

УДК 539.3

Я. В. Максимович

Луцький Інститут розвитку людини університету "Україна"

**АЛГОРИТМ І ПРОГРАМИ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ СМУГИ,
ПОСЛАБЛЕНОЇ СИСТЕМОЮ ОТВОРІВ**

У роботі записано граничні інтегральні рівняння для смуги із отворами, навантаженої зосередженими силами та зусиллями на нескінченності. Розв'язування рівнянь проведено методом механічних квадратур. На основі запропонованого алгоритму розроблено програми, які дають можливість досліджувати напруження біля отворів складної форми.

Ключові слова: смуга, напруження, отвори, метод інтегральних рівнянь, розв'язок типу Гріна.

При дослідженні напруженого стану пластинок із отворами широко використовується метод граничних інтегральних рівнянь. Найбільш ефективно застосування цього методу досягається у випадку, коли рівняння побудовано на розв'язках типу Гріна, оскільки при цьому умови на межі пластинки задовольняються тотожно [5-6]. У даній роботі за допомогою такого підходу побудовано інтегральні рівняння для смуги із отворами. Розв'язування рівнянь проведено методом механічних квадратур. На основі запропонованого алгоритму розроблено програми, які дають можливість досліджувати напруження біля отворів складної форми.

Постановка задачі. Розглядається смуга $-h < y < 0$, яка послаблена системою отворів, межа яких розміщена вздовж кривих L_j ($j=1, \dots, I$). Приймемо, що межі смуги вільні від навантаження, смуга рівномірно навантажена на нескінченності, перебуває під дією зосереджених сил (X_j, Y_j) , які прикладені у точках (a_j, b_j) ($j=1, \dots, J$) та зусиль q_T . Тут позначено $q_T = N_q + iT_q$, де N_q і T_q – проекції прикладених до межі отворів вектора сил на зовнішню нормаль та дотичну до них.

Загальний розв'язок поставленої задачі для нескінченної пластинки записують через комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z), \Psi(z)$ у вигляді [3,6]

$$\Phi(z) = \int_L \frac{Q(t)ds}{t-z} + \Phi_c(z), \quad \Psi(z) = \int_L \left[\frac{\bar{Q}}{t-z} - \frac{iQ}{(t-z)^2} \right] ds + \Psi_c(z), \quad (1.1)$$

де $\Phi_c(z) = \Phi_p(z) + \Phi_\infty(z)$, $\Psi_c(z) = \Psi_p(z) + \Psi_\infty(z)$; $\Phi_\infty(z), \Psi_\infty(z)$ і $\Phi_p(z), \Psi_p(z)$ – відповідно комплексні потенціали для суцільної пластинки, що відповідають прикладеному на нескінченності навантаженню та дії зосереджених сил, $t = \xi + i\eta, (\xi, \eta) \in L$ – точка, за якою проводиться інтегрування, $L = L_1 + L_2 + \dots + L_I$, Q – невідома функція на контурі L . Тут і далі прийнято, що головний вектор і момент зусиль, прикладених до кожного з отворів дорівнюють нулю.

Зазначимо, що невідомі функції на кожному з граничних контурів визначені з точністю до доданків $Q_\Delta = \omega_j dz / ds$, де ω_j – довільні сталі.

Вектор зусиль q на довільній площинці, що визначається диференціалом dz знаходиться через комплексні потенціали за формулою [3, 4]

$$q(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + d\bar{z} / dz [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]. \quad (1.2)$$

Інтегральні рівняння для знаходження функції $Q(t)$ отримуємо після підстановки формули (1.1) в умову (1.2) та спрямування $z \rightarrow L$. Використавши формули Племеля-Сохоцького, отримуємо рівняння вигляду [5]

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + d\bar{z} / d\bar{z} F(z, \bar{z}) = q_T(z), \quad z \in L, \quad (1.3)$$

де $F(z, \bar{z}) = \bar{z}\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}$. Рівняння (1.3) містить інтеграли типу Коші, що розглядаються в сенсі головного значення та регулярні інтеграли.

Інтегральні рівняння для смуги з отворами. Для запису інтегрального представлення для смуги з отворами з огляду на вигляд підінтегральних функцій у зображенні (1.1) знайдемо спочатку комплексні потенціали $\Phi_c(z), \Psi_c(z)$, які мають особливості вигляду

$$\Phi_G(z) \sim \Phi_0(z), \quad \Psi_G(z) \sim \Psi_0(z), \quad (1.4)$$

за умови, що відповідні їм напруження на границі смуги рівні нулю. Тут

$$\Phi_0(z) = \frac{C}{z_0 - z}, \quad \Psi_0(z) = \frac{\bar{C}}{z_0 - z} - \frac{\bar{z}_0 C}{(z_0 - z)^2};$$

де C, z_0 – довільні комплексні сталі, причому $z_0 \in D$; D – область, яку займає смуга. Запишемо цей розв'язок у вигляді

$$\Phi_G(z, Z_0) = CF_0(z, Z_0) + \bar{C}F_1(z, Z_0), \quad \Psi_G(z, Z_0) = CP_0(z, Z_0) + \bar{C}P_1(z, Z_0), \quad (1.5)$$

де F_j, P_j – відомі функції, Z_0 – точка з координатами (x_0, y_0) .

Тоді інтегральне зображення для смуги з отворами запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_D(z) + \int_L \left[Q(t)F_0(z, T) + \overline{Q(t)}F_1(z, T) \right] ds, \\ \Psi(z) &= \Psi_D(z) + \int_L \left[Q(t)P_0(z, T) + \overline{Q(t)}P_1(z, T) \right] ds, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де $\Phi_D(z), \Psi_D(z)$ – комплексні потенціали для смуги, які відповідають прикладеному зовнішньому навантаженню (без врахування зусиль, що діють на межі отвору), T – точка (ξ, η) . За побудовою в представленні (1.6) підінтегральні функції мають такі ж особливості, як і в (1.1). Очевидно, що потенціали (1.1) автоматично задовольняють умовам відсутності напружень на прямолінійних межах смуги.

Приймаємо, що головний вектор зусиль, прикладених до граничних контурів дорівнює нулю. Тоді для забезпечення однозначності переміщень на отворах необхідно, щоби

$$\int_{L_j} Q ds = 0. \quad (1.7)$$

Перепишемо зображення (1.6) у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_D(z) + \int_L \left[Q_R(t)\Phi_R(z, T) + Q_I(t)\Phi_I(z, T) \right] ds, \\ \Psi(z) &= \Psi_D(z) + \int_L \left[Q_R(t)\Psi_R(z, T) + Q_I(t)\Psi_I(z, T) \right] ds, \end{aligned} \quad (1.8)$$

де Q_R, Q_I – дійсна та уявна частина функції Q ,

$$\Phi_R(z, T) = \Phi_G(z, T)|_{A=1}, \quad \Psi_R(z, T) = \Psi_G(z, T)|_{A=1}, \quad (1.9)$$

$$\Phi_I(z, T) = \Phi_G(z, T)|_{A=i}, \quad \Psi_I(z, T) = \Psi_G(z, T)|_{A=i}.$$

Підставивши потенціали (1.8) у формулу для визначення вектора напружень на контурі L , отримуємо інтегральне рівняння для знаходження невідомих дійсних функцій Q_R, Q_I у вигляді

$$\int_L \left[Q_R(t)q_R(Z, T) + Q_I(t)q_I(Z, T) \right] ds = q_T(z) - q_D(z), \quad (1.10)$$

де $q_R(Z, T), q_I(Z, T), q_D(t)$ – вектори напружень у точці Z з координатами (x, y) кривої L , які визначаються за формулою (1.2) через відповідно комплексні потенціали $(\Phi_R, \Psi_R), (\Phi_I, \Psi_I), (\Phi_D, \Psi_D)$.

Числове розв'язування інтегральних рівнянь проводилось за допомогою методу механічних квадратур, в якому регулярні та сингулярні інтеграли замінені відомими квадратурними формулами для періодичних функцій [1]. В результаті для випадку одного отвору, рівняння якого записано у вигляді $x = \alpha(\theta), y = \beta(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi$, отримана система рівнянь

$$H \sum_{k=1}^N (q_{vk}^{(R)}U_k + q_{vk}^{(I)}V_k) = q_v, \quad v = 1, \dots, N, \quad (1.11)$$

де $q_{vk}^{(j)} = q_j(Z_v, T_k), j = R, I, q_v = q_T(Z_v) - Q_D(Z_v); U_k = Q_R(x_k, y_k)s_k', V_k = Q_I(x_k, y_k)s_k'; Z_v$ і

T_k – точки з координатами (x_v, y_v) і (ξ_k, η_k) ; $\xi_k = \alpha(\theta_k)$, $\eta_k = \beta(\theta_k)$;

$x_v = \alpha(\tau_v)$, $y_v = \beta(\tau_v)$; $\theta_k = Hk$, $\tau_n = \theta_n - H/2$, $H = 2\pi / N$.

Виписавши дійсну і уявну частину в рівняннях (1.11), отримуємо систему $2N$ дійсних рівнянь. Можна показати, що три із цих рівнянь (1.11) є лінійно залежними. Вилучимо їх із отриманої системи. З умов однозначності переміщень отримуємо ще два рівняння

$$\sum_{n=1}^N U_n = 0, \sum_{n=1}^N V_n = 0. \quad (1.12)$$

Останнє рівняння отримуємо зафіксувавши величину ω (для цього в одній із вузлових точок фіксували величину U чи V).

Знаходження комплексного розв'язку типу Гріна. Побудуємо розв'язок типу Гріна для смуги $-H < y < 0$ з вільною від навантаження межею. При його знаходженні зручніше замість функції Ψ використати $\Omega(z) = \Phi(z) + z\Phi'(z) + \Psi(z)$.

Ці функції мають особливості вигляду

$$\Phi_0(z) = \frac{C}{c-z}, \quad \Omega_0 = \gamma \frac{\bar{C}}{z_0-z} + \frac{C(z_0-\bar{z}_0)}{(z_0-z)^2}. \quad (2.1)$$

Зобразимо розв'язок у вигляді [6]

$$\Phi(z) = \Phi_p(z) + \Phi_\Delta(z), \quad \Psi(z) = \Psi_p(z) + \Psi_\Delta(z), \quad (2.2)$$

де $\Phi_p(z) = -\frac{C}{z-z_0} + \frac{\gamma C}{z-z_0} + \frac{\bar{C}(z_0-\bar{z}_0)}{(z-z_0)^2}$, $\Omega_p(z) = -\frac{\gamma \bar{C}}{z-z_0} + \frac{\bar{C}}{z-z_0} + \frac{C(z_0-\bar{z}_0)}{(z-z_0)^2}$, $\Phi_\Delta(z)$ і

$\Omega_\Delta(z)$ – корегувальний розв'язок, який визначається із розв'язку задачі теорії пружності для смуги, що задовольняє граничні умови

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \text{ для } y=0 \text{ і } \sigma_y - i\tau_{xy} = -q \text{ для } y=-h, \text{ де} \quad (2.3)$$

$$q = \Phi_p(x-ih) - 2ih\overline{\Phi_p'(x-ih)} + \overline{\Omega_p(x-ih)} \quad (2.4)$$

Зазначимо, що потенціали $\Phi_p(z)$ і $\Omega_p(z)$ є розв'язком відповідної задачі для півплощини $y < 0$ з вільною від навантаження межею $y=0$, що має особливості (4.1).

Використовуючи відомі результати [7], отримаємо

$$\Phi_\Delta(z) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left[Q(\xi/h) sh\xi \exp(-i\xi z/h) - \overline{Q(\xi/h)} \xi e^{-\xi} \exp(i\xi z/h) \right] d\xi, \quad (2.5)$$

$$\Omega_\Delta(z) = \overline{\Phi_\Delta(z)}, \quad \Delta = sh^2\xi - \xi^2, \quad Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{i\lambda x} dx.$$

На підставі співвідношень (2.2) – (2.5) маємо

$$Q(\lambda) = A(\lambda) e^{-\lambda h} \text{ для } \lambda \geq 0 \text{ і } Q(\lambda) = [\overline{B(-\lambda)} - 2\lambda \overline{A(-\lambda)}] e^{\lambda h} \text{ для } \lambda < 0; \quad (2.6)$$

$$A(\lambda) = B(\lambda) = 0 \text{ для } \lambda < 0;$$

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^1 \left[a_k \lambda^k \exp(i\lambda z_0) + b_k \lambda^k \exp(i\lambda \bar{z}_0) \right];$$

$$B(\lambda) = \sum_{k=0}^1 \left[c_k \lambda^k \exp(i\lambda z_0) + d_k \lambda^k \exp(i\lambda \bar{z}_0) \right] \text{ для } \lambda < 0,$$

де $a_0 = -iC$, $b_0 = iC$, $b_1 = -\bar{C}(z_0 - \bar{z}_0)$, $c_0 = \bar{b}_0$, $c_1 = -\bar{b}_1$, $d_0 = \bar{a}_0$, $a_1 = d_1 = 0$.

Зазначимо, що $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ – трансформанти Фур'є функцій $\Phi_p(z)$ і $\Omega_p(z)$ для $Im(z) < -h$, причому тут

$$\Phi_p(z) = \int_0^{\infty} A(\lambda) e^{-i\lambda z} d\lambda, \quad \Omega_p(z) = \int_0^{\infty} B(\lambda) e^{-i\lambda z} d\lambda. \quad (2.7)$$

Формулу (2.5) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta}(z) = \int_0^{\infty} \{ [\varphi_1(h\lambda)A(\lambda) + \varphi_2(h\lambda)B(\lambda)] \exp(-i\lambda z) - \\ - [\varphi_2(h\lambda)\overline{A(\lambda)} + \varphi_3(h\lambda)\overline{B(\lambda)}] \exp(i\lambda z) \} d\lambda, \quad \Omega_{\Delta}(z) = \overline{\Phi_{\Delta}(z)}, \\ \varphi_2(\xi) = 0,5\xi / \Delta(\xi), \quad \varphi_3(\xi) = 0,25[1 - \exp(-2\xi)] / \Delta(\xi), \quad \varphi_1(\xi) = \varphi_3(\xi) + 2\xi\varphi_2(\xi). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Легко показати, що функції $\Phi_{\Delta}(z)$ і $\Omega_{\Delta}(z)$ визначаються через збіжні інтеграли.

Безпосереднє обчислення інтегралів (2.8) є складною задачею, так як підінтегральні функції в них мають особливості в околі точки $\lambda = 0$ (полнос третього порядку) та ці функції повільно загасають для $\lambda \Rightarrow \infty$ у випадку, коли $I_m(z) \cong -h$ та сили прикладені біля краю смуги $y = -h$. Покращимо збіжність даних інтегралів, виділивши із підінтегральних функцій складові, що мають особливості в околі точки $\lambda = 0$ та повільно загасають на нескінченності.

Для великих значень x справедливий зображення

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = (1 + 4x^2)e^{-2x} + 0(e^{-4x}), \quad \varphi_2(x) = 2xe^{-2x} + 0(e^{-4x}), \\ \varphi_3(x) = e^{-2x} + 0(e^{-4x}) \end{aligned}$$

Використовуючи їх, запишемо

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = (1 + 4x^2)e^{-2x} + P_1(x)e^{-3x}, \quad \varphi_2(x) = 2xe^{-2x} + P_2(x)e^{-3x}, \\ \varphi_3(x) = e^{-2x} + P_3(x)e^{-3x}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

де функції

$$\begin{aligned} P_1(x) = [\varphi_1(x) - (1 + 4x^2)e^{-2x}]e^{3x}, \quad P_2(x) = [\varphi_2(x) - 2xe^{-2x}]e^{3x}, \\ P_3(x) = [\varphi_3(x) - e^{-2x}]e^{3x}, \end{aligned}$$

мають порядок $0(e^{-x})$ для $x \Rightarrow \infty$.

Використовуючи рівності (2.9), запишемо

$$\varphi_j(x) = \omega_j(x) + r_j(x) + s_j(x), \quad (2.10)$$

де
$$\omega_1(x) = (1 + 4x^2)e^{-2x} + \sum_{n=-1}^4 a'_n x^n e^{-3x},$$

$$r_1(x) = \sum_{n=-3}^{-2} a'_n x^n e^{-3x}, \quad \omega_2(x) = 2xe^{-2x} + \sum_{n=-1}^4 b'_n x^n e^{-3x}, \quad r_2(x) = \sum_{n=-3}^{-2} b'_n x^n e^{-3x},$$

$$\omega_3(x) = e^{-2x} + \sum_{n=-1}^4 c'_n x^n e^{-3x}, \quad r_3(x) = \sum_{n=-3}^{-2} c'_n x^n e^{-3x}, \quad a_n \ddot{y} = a_{n+3}, \quad b_n \ddot{y} = b_{n+3},$$

$$c_n \ddot{y} = c_{n+3}, \quad s_j(x) = \varphi_j(x) - \omega_j(x) - r_j(x), \quad (j = 1, 2, 3).$$

Відповідно з формулами (2.10) функції $F_D(z)$ і $W_D(z)$ зобразимо у вигляді

$$F_D(z) = F_w(z) + F_r(z) + F_s(z), \quad \Omega_{\Delta}(z) = \Omega_{\omega}(z) + \Omega_r(z) + \Omega_s(z). \quad (2.11)$$

Тут

$$\begin{aligned} \Omega_{\omega}(z) = \overline{\Phi_{\omega}(z)}, \quad \Phi_{\omega}(z) = F_{\omega}(z) - \overline{Q_{\omega}(z)}, \\ F_{\omega}(z) = (1 - 4h^2 D^2) \Phi_p(z - 2ih) + \sum_{n=0}^4 a'_n (ih)^n D^n \Phi_p(z') + \\ + 2ih D \Omega_p(z - 2ih) + \sum_{n=0}^4 b'_n (ih)^n D^n \Omega_p(z'), \end{aligned}$$

$$Q_{\omega}(z) = 2ihD\Phi_p(z - 2ih) + \sum_{n=0}^4 b'_n(ih)^n D^n \Phi_p(z') + \\ + \Omega_p(z - 2ih) + \sum_{n=0}^4 c'_n(ih)^n D^n \Omega_p(z'), \quad z' = z - 3ih. \quad (2.12)$$

Функції з індексом r визначаються за формулами

$$\Omega_r(z) = \bar{\Phi}_r(z), \\ \Phi_r(z) = -1,5h^{-3}[(a_o + \bar{b}_o)S_3(z') + (\bar{a}_o + b_o)S_3(z'')] + \\ + h^{-2}[(6a_o + 4,5\bar{b}_o)E_2(-z') - (3a_o + 4,5\bar{b}_o)E_2(z') + \\ + (6b_o + 4,5\bar{a}_o)E_2(-z'') - (3b_o + 4,5\bar{a}_o)E_2(z'')] + \\ + 1,5h^{-3}[-\bar{b}_1(E_2(-z') + E_2(z')) + b_1(E_2(-z'') + E_2(z''))] + \\ + h^{-1}[-4,5\bar{b}_1(E_1(-z') + E_1(z')) + 3b_1(2E_1(-z'') + E_1(z''))], \\ + \frac{1}{20h}[61a_1E_o(-z') - 61a_1E_o(z') + 131\bar{a}_1E_o(-z'') - 131\bar{a}_1E_o(z'')], \\ E_0(z) = \frac{1}{3h - iz}, \quad E_1(z) = -\ln \frac{z + 3ih}{3ih}, \quad E_2(z) = (z + 3ih)E_1(z) + iz, \\ E_3 = -0,5(z + 3ih)^2 E_1(z) + 0,5(-z + 3ih)^2 E_1(-z) - 3ihz,$$

де $z\check{y} = z - z_0$, $z\ddot{y} = z - \bar{z}_0$.

При записі даних формул враховано умови рівноваги прикладених до смуги сил та зафіксовано уявну сталу, яка на напружений стан не впливає.

Функції з індексом s визначаються через інтеграли (2.8) при заміні функцій $j_j(x)$ на $s_j(x)$ ($j = 1, 2, 3$). Функції $s_j(x)$ мають порядок $O(x^4)$ для малих значень аргументу та $O(e^{-3x})$ для $x \Rightarrow \infty$. Тому інтеграли, що містять дані функції, можуть бути ефективно обчислені з використанням відомих квадратурних формул. Крім цього, як показали розрахунки, функції $s_j(x)$ є малими за величиною для $0 < x < \Gamma$. Так, максимальне значення величин $a_j = S_j / j_j$, буде: $a_1 @ 0,0007$ (досягається для $x @ 3$); $a_2 @ 0,004$ (досягається для $x @ 4$). Таким чином, отримані співвідношення визначають розв'язок типу Гріна для смуги, причому в практичних розрахунках може бути використаний наближений замкнений розв'язок, що отримується при $\Phi_s(z) = \Omega_s(z) = 0$.

Результати розрахунків. Розглянуто смугу із системою отворів, відстань між центрами яких d . Зазначимо, що в літературі найбільше вивчено напруження біля одного чи двох отворів у смугі. При розгляді системи отворів, як правило обмежуються розглядом періодичної системи.

Розрахунки виконано для випадку шести рівновіддалених кругових отворів радіуса $R=h/4$, центри яких розміщені на середній лінії за поздовжнього розтягу смуги зусиллями p .

Максимальні відносні кільцеві напруження $\sigma = \sigma_{\theta} / p$ на межі цих отворах (тобто, коефіцієнти концентрації напружень - ККН) при $d=2,5R$, $d=3R$, $d=4R$ наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. ККН на отворах

N \ d/R	2,5	3,0	4,0
1	3,9 580	4,0 179	4,1 795
2	3,2 434	3,5 189	3,9 813
3	3,4 068	3,6 305	4,0 048
4	3,4 068	3,6 305	4,0 048
5	3,2 434	3,5 189	3,9 813
6	3,9 580	4,0 179	4,1 795

Розраховані максимальні відносні напруження при $d=100R$ виявились рівними 4.3363, що узгоджується із відповідним значенням роботи [4].

Із таблиці випливає, що для поздовжнього розтягу смуги: ККН найбільші на крайніх отворах; найменший ККН має місце на передостанніх отворах; ККН зменшуються при зближенні отворів.

Напруження на четвертому- шостому отворах при $d=2,5R$ для системи 6 отворів зображено на рис.1 кривими 1-3 відповідно.

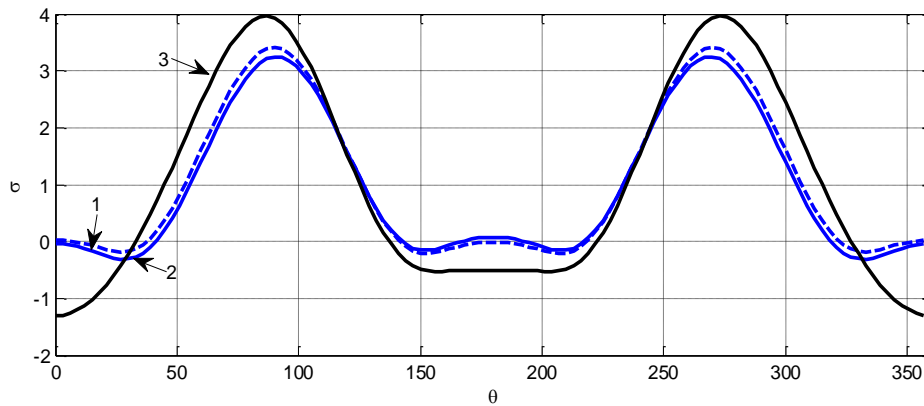


Рис. 1. Відносні напруження на системі 6 отворів

Для порівняння наведемо відносні максимальні напруження на 6-10 отворах для випадку 10 отворів при $d=3R$

3,6	3,6	3,6	3,5	4,0
169	137	332	184	179

Видно, що напруження на трьох крайніх отворах такі ж, як і у випадку 6 отворів, а на центральних отворах ККН дещо зменшені.

Напруження на межі смуги $y=0$ зображені на рис. 2

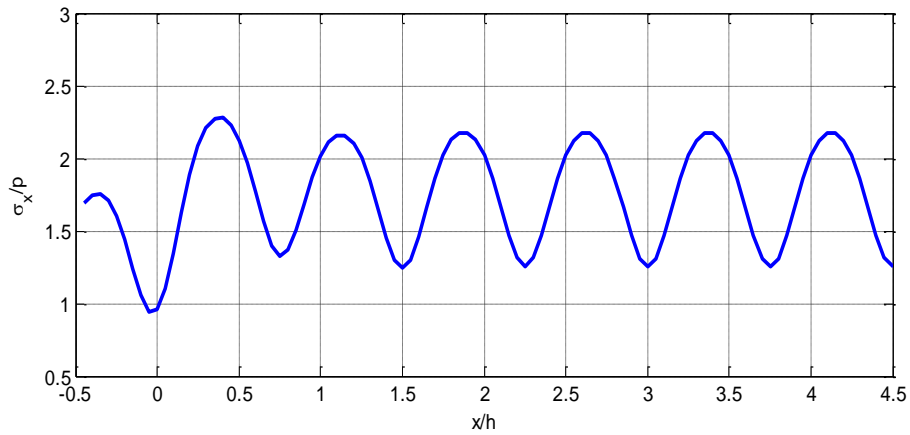


Рис. 2. Напруження на межі смуги.

Видно, що на межі смуги також найменші напруження досягаються над центрами отворів, а найбільші – між отворами.

Розглянуто прямокутний отвір з півсторонами $b=0.25h$, $a=0.5h$, вершини якого закруглені дугами кола радіуса $R=0.5b$. Розподіл відносних напружень на межі отвору залежно від дугової координати наведено на рис. 3.

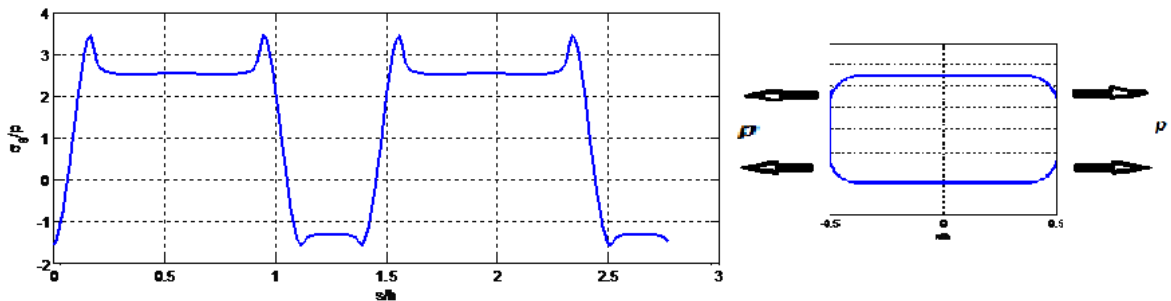


Рис.3. Напруження на межі закругленого прямокутника.

Відносні напруження на межі смуги наведено на рис. 4

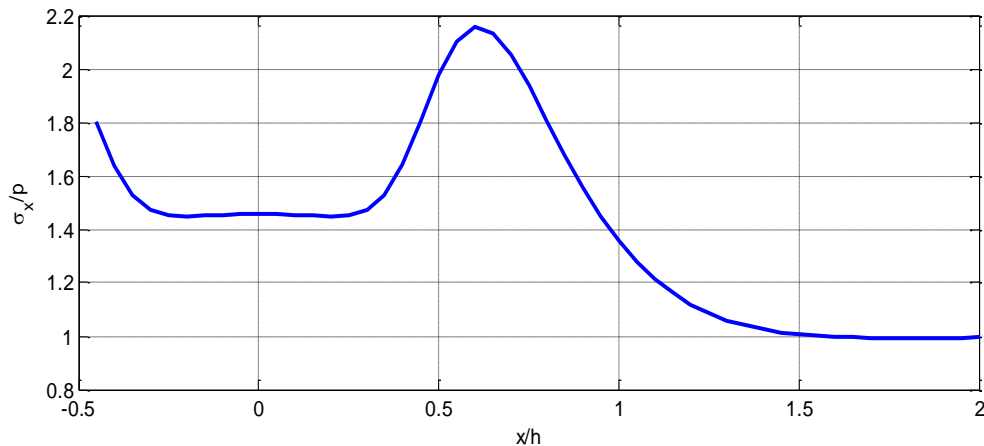


Рис.4. Напруження на межі смуги з прямокутним отвором

Розглянуто смугу, послаблену двома отворами, відстань між якими $0.5h$ (рис.5 справа). Відносні напруження на межі правого отвору наведено на рис. 5 зліва.

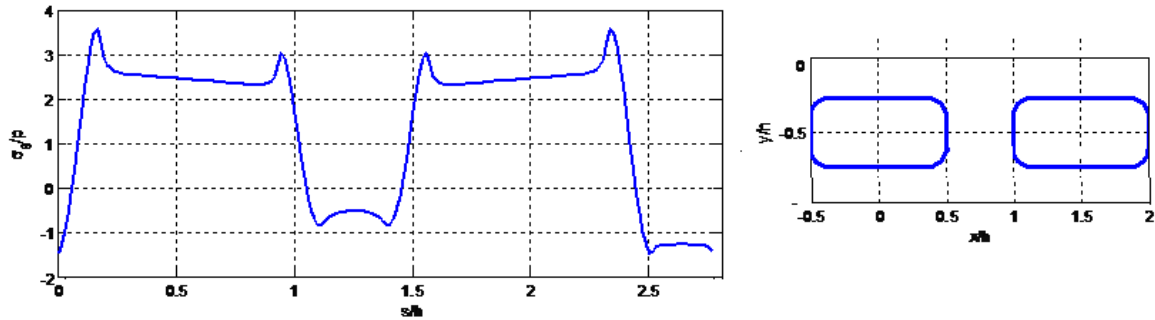


Рис.5. Напруження на межі другого закругленого прямокутника

Порівнюючи напруження на рис. 4 і 5, можна зробити висновок, що максимальні напруження на системі двох отворів не збільшилися порівняно з випадком одного отвору.

Піднесені до зусиль p напруження на межі смуги наведені на рис.6.

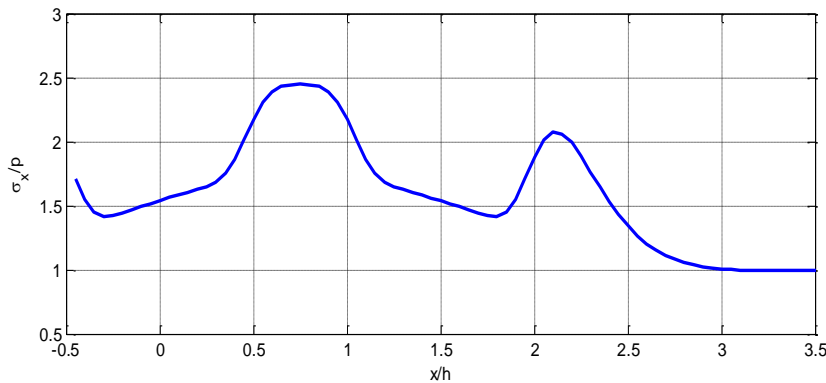


Рис.6. Напруження на межі смуги

Із рис.6 видно, що максимальні напруження на межі досягаються між отворами і вони є близькі за величиною до максимальних напружень на отворі.

Смуга з отворами при дії зосереджених сил вивчені в літературі у меншій мірі, ніж за однорідного розтягу на нескінченості. Зокрема, вкажемо на роботу [2], в якій досліджено напруження біля кругового отвору за розтягу дотичними зусиллями на межі смуги. Проведені розрахунки напружень для цього випадку за розробленим алгоритмом практично збігаються із даними роботи [1].

Проведемо дослідження напружень у смугі з круговим центральним отвором радіуса $0,25h$, яка навантажена зосередженими силами $P/2$, прикладеними в точках $(-c, -H)$, $(c, -H)$ та силою $-P$ в точці $(0,0)$ (треточковий згин). На рис.7 кривими 1 і 2 наведено відносні

напруження на межі отвору $\sigma = \frac{h\sigma_\theta}{P}$ при $c=2$ і $c=1$ відповідно

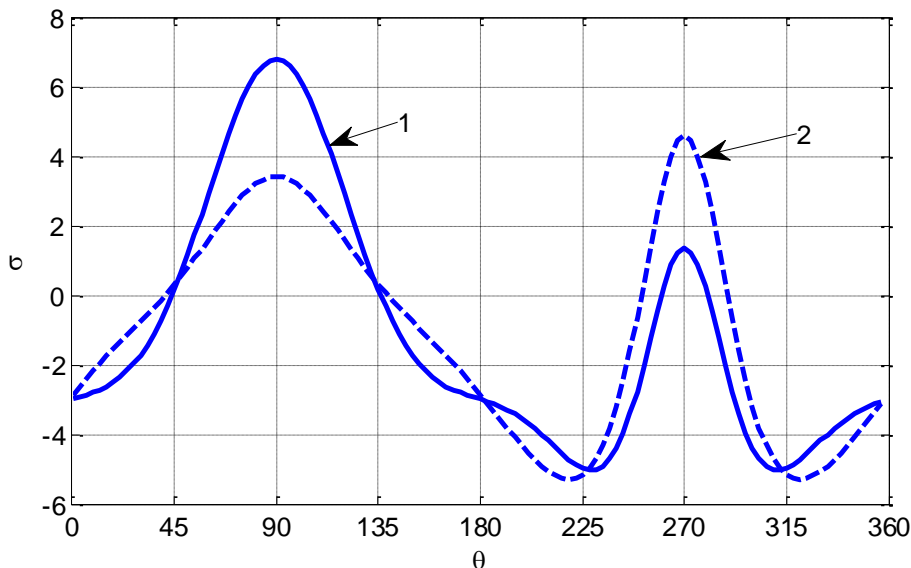


Рис.7. Напруження на межі отвору за триточкового згину

ВИСНОВКИ. Запропоновано алгоритм і програми для розрахунку напружень у смузі із отворами за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь. Досліджено напруження у смузі із системою отворів кругової та прямокутної форми. Результати розрахунків зіставлено із даними, отриманими в літературі іншими методами.

1. *Божидарнік В.В., Максимович О.В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і отворами. – Луцьк, 2003. – 226 с.
2. *Гулик Б.И.* Действие касательных усилий на полосу с круговым отверстием // Прикладная механика. – 1975. – т. XI, № 2. – С. 126-129.
3. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
4. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин // К.: Наук. думка, 1968. – С. 888.
5. *Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
6. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук // К.: Наук. думка, 1981. – С. 324.
7. *Саврук М.П., Максимович Я.В.* Побудова розв'язку типу Гріна задачі теорії пружності для смуги // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – 35, № 6. – С. 17-21.