УДК 536.24

В. І. Гавриш
Національний університет "Львівська політехніка"

Моделювання температурних режимів у мікроелектронних пристроях із наскрізними чужорідними включеннями

За узагальненими функціями отримано рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для ізотропного кусково-однорідного шару з наскрізним чужорідним включенням циліндричної форми, що виділяє тепло. Здійснивши кусково-лінійну апроксимацію температури на межовій поверхні включення та застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля, побудовано аналітичний розв'язок межової задачі теплопровідності.

Ключові слова: ізотропний кусково-однорідний шар, теплопровідність, наскрізне чужорідне включення, ідеальний тепловий контакт, надлишкова температура.

У сучасній оптичній техніці важливими і критичними елементами, які визначають ефективність і надійність апаратури, є селективні оптичні фільтри, що базуються на багатошарових нерівнотовщинних структурах. Але з часом вимоги до цих елементів зростають − йдеться про забезпечення максимальної селективності й експлуатаційної стійкості, відтак підвищення якості, мінітюризацію, здешевлення приладів. У зв′язку з цим розробляються нові структури інтерференційних фільтрів, а також алгоритми розрахунку їхніх структурних параметрів. Важливим у цих розробках є встановлення зв′язку між параметрами структурних елементів фільтрів та їхніми оптичними характеристиками. Одним із основних структурних параметрів є температура, достовірне визначення якої розрахунковим шляхом вимагає розв′язування крайових задач теплопровідності, оскільки експериментальні дослідження практично є неможливими.

Деякі дослідження температурних режимів для вузлів та окремих елементів мікроелектронних пристроїв виконано раніше [1-12]. Нижче сформульовано крайову осесиметричну задачу теплопровідності, побудовано аналітичний розв'язок для структур інтерференційних фільтрів, які описуються ізотропним в сенсі теплофізичних характеристик кусково-однорідним шаром із наскрізним чужорідним включенням циліндричної форми, що виділяє тепло. Наведено [13,14] загальні рівняння теплопровідності для неоднорідних тіл.

Формулювання задачі. Розглянемо ізотропний в сенсі теплофізичних характеристик кусково-однорідний шар, який складається з n однорідних елементів, що відрізняються геометричними та теплофізичними параметрами, віднесений до циліндричної системи координат $(Orj\,z)$ із початком на одному з його країв та містить наскрізне чужорідне включення радіусом R. На поверхнях спряження

$$S_R = \{(R, j\,, z): 0 \le j \le 2p\}, \;\; S_i = \{(r, j\,, z_i): r > R,\; 0 \le j \le 2p\,,\; i = \overline{1, n-1}\},$$

де z_i − товщина і-го елемента шару, відбувається ідеальний тепловий контакт.

В області

$$\Omega_0 = \{(r, j\,, z): r \le R, 0 \le j \le 2p\,,\; 0 \le z \le z_n\},$$

що займає включення, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла потужністю $q_0 = const.$ На межових поверхнях шару

$\Gamma_0 = \{(r, j\,, 0): r < \infty, \quad 0 \le j \le 2p\}$, $\Gamma_n = \{(r, j\,, z_n): r < \infty, \quad 0 \le j \le 2p\}$ задано граничні умови другого роду (рис.1).

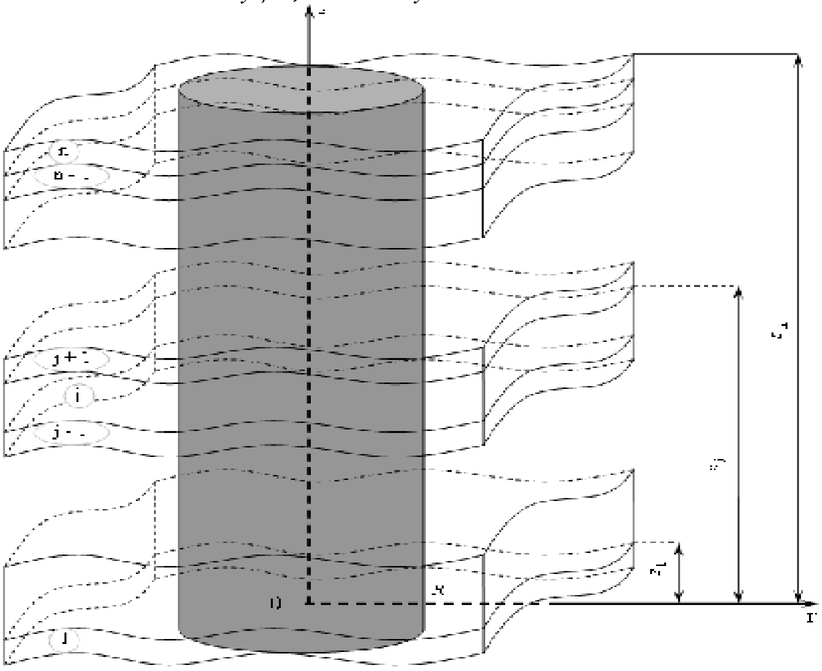

Рис.1. Ізотропний кусково-однорідний шар з чужорідним наскрізним циліндричним включенням, що виділяє тепло

Побудова вихідного рівняння теплопровідності. Розподіл осесиметричного стаціонарного температурного поля $t(r,z)$ в розглядуваній системі можна отримати, розв'язавши рівняння теплопровідності [13,14]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot l(r,z)\frac{\partial q}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[l(r,z)\frac{\partial q}{\partial z}\right]=-q_0\cdot S_-(R-r) \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$q\big|_{r\to\infty}=0,\ \left.\frac{\partial q}{\partial r}\right|_{r\to\infty}=\left.\frac{\partial q}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial q}{\partial z}\right|_{z=z_n}=0, \tag{2}$$

де

$$l(r,z)=\sum_{i=1}^{n}[l_i+(l_0-l_i)S_-(R-r)]\cdot N(z,z_{i-1})- \tag{3}$$

коефіцієнт теплопровідності кусково-однорідного шару; $l_i,\, l_0-$ коефіцієнти теплопровідності матеріалів i-го елемента шару та включення відповідно; $q=t-t_c-$надлишкова температура; $z_0=0$; $N(z,z_{i-1})=S_+(z-z_{i-1})-S_+(z-z_i)$;

$$S_\pm(z)=\begin{cases}1, & z>0,\\ 0{,}5\mp 0{,}5, & z=0,\\ 0, & z<0.\end{cases}\ -\text{асиметричні одиничні функції [15].}$$

Введемо функцію [5]

$$T=l(r,z)\cdot q \tag{4}$$

і продиференціюємо її за змінними r та z, враховуючи опис коефіцієнта теплопровідності $l(r,z)$ (3). У результаті отримаємо:

$$l(r,z)\frac{\partial q}{\partial r}=\frac{\partial T}{\partial r}+q\big|_{r=R}\cdot d_+(r-R)\cdot\sum_{i=1}^{n}(l_0-l_i)\cdot N(z,z_{i-1});\; l(r,z)\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial T}{\partial z}-\sum_{i=1}^{n-1}(l_{i+1}-l_i)\cdot q\big|_{z=z_i}\cdot d_+(z-z_i). \quad (5)$$

Тут $d_\pm(z)=\dfrac{dS_\pm(z)}{dz}$ – асиметричні дельта-функції Дірака [15].

Підставивши вирази (5) у співвідношення (1), приходимо до диференціального рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами

$$\Delta T+\frac{R}{r}q\big|_{r=R}\cdot d'_+(r-R)\sum_{i=1}^{n}(l_0-l_i)\cdot N(z,z_{i-1})-\sum_{i=1}^{n-1}(l_{i+1}-l_i)\cdot q\big|_{z=z_i}\cdot d'_+(z-z_i)=-q_0S_-(R-r), \quad (6)$$

де $\Delta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r})+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Побудова аналітичного розв'язку. Апроксимуємо функцію $q(R,z)$ у вигляді

$$q(R,z)=q_1^{(iR)}+\sum_{k=1}^{m-1}(q_{k+1}^{(iR)}-q_k^{(iR)})S_-(z-z_k^{(i)*}), \quad (7)$$

де $z_k^{(i)*}\in\,]0;z_i[$; $z_1^{(i)*}\le z_2^{(i)*}\le\ldots\le z_{m-1}^{(i)*}$; m – кількість розбиттів інтервалу $]0;z_i[$; $q_k^{(iR)}(k=\overline{1,m};\; i=\overline{1,n})$ – невідомі апроксимаційні значення температури.

Підставивши вирази (7) у рівняння (6), отримаємо:

$$\Delta T-\sum_{i=1}^{n-1}(l_{i+1}-l_i)\cdot q\big|_{z=z_i}\cdot d'_+(z-z_i)=-\frac{R}{r}d'_+(r-R)\sum_{i=1}^{n}(l_0-l_i)\cdot[q_1^{(iR)}N(z,z_{i-1})+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}(q_{k+1}^{(iR)}-q_k^{(iR)})N(z,z_k^{(i)*},z_i)]-q_0S_-(R-r). \quad (8)$$

Тут $$N(z,z_k^{(i)*},z_i)=S_-(z-z_k^{(i)*})-S_+(z-z_i).$$

Застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля за координатою r до рівняння (8) та крайових умов (2) із урахуванням співвідношення (4), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2\bar{T}}{dz^2}-x^2\bar{T}=\sum_{i=1}^{n-1}(l_{i+1}-l_i)\cdot\bar{q}\big|_{z=z_i}\cdot d'_+(z-z_i)-RJ_1(Rx)\cdot\{x\sum_{i=1}^{n}(l_0-l_i)\cdot[q_1^{(iR)}N(z,z_{i-1})+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}(q_{k+1}^{(iR)}-q_k^{(iR)})N(z,z_k^{(i)*},z_i)]+\frac{q_0}{x}\} \quad (9)$$

і крайових умов

$$\left.\frac{d\bar{T}}{dz}\right|_{z=0}=\left.\frac{d\bar{T}}{dz}\right|_{z=z_n}=0, \quad (10)$$

де $\bar{T}=\int_0^\infty r\cdot J_0(rx)Tdr$ – трансформанта функції $T(r,z)$; x – параметр інтегрального перетворення Ганкеля; $J_n(z)$ – функція Бесселя першого роду n-го порядку.

Розв'язавши рівняння (9), одержимо

$$\bar{T}=c_1e^{xz}+c_2e^{-xz}+\sum_{i=1}^{n-1}(l_{i+1}-l_i)\cdot\bar{q}(x,z_i)\cdot chx(z-z_i)\cdot S_+(z-z_i)+\frac{R}{x}J_1(Rx)\{\sum_{i=1}^{n}(l_0-$$
$$-l_i)[q_1^{(iR)}(chx(z-z_i)\cdot S_+(z-z_i)-chx(z-z_{i-1})\cdot S_+(z-z_{i-1})+N(z,z_{i-1})+\sum_{k=1}^{m-1}(q_{k+1}^{(iR)}-$$
$$-q_k^{(iR)})\cdot(chx(z-z_i)\cdot S_+(z-z_i)-chx(z-z_k^{(i)*})\cdot S_-(z-z_k^{(i)*})+N(z,z_k^{(i)*},z_i))]+\frac{q_0}{x^2}\}. \quad (11)$$

Тут c_1,c_2 – сталі інтегрування.

Величини $\bar{q}(x, z_i)\ (i = \overline{1, n-1})$ визначаємо, розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$l_l \cdot \bar{q}(x, z_l) = c_1 e^{x z_l} + c_2 e^{-x z_l} + \sum_{i=1}^{n-1} (l_{i+1} - l_i) \cdot \bar{q}(x, z_i) \cdot chx(z_l - z_i) \cdot S_+(z_l - z_i) +$$

$$+ \frac{R}{x} J_1(Rx)\{\sum_{i=1}^{n} (l_0 - l_i)[q_1^{(iR)}(chx(z_l - z_i) \cdot S_+(z_l - z_i) -$$

$$- chx(z_l - z_{i-1}) \cdot S_+(z_l - z_{i-1}) + N(z_l, z_{i-1})) + \sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - q_k^{(iR)}) \cdot (chx(z_l - z_i) \cdot S_+(z_l - z_i) -$$

$$- chx(z_l - z_k^{(i)*}) \cdot S_-(z_l - z_k^{(i)*}) + N(z_l, z_k^{(i)*}, z_i))] + \frac{q_0}{x^2}\}$$

у вигляді

$$\bar{q}(x, z_l) = c_1 \cdot F_l^+(x) + c_2 \cdot F_l^-(x) + \frac{R}{x} J_1(Rx) \cdot \{\sum_{i=1}^{n} (l_0 - l_i) \cdot [q_1^{(iR)} j_l^{(i)}(x) +$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - q_k^{(iR)}) y_{lk}^{(i)}(x)] + \frac{q_0}{x^2} \Phi_l(x)\}, \quad l = \overline{1, n-1}, \tag{12}$$

де

$$F_1^{\pm}(x) = \frac{e^{\pm x z_1}}{l_1}; \qquad F_j^{\pm}(x) = \frac{1}{l_j}[e^{\pm x z_j} + \sum_{s=1}^{j-1} (l_{s+1} - l_s) \cdot chx(z_j - z_s) \cdot F_s^{\pm}(x)];$$

$$j_1^{(i)}(x) = \frac{1 - chx\, z_1}{l_1}; \quad j_j^{(i)}(x) = \frac{1}{l_j}[chx(z_j - z_i) - chx(z_j - z_{i-1}) + \sum_{s=1}^{j-1} (l_{s+1} - l_s) \cdot chx(z_j - z_s) \cdot j_s^{(i)}(x)];$$

$$y_{1k}^{(i)}(x) = \frac{chx(z_1 - z_i) - chx(z_1 - z_k^{(i)*})}{l_1};$$

$$y_{jk}^{(i)}(x) = \frac{1}{l_j}[chx(z_j - z_i) - chx(z_j - z_k^{(i)*}) + \sum_{s=1}^{j-1} (l_{s+1} - l_s) \cdot chx(z_j - z_s) \cdot y_{sk}^{(i)}(x)];$$

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{l_1}; \qquad \Phi_j(x) = \frac{1}{l_j} \sum_{s=1}^{j-1} (l_{s+1} - l_s) \cdot chx(z_j - z_s) \cdot \Phi_s(x), \ j = \overline{2, n-1}.$$

Із крайових умов (10) знаходимо сталі інтегрування c_1 і c_2:

$$c_1 = c_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_*}. \tag{13}$$

Тут $\Delta_* = 2shx\, z_n + \sum_{i=1}^{n-1} (l_{i+1} - l_i)\ F_i(x)\, shx(z_n - z_i);\ F_1 = \frac{2chx\, z_1}{l_1};\quad F_j^{\pm}(x) = \frac{1}{l_j}[2chx\, z_j +$

$$+ \sum_{s=1}^{j-1} (l_{s+1} - l_s) \cdot chx(z_j - z_s) \cdot F_s(x)],\ j = \overline{2, n-1};\ \Delta_1 = \frac{R}{x} J_1(Rx) \cdot \Delta_1^*;$$

$$\Delta_1^* = \sum_{i=1}^{n} (l_0 - l_i)[q_1^{(iR)}(shx(z_n - z_i) - shx(z_n - z_{i-1}) + \sum_{j=1}^{n-1} (l_{j+1} - l_j) j_j^{(i)}(x) shx(z_n - z_j)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - q_k^{(iR)})(shx(z_n - z_i) - shx(z_n - z_k^{(i)*}) + \sum_{j=1}^{n-1} (l_{j+1} - l_j) y_{jk}^{(i)}(x) shx(z_n - z_j))] +$$

$$+ \frac{q_0}{x^2} \sum_{i=1}^{n-1} (l_{i+1} - l_i) \Phi_i(x) shx(z_n - z_i).$$

Застосувавши до виразу (11) обернене інтегральне перетворення Ганкеля, врахувавши співвідношення (12), (13), отримаємо:

$$T = R\int_0^{\infty} J_0(rx)J_1(Rx)\cdot\Bigg\{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_0-\lambda_i)\cdot[q_1^{(iR)}\cdot(chx(z-z_i)S_+(z-z_i)-chx(z-z_{i-1})S_+(z-z_{i-1})+$$

$$+N(z,z_{i-1})+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\cdot j_j^{(i)}(x)chx(z-z_j)S_+(z-z_j)-\frac{2chx\,z}{\Delta_*}\cdot(shx(z_n-z_i)-$$

$$-shx(z_n-z_{i-1})+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\cdot j_j^{(i)}(x)shx(z_n-z_j)))+\sum_{k=1}^{m-1}(q_{k+1}^{(iR)}-q_k^{(iR)})\cdot(chx(z-z_i)S_+(z-z_i)- \qquad (14)$$

$$-chx(z-z_k^{(i)^*})S_+(z-z_k^{(i)^*})+N(z,z_k^{(i)^*},z_{i-1})+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\cdot\Psi_{jk}^{(i)}(x)chx(z-z_j)S_+(z-z_j)-$$

$$-\frac{2chx\,z}{\Delta_*}\cdot(shx(z_n-z_i)-shx(z_n-z_k^{(i)^*})+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\cdot\Psi_{jk}^{(i)}(x)shx(z_n-z_j)))]+\frac{q_0}{x^2}\cdot[1+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\cdot\Phi_j(x)chx\,(z-z_j)S_+(z-z_j)-\frac{2chx\,z}{\Delta_*}\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\cdot\Phi_j(x)shx\,(z_n-z_j)]\Bigg\}dx.$$

Невідомі апроксимаційні значення $q_k^{(iR)}$ $(k=\overline{1,m};i=\overline{1,n})$ температури знаходимо, розв'язавши систему $n\cdot m$ лінійних алгебраїчних рівнянь, отриману з виразу (14).

Отже, шукане температурне поле в кусково-однорідному шарі із наскрізним включенням циліндричної форми описує формула (14). Зі співвідношення (14) дістаємо значення температури в довільній точці кусково-однорідного шару (в його однорідних елементах, в області включення та на поверхнях спряження однорідних елементів).

Аналіз числових результатів. Як частковий приклад, розглянемо шар із наскрізним чужорідним включенням, для якого виконано числовий аналіз безрозмірної надлишкової температури $T^*=T/(q_0R^2)$ для таких вихідних даних: матеріал шару – кераміка ВК94–I $\left(\lambda_1=13,4\ вт/(м\cdot C^0)\right)$, матеріал включення – срібло $\left(\lambda_0=419\ вт/(м\cdot C^0)\right)$, $n=5$ – кількість розбиттів інтервалу $]0;Z_1[$; $Z_1=z_1/R=1$.

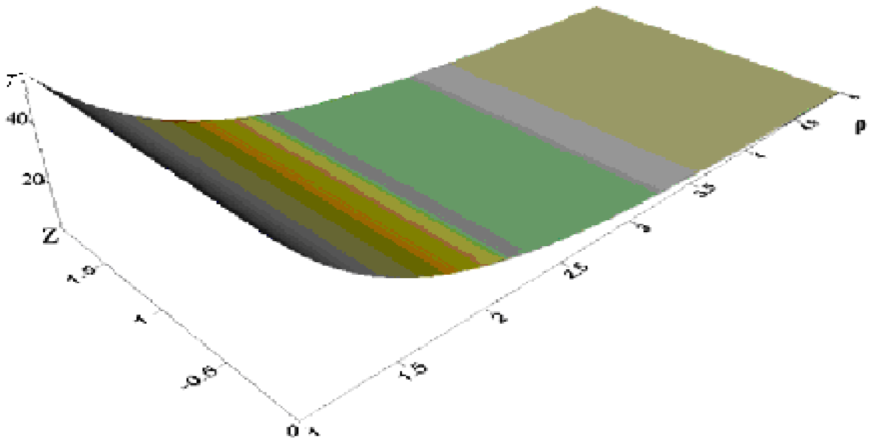

Рис.2. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірних координат r та Z

Побудовано (рис.2) залежність температури T^* від безрозмірних радіальної $r=r/R$ та аксіальної $Z=z/R$ координат. Як бачимо, максимальна температура досягається в області дії рівномірно розподілених по об'єму циліндричного наскрізного чужорідного включення внутрішніх джерел тепла.

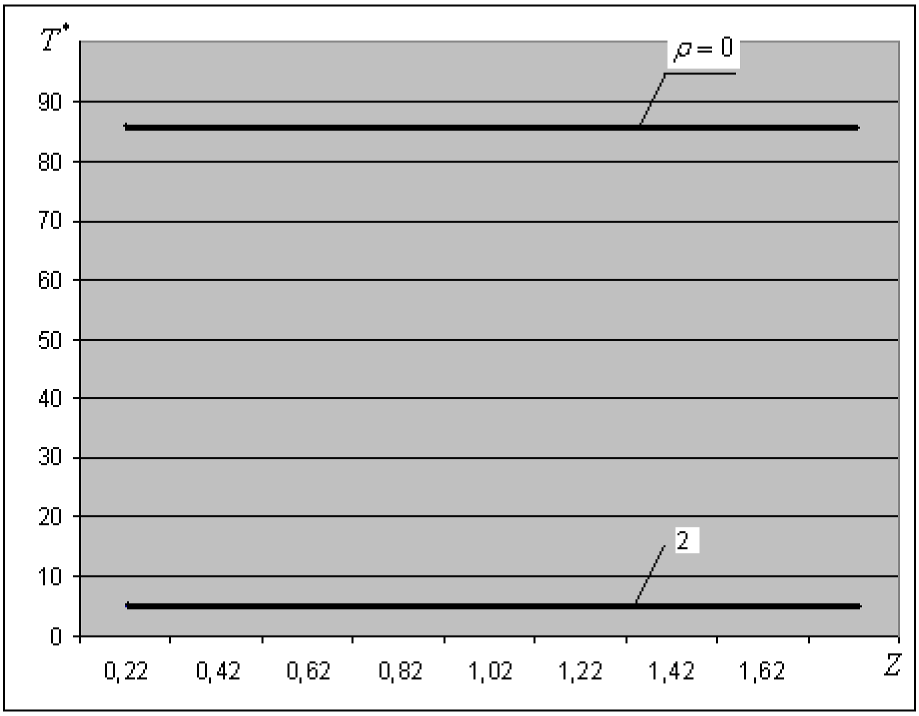

Рис.3. Залежність безрозмірної температури T^* *від безрозмірної координати* Z

Рис.3 ілюструє зміну температури T^* залежно від аксіальної координати Z для різних значень радіальної координати r. Як видно із графіків температура змінюється лінійно і практично є сталою для наведених значень r, причому значення її значно відрізняються в області включення ($r = 0$) та в шарі ($r = 2$), що відповідає розглядуваній фізичній моделі.

Висновки. Із використанням узагальнених функцій та кусково-лінійної апроксимації температури $q(R, z)$ на межовій поверхні S_R включення виразом (7) побудовано рівняння теплопровідності (8) із розривними та сингулярними коефіцієнтами. За допомогою інтегрального перетворення Ганкеля знайдено аналітичний розв'язок у вигляді (14) крайової задачі теплопровідності (1), (2), який дозволяє для довільної точки обчислювати значення температури на основі розроблених нових алгоритмів та створених програмних засобів і прогнозувати режими роботи окремих елементів і вузлів мікроелектронних пристроїв та ідентифікувати невідомі параметри, а також підвищити термостійкість, що збільшує їх термін експлуатації.

1. *В. Гавриш, Д. Федасюк.* Моделювання теплових режимів в термочутливому шарі з тепловиділяючим чужорідним включенням // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2009. – № 650. – С. 94–100.
2. *В. Гавриш, Д. Федасюк.* Моделювання теплових режимів в термочутливій кусково-однорідній смузі з внутрішніми джерелами тепла // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика. – Львів, 2009. – № 651. – С. 50–54.
3. *Барвінський А.Ф., Гавриш В.І.* Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла // Проблемы машиностроения. – 2009. – **12**, № 1. – С. 47–53.
4. *Гавриш В.І., Федасюк Д.В.* Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням // Промышленная теплотехника. – 2010. – **32**, № 5. – С. 18–25.
5. *Гавриш В.І., Федасюк Д.В., Косач А.І.* Гранична задача теплопровідності для шару з чужорідним циліндричним включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 5. – С. 115–120.
6. *Gavrysh V.I. Fedasyuk D.V.* Thermal simulation of heterogeneous structural components in microelectronic devices // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. – 2010. – **13.** – № 4. – P. 439–443.

7. *В. Гавриш.* Моделювання температурних режимів у термочутливому шарі з тепловиділяючим включенням паралелепіпедної форми малих розмірів // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2010. – № 672. – С. 104–109.

8. *В. Гавриш, Д. Федасюк.* Моделювання теплових режимів у термочутливому кусково-однорідному шарі з чужорідним тепловиділяючим включенням // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2010. – № 663. – С. 84–90.

9. *В. Гавриш, А. Косач.* Моделювання теплового стану в термочутливому елементі потужного світлодіода // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 694. – С. 254–259.

10. *В. Гавриш, А. Косач, Ю. Нога.* Моделювання температурних режимів у термочутливому вузлі мікроелектронних пристроїв // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 710.– С.79–84.

11. *Гаврыш В.И., Косач А.И.* Моделирование температурних режимов в элементах микроэлектронных устройств // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2011. № 1–2 (90). – С. 27–30.

12. *Гаврыш В.И., Косач А.И.* Моделирование температурных режимов в электронных устройствах кусочно-однородной структуры // Электронное моделирование. – 2011. – **33**, № 4. – С. 99–113.

13. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.

14. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наукова думка, 1992. – 280 с.

15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. – 720 с.