansion of applicability field of the stability integral criterion (extreme properties) in the problem about synchronization of the dynamic objects with nearly uniform relation //Advanced problems in mechanics. APM '2002. Proceedings of the XXX Summer School. -St. Petersburg. - RAS RIMEP.- 2003.- P. 108-113.

5. Малахова О.З. Об особом случае в теории самосинхронизации механических вибровозбудителей //Иzv. АН СССР, МТТ. – 1990.-№1.- С.29-36.