

УДК 515.2

Конопацький Є.В. асистент

Донбаська національна академія будівництва і архітектури, м. Макіївка, Україна

ПОВЕРХНЯ ТРЬОХ НАПРЯМНИХ З АФІННО-ВІДПОВІДНИМИ ПЕРЕРІЗАМИ

В роботі розглянуто геометричний алгоритм конструювання поверхні трьох напрямних ліній з наперед заданими плоскими перерізами. Для представлення способу та можливостей такого конструювання поверхонь наведені приклади.

Ключові слова. Точкове рівняння, просторовий симплекс, напрямні лінії, відсік алгебраїчної поверхні, афінно-відповідні перерізи.

Постановка проблеми. Для практики конструювання поверхонь оболонок в будівництві, де в конструювання оболонки входить визначення не тільки форми конструктивних плоских ламаних, але й положення їх площин, запропонований роздільний метод конструювання положення площин і вузлових точок конструкції в цих площинах може зайняти гідне місце в ряді існуючих традиційних і інноваційних методів такого конструювання.

Точкова форма обрана тому, що вона дозволяє використання довільного локального тривимірного симплексу, який допомагає визначити поверхню незалежно від її положення в просторі, досить мати координати вершин симплексу. Також така форма легко реалізується за допомогою комп'ютера (наприклад, за допомогою програмного пакету *Maple*).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ця стаття продовження роботи автора над темою дисертаційної роботи, яка вже представлена в роботах [1-3].

Формулювання цілей статті. Отримати загальне рівняння поверхні трьох напрямних ліній з афінно-відповідними перерізами в симплексі $DABC$. Отримати рівняння поверхні трьох напрямних ліній з афінно-відповідними перерізами в декартовому симплексі $OE_1E_2E_3$. Навести приклад формування відсіку поверхні трьох напрямних ліній з афінно-відповідними перерізами.

Основна частина. Нехай задано просторовий симплекс $DABC$ (рис. 1). В симплексі $DABC$ задано три напрямні лінії – дуги кривих AA' , DB та CC' . Локальний симплекс $N_A N_B N_C$ рухається по трьом напрямним лініям. Відповідно точка N_A рухається по дузі AA' , точка N_B по дузі DB і точка N_C по дузі CC' . Задамо в рухомому симплексі $N_A N_B N_C$ криву або дугу кривої, то отримаємо поверхню, яка визначається трьома напрямними лініями, але має наперед задані плоскі афінно-відповідні перерізи.

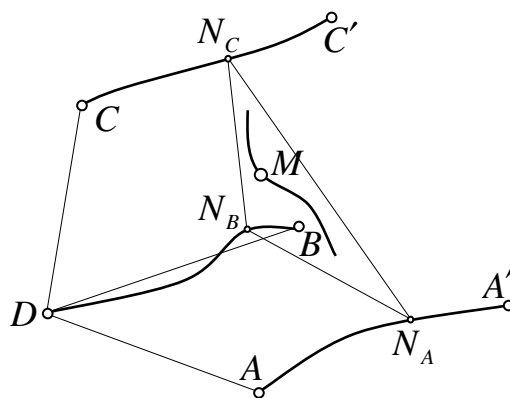


Рис. 1. Схема конструювання відсіку поверхні трьох напрямних афінно-відповідних перерізів

Розглянемо геометричну схему конструювання відсіку поверхні трьох напрямних ліній з наперед заданими видами перерізів (рис. 1). Коли симплекс $N_A N_B N_C$ рухається по трьом напрямним лініям, він утворює множину плоских афінно-відповідних перерізів. Якщо в симплексі $N_A N_B N_C$ задати криву лінію або дугу кривої, то отримуємо відсік поверхні. Таким чином, симплекс $N_A N_B N_C$ є перерізом цієї поверхні. Криву або дугу кривої, що визначає форму перерізу будемо називати твірною поверхні.

Нехай точки A', C' доповнюють симплекс $DABC$ до призми, тоді $AA'BD$ і $BCC'D$ є паралелограмами. Виходячи з [4], можна записати наступні залежності:

$$A' = A + B - D, \quad C' = B + C - D. \quad (1)$$

Задамо напрямні лінії для конструювання площин перерізів, як дуги кривих ліній, що визначаються за допомогою функціональної залежності:

$$\begin{aligned} N_C &= (C' - C) \frac{f(v) - f(0)}{f(1) - f(0)} + C = (B - D) \frac{f(v) - f(0)}{f(1) - f(0)} + C, \\ N_A &= (A' - A) \frac{\phi(v) - \phi(0)}{\phi(1) - \phi(0)} + A = (B - D) \frac{\phi(v) - \phi(0)}{\phi(1) - \phi(0)} + A, \\ N_B &= (B - D) \frac{\varphi(v) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} + D, \end{aligned} \quad (2)$$

де $f = f(v)$, $\phi = \phi(v)$, $\varphi = \varphi(v)$ - довільні функції, причому $0 \leq v \leq 1$.

В площині $N(N_A, N_B, N_C)$, як у симплексі, задамо твірну поверхні, за допомогою наступного точкового рівняння:

$$M = (N_A - N_C)p(u) + (N_B - N_C)q(u) + N_C. \quad (3)$$

Зробивши необхідні підстановки, після перетворень, одержимо загальне точкове рівняння поверхні трьох напрямних ліній в симплексі $DABC$:

$$\begin{aligned} M &= (A - D)p(u) + (B - D) \left[\frac{\phi(v) - \phi(0)}{\phi(1) - \phi(0)} p(u) + \frac{\varphi(v) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} q(u) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(v) - f(0)}{f(1) - f(0)} (1 - p(u) - q(u)) \right] + (C - D)[1 - p(u) - q(u)] + D \end{aligned} \quad (4)$$

де $0 \leq v \leq 1$ і $0 \leq u \leq 1$.

В параметричному вигляді рівняння (4) матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_M = (x_A - x_D)p(u) + (x_B - x_D) \left[\frac{\phi(v) - \phi(0)}{\phi(1) - \phi(0)} p(u) + \frac{\varphi(v) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} q(u) + \right. \\ \quad \left. + \frac{f(v) - f(0)}{f(1) - f(0)} (1 - p(u) - q(u)) \right] + (x_C - x_D)[1 - p(u) - q(u)] + x_D \\ y_M = (y_A - y_D)p(u) + (y_B - y_D) \left[\frac{\phi(v) - \phi(0)}{\phi(1) - \phi(0)} p(u) + \frac{\varphi(v) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} q(u) + \right. \\ \quad \left. + \frac{f(v) - f(0)}{f(1) - f(0)} (1 - p(u) - q(u)) \right] + (y_C - y_D)[1 - p(u) - q(u)] + y_D \\ z_M = (z_A - z_D)p(u) + (z_B - z_D) \left[\frac{\phi(v) - \phi(0)}{\phi(1) - \phi(0)} p(u) + \frac{\varphi(v) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} q(u) + \right. \\ \quad \left. + \frac{f(v) - f(0)}{f(1) - f(0)} (1 - p(u) - q(u)) \right] + (z_C - z_D)[1 - p(u) - q(u)] + z_D \end{cases} \quad (5)$$

Проаналізуємо отримане рівняння. Довільні функції $f = f(v)$, $\phi = \phi(v)$, $\varphi = \varphi(v)$ визначають три напрямні лінії, по яким рухається симплекс $N_A N_B N_C$, а функції $p(u)$ і $q(u)$ визначають форму перерізу $N(N_A, N_B, N_C)$. Причому швидкість руху симплексу $N_A N_B N_C$ визначається вибором функцій $f = f(v)$, $\phi = \phi(v)$, $\varphi = \varphi(v)$ на кожній лінії окремо.

Якщо замість загального симплексу $DABC$ взяти декартовий симплекс $OE_1E_2E_3$ з початком координат в точці O , то рівняння (5) значно спрощується. Тому перейдемо до декартового симплексу $OE_1E_2E_3$:

$$M = (E_1 - O)p(u) + (E_2 - O) \left[\frac{\phi(v) - \phi(0)}{\phi(1) - \phi(0)} p(u) + \frac{\varphi(v) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} q(u) + \frac{f(v) - f(0)}{f(1) - f(0)} (1 - p(u) - q(u)) \right] + (E_3 - O)[1 - p(u) - q(u)] + O \quad (6)$$

Запишемо рівняння (6) в параметричному вигляді:

$$\begin{aligned} x_M &= p(u) \\ y_M &= \frac{\phi(v) - \phi(0)}{\phi(1) - \phi(0)} p(u) + \frac{\varphi(v) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} q(u) + \frac{f(v) - f(0)}{f(1) - f(0)} (1 - p(u) - q(u)) \\ z_M &= 1 - p(u) - q(u) \end{aligned} \quad (7)$$

Приклад формування відсіку поверхні трьох напрямних з афінно-відповідними перерізами

1. Спочатку задамо функції, які визначають напрямні лінії. Нехай функція $\phi(v) = v^3$, тоді

$$\text{функціонал } \frac{\phi(v) - \phi(0)}{\phi(1) - \phi(0)} = v^3.$$

2. Нехай функція $\varphi(v) = v^3 + v$, тоді функціонал $\frac{\varphi(v) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} = \frac{v^3 + v}{2}$.

3. Нехай функція $f(v) = v^2 - 1$, тоді функціонал $\frac{f(v) - f(0)}{f(1) - f(0)} = v^2$.

4. Підставимо отримані залежності напрямних функцій в рівняння (7) і отримаємо параметричне рівняння відсіку поверхні, яке матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} x_M &= p(u) \\ y_M &= v^3 p(u) + \frac{v^3 + v}{2} q(u) + v^2 (1 - p(u) - q(u)) \\ z_M &= 1 - p(u) - q(u) \end{aligned} \quad (8)$$

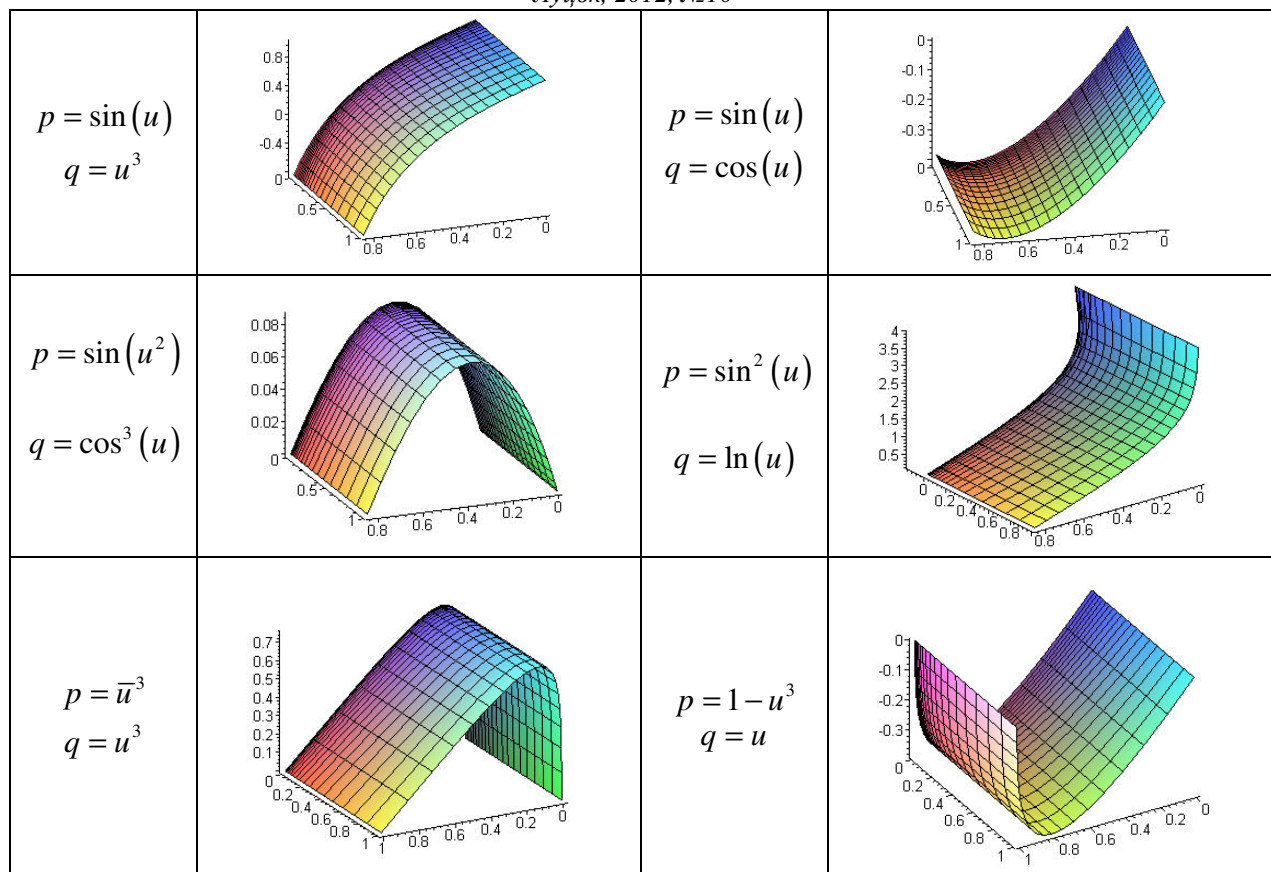
Тепер змінюючи функції $p(u)$ і $q(u)$, тобто змінюючи твірну поверхні, можна отримати різні відсіки поверхні, які утворюються за допомогою трьох незалежних функцій і будуть мати наперед задані плоскі перерізи. Skorистаємось програмним пакетом *Maple* для побудови і дослідження отриманого відсіку поверхні в залежності від виду функцій $p(u)$ і $q(u)$, які визначають характер перерізу відсіку поверхні площиною $N(N_A, N_B, N_C)$. Результати досліджень представлено в таблиці 1.

У даному випадку було зафіксовано три напрямні лінії, а змінювався лише характер перерізу. Такий спосіб часто використовують для дослідження багатопараметричних функцій. Можна навпаки, зафіксувати функції $p(u)$ і $q(u)$, що визначають характер перерізу відсіку поверхні площиною $N(N_A, N_B, N_C)$, а змінювати функції, які визначають лінії опорних контурів.

Таблиця 1

Приклади формування відсіків поверхонь трьох напрямних ліній.

Значення функцій	Графічна інтерпретація відсіку поверхні	Значення функцій	Графічна інтерпретація відсіку поверхні
------------------	---	------------------	---



Висновки. Отримано загальне рівняння поверхні трьох напрямних ліній з афінно-відповідними перерізами в симплексі $DABC$. Отримано рівняння поверхні трьох напрямних ліній з афінно-відповідними перерізами в декартовому симплексі $OE_1E_2E_3$. Наведено приклади формування відсіків поверхонь трьох напрямних ліній з афінно-відповідними перерізами в залежності від виду перерізу. Реалізовано алгоритм конструювання поверхні за допомогою програмного пакету *Maple*.

1. Конопацький Є.В. Теоретичні основи точкового визначення поверхонь зі змінним симплексом. / Конопацький Є.В., Поліщук В.І.; Наукові нотатки. Міжвузівський збірник. Випуск 22. Частина 2. – Луцьк: ЛДТУ. – 2008. – С.276-281.

2. Конопацький Є.В. Відсік поверхні заданих опорних контурів. / Конопацький Є.В.; Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т.42. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – С.103-107.

3. Метод подвижного симплекса при конструюванні 2-поверхностей многомерного пространства / [Балюба І.Г., Горягин Б.Ф., Полищук В.И., Малютина Т.П., Давыденко И.П., Конопацький Є.В., Кокарева Я.А.]. Моделирование та інформаційні технології / Збірник наукових праць. Спец.вип. Матеріали Міжнародної наукової конференції «Моделирование – 2010», 12-14 травня 2010 р., м. Київ, Т.1. – С.310-318. Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України.

4. Балюба І.Г. Основи математичного апарату точкового числення. / Балюба І.Г., Поліщук В.І., Малютіна Т.П.; Праці ТДАТУ. Вип.4. Прикладна геометрія та інженерна графіка, т.29. – Мелітополь, 2005. – С.22-30.