

УДК 536.24

В. І. Гавриш

Національний університет "Львівська політехніка"

Моделювання температурних режимів у мікроелектронних пристроях із наскрізними чужорідними включеннями

За узагальненими функціями отримано рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для ізотропного кусково-однорідного шару з наскрізним чужорідним включенням циліндричної форми, що виділяє тепло. Здійснивши кусково-лінійну апроксимацію температури на межовій поверхні включення та застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля, побудовано аналітичний розв'язок межової задачі теплопровідності.

Ключові слова: ізотропний кусково-однорідний шар, теплопровідність, наскрізне чужорідне включення, ідеальний тепловий контакт, надлишкова температура.

У сучасній оптичній техніці важливими і критичними елементами, які визначають ефективність і надійність апаратури, є селективні оптичні фільтри, що базуються на багатошарових нерівнотовщинних структурах. Але з часом вимоги до цих елементів зростають – йдеться про забезпечення максимальної селективності й експлуатаційної стійкості, відтак підвищення якості, мінітюризацію, здешевлення приладів. У зв'язку з цим розробляються нові структури інтерференційних фільтрів, а також алгоритми розрахунку їхніх структурних параметрів. Важливим у цих розробках є встановлення зв'язку між параметрами структурних елементів фільтрів та їхніми оптичними характеристиками. Одним із основних структурних параметрів є температура, достовірне визначення якої розрахунковим шляхом вимагає розв'язування крайових задач теплопровідності, оскільки експериментальні дослідження практично є неможливими.

Деякі дослідження температурних режимів для вузлів та окремих елементів мікроелектронних пристроїв виконано раніше [1-12]. Нижче сформульовано крайову осесиметричну задачу теплопровідності, побудовано аналітичний розв'язок для структур інтерференційних фільтрів, які описуються ізотропним в сенсі теплофізичних характеристик кусково-однорідним шаром із наскрізним чужорідним включенням циліндричної форми, що виділяє тепло. Наведено [13,14] загальні рівняння теплопровідності для неоднорідних тіл.

Формулювання задачі. Розглянемо ізотропний в сенсі теплофізичних характеристик кусково-однорідний шар, який складається з n однорідних елементів, що відрізняються геометричними та теплофізичними параметрами, віднесений до циліндричної системи координат $(Orjz)$ із початком на одному з його країв та містить наскрізне чужорідне включення радіусом R . На поверхнях спряження

$$S_R = \{(R, j, z) : 0 \leq j \leq 2p\}, S_i = \{(r, j, z_i) : r > R, 0 \leq j \leq 2p, i = \overline{1, n-1}\},$$

де z_i – товщина i -го елемента шару, відбувається ідеальний тепловий контакт.

В області

$$\Omega_0 = \{(r, j, z) : r \leq R, 0 \leq j \leq 2p, 0 \leq z \leq z_n\},$$

що займає включення, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла потужністю $q_0 = const$. На межових поверхнях шару

$$\Gamma_0 = \{(r, j, 0) : r < \infty, 0 \leq j \leq 2p\}, \Gamma_n = \{(r, j, z_n) : r < \infty, 0 \leq j \leq 2p\} \quad \text{задано}$$

граничні умови другого роду (рис.1).

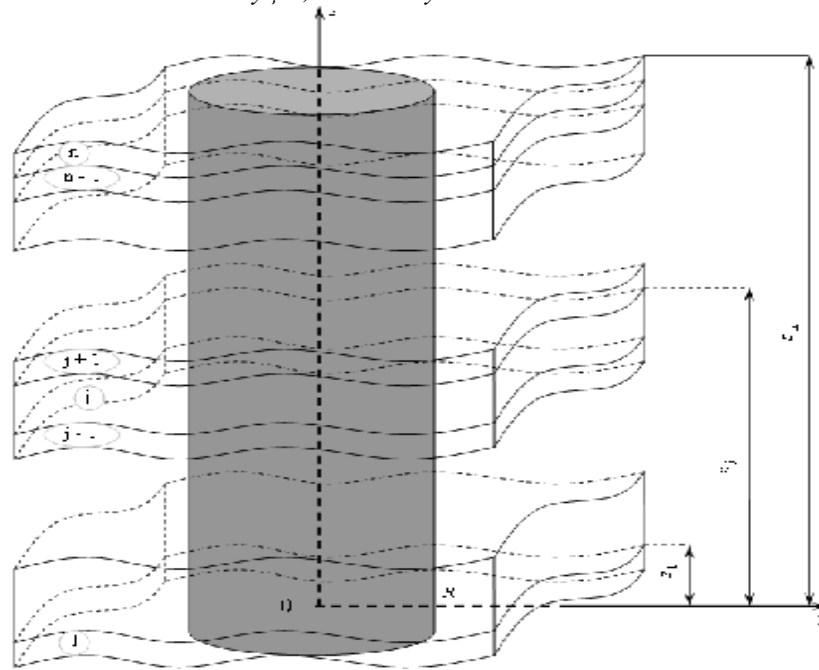


Рис.1. Ізотропний кусково-однорідний шар з чужорідним наскрізним циліндричним включенням, що виділяє тепло

Побудова вихідного рівняння теплопровідності. Розподіл осесиметричного стаціонарного температурного поля $t(r, z)$ в розглядуваній системі можна отримати, розв'язавши рівняння теплопровідності [13,14]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot I(r, z) \frac{\partial q}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[I(r, z) \frac{\partial q}{\partial z} \right] = -q_0 \cdot S_-(R-r) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$q|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=z_n} = 0, \quad (2)$$

де

$$I(r, z) = \sum_{i=1}^n [I_i + (I_0 - I_i) S_-(R-r)] \cdot N(z, z_{i-1}) - \quad (3)$$

коефіцієнт теплопровідності кусково-однорідного шару; I_i, I_0 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів i -го елемента шару та включення відповідно; $q = t - t_c$ – надлишкова температура; $z_0 = 0$; $N(z, z_{i-1}) = S_+(z - z_{i-1}) - S_+(z - z_i)$;

$$S_{\pm}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0,5 \text{ м} 0,5, & z = 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \text{ – асиметричні одиничні функції [15].}$$

Введемо функцію [5]

$$T = I(r, z) \cdot q \quad (4)$$

і продиференціюємо її за змінними r та z , враховуючи опис коефіцієнта теплопровідності $I(r, z)$ (3). У результаті отримуємо:

$$I(r, z) \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} + q \Big|_{r=R} \cdot d_+(r-R) \cdot \sum_{i=1}^n (I_0 - I_i) \cdot N(z, z_{i-1}); \quad I(r, z) \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n-1} (I_{i+1} - I_i) \cdot q \Big|_{z=z_i} \cdot d_+(z-z_i). \quad (5)$$

Тут $d_{\pm}(z) = \frac{dS_{\pm}(z)}{dz}$ – асиметричні дельта-функції Дірака [15].

Підставивши вирази (5) у співвідношення (1), приходимо до диференціального рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами

$$\Delta T + \frac{R}{r} q \Big|_{r=R} \cdot d'_+(r-R) \sum_{i=1}^n (I_0 - I_i) \cdot N(z, z_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n-1} (I_{i+1} - I_i) \cdot q \Big|_{z=z_i} \cdot d'_+(z-z_i) = -q_0 S_-(R-r), \quad (6)$$

де $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Побудова аналітичного розв'язку. Апроксимуємо функцію $q(R, z)$ у вигляді

$$q(R, z) = q_1^{(iR)} + \sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - q_k^{(iR)}) S_-(z - z_k^{(i)*}), \quad (7)$$

де $z_k^{(i)*} \in]0; z_i[$; $z_1^{(i)*} \leq z_2^{(i)*} \leq \dots \leq z_{m-1}^{(i)*}$; m – кількість розбиттів інтервалу $]0; z_i[$; $q_k^{(iR)}$ ($k = \overline{1, m}$; $i = \overline{1, n}$) – невідомі апроксимаційні значення температури.

Підставивши вирази (7) у рівняння (6), отримуємо:

$$\Delta T - \sum_{i=1}^{n-1} (I_{i+1} - I_i) \cdot q \Big|_{z=z_i} \cdot d'_+(z-z_i) = -\frac{R}{r} d'_+(r-R) \sum_{i=1}^n (I_0 - I_i) \cdot [q_1^{(iR)} N(z, z_{i-1}) + \sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - q_k^{(iR)}) N(z, z_k^{(i)*}, z_i)] - q_0 S_-(R-r). \quad (8)$$

Тут $N(z, z_k^{(i)*}, z_i) = S_-(z - z_k^{(i)*}) - S_+(z - z_i)$.

Застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля за координатою r до рівняння (8) та крайових умов (2) із урахуванням співвідношення (4), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - x^2 \bar{T} = \sum_{i=1}^{n-1} (I_{i+1} - I_i) \cdot \bar{q} \Big|_{z=z_i} \cdot d'_+(z-z_i) - R J_1(Rx) \cdot \{x \sum_{i=1}^n (I_0 - I_i) \cdot [q_1^{(iR)} N(z, z_{i-1}) + \sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - q_k^{(iR)}) N(z, z_k^{(i)*}, z_i)] + \frac{q_0}{x}\} \quad (9)$$

і крайових умов

$$\frac{d\bar{T}}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{d\bar{T}}{dz} \Big|_{z=z_n} = 0, \quad (10)$$

де $\bar{T} = \int_0^{\infty} r \cdot J_0(rx) T dr$ – трансформанта функції $T(r, z)$; x – параметр інтегрального

перетворення Ганкеля; $J_n(z)$ – функція Бесселя першого роду n -го порядку.

Розв'язавши рівняння (9), одержимо

$$\begin{aligned} \bar{T} = & c_1 e^{xz} + c_2 e^{-xz} + \sum_{i=1}^{n-1} (I_{i+1} - I_i) \cdot \bar{q}(x, z_i) \cdot chx(z-z_i) \cdot S_+(z-z_i) + \frac{R}{x} J_1(Rx) \{ \sum_{i=1}^n (I_0 - \\ & - I_i) [q_1^{(iR)} (chx(z-z_i) \cdot S_+(z-z_i) - chx(z-z_{i-1}) \cdot S_+(z-z_{i-1}) + N(z, z_{i-1}) + \sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - \\ & - q_k^{(iR)}) \cdot (chx(z-z_i) \cdot S_+(z-z_i) - chx(z-z_k^{(i)*}) \cdot S_-(z-z_k^{(i)*}) + N(z, z_k^{(i)*}, z_i))] + \frac{q_0}{x^2} \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Величини $\bar{q}(x, z_i)$ ($i = \overline{1, n-1}$) визначаємо, розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$I_l \cdot \bar{q}(x, z_l) = c_1 e^{xz_l} + c_2 e^{-xz_l} + \sum_{i=1}^{n-1} (I_{i+1} - I_i) \cdot \bar{q}(x, z_i) \cdot chx(z_l - z_i) \cdot S_+(z_l - z_i) + \\ + \frac{R}{X} J_1(Rx) \left\{ \sum_{i=1}^n (I_0 - I_i) [q_1^{(iR)}(chx(z_l - z_i) \cdot S_+(z_l - z_i) - \right. \\ \left. - chx(z_l - z_{i-1}) \cdot S_+(z_l - z_{i-1}) + N(z_l, z_{i-1})) + \sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - q_k^{(iR)}) \cdot (chx(z_l - z_i) \cdot S_+(z_l - z_i) - \right. \\ \left. - chx(z_l - z_k^{(i*)}) \cdot S_-(z_l - z_k^{(i*)}) + N(z_l, z_k^{(i*)}, z_i)) \right\} + \frac{q_0}{X^2}$$

у вигляді

$$\bar{q}(x, z_l) = c_1 \cdot F_l^+(x) + c_2 \cdot F_l^-(x) + \frac{R}{X} J_1(Rx) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n (I_0 - I_i) \cdot [q_1^{(iR)} j_l^{(i)}(x) + \right. \\ \left. \sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - q_k^{(iR)}) y_{lk}^{(i)}(x) \right\} + \frac{q_0}{X^2} \Phi_l(x), \quad l = \overline{1, n-1}, \quad (12)$$

де

$$F_1^\pm(x) = \frac{e^{\pm xz_1}}{I_1}; \quad F_j^\pm(x) = \frac{1}{I_j} \left[e^{\pm xz_j} + \sum_{s=1}^{j-1} (I_{s+1} - I_s) \cdot chx(z_j - z_s) \cdot F_s^\pm(x) \right]; \\ j_1^{(i)}(x) = \frac{1 - chxz_1}{I_1}; \quad j_j^{(i)}(x) = \frac{1}{I_j} \left[chx(z_j - z_i) - chx(z_j - z_{i-1}) + \sum_{s=1}^{j-1} (I_{s+1} - I_s) \cdot chx(z_j - z_s) \cdot j_s^{(i)}(x) \right]; \\ y_{lk}^{(i)}(x) = \frac{chx(z_l - z_i) - chx(z_l - z_k^{(i*)})}{I_l}; \\ y_{jk}^{(i)}(x) = \frac{1}{I_j} \left[chx(z_j - z_i) - chx(z_j - z_k^{(i*)}) + \sum_{s=1}^{j-1} (I_{s+1} - I_s) \cdot chx(z_j - z_s) \cdot y_{sk}^{(i)}(x) \right]; \\ \Phi_1(x) = \frac{1}{I_1}; \quad \Phi_j(x) = \frac{1}{I_j} \sum_{s=1}^{j-1} (I_{s+1} - I_s) \cdot chx(z_j - z_s) \cdot \Phi_s(x), \quad j = \overline{2, n-1}.$$

Із крайових умов (10) знаходимо сталі інтегрування c_1 і c_2 :

$$c_1 = c_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_*}. \quad (13)$$

Тут $\Delta_* = 2shxz_n + \sum_{i=1}^{n-1} (I_{i+1} - I_i) F_i(x) shx(z_n - z_i)$; $F_1 = \frac{2chxz_1}{I_1}$; $F_j^\pm(x) = \frac{1}{I_j} [2chxz_j +$
 $+ \sum_{s=1}^{j-1} (I_{s+1} - I_s) \cdot chx(z_j - z_s) \cdot F_s(x)]$, $j = \overline{2, n-1}$; $\Delta_1 = \frac{R}{X} J_1(Rx) \cdot \Delta_1^*$;
 $\Delta_1^* = \sum_{i=1}^n (I_0 - I_i) [q_1^{(iR)} (shx(z_n - z_i) - shx(z_n - z_{i-1})) + \sum_{j=1}^{n-1} (I_{j+1} - I_j) j_j^{(i)}(x) shx(z_n - z_j)] +$
 $+ \sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - q_k^{(iR)}) (shx(z_n - z_i) - shx(z_n - z_k^{(i*)})) + \sum_{j=1}^{n-1} (I_{j+1} - I_j) y_{jk}^{(i)}(x) shx(z_n - z_j)] +$
 $+ \frac{q_0}{X^2} \sum_{i=1}^{n-1} (I_{i+1} - I_i) \Phi_i(x) shx(z_n - z_i).$

Застосувавши до виразу (11) обернене інтегральне перетворення Ганкеля, врахувавши співвідношення (12), (13), отримаємо:

$$\begin{aligned}
 T = R \int_0^{\infty} J_0(rx) J_1(Rx) \cdot & \left\{ \sum_{i=1}^n (I_0 - I_i) \cdot [q_1^{(iR)} \cdot (\operatorname{ch}x(z - z_i) S_+(z - z_i) - \operatorname{ch}x(z - z_{i-1}) S_+(z - z_{i-1})) + \right. \\
 + N(z, z_{i-1}) + \sum_{j=1}^{n-1} & (I_{j+1} - I_j) \cdot j_j^{(i)}(x) \operatorname{ch}x(z - z_j) S_+(z - z_j) - \frac{2\operatorname{ch}xz}{\Delta_*} \cdot (\operatorname{sh}x(z_n - z_i) - \\
 - \operatorname{sh}x(z_n - z_{i-1})) + \sum_{j=1}^{n-1} & (I_{j+1} - I_j) \cdot j_j^{(i)}(x) \operatorname{sh}x(z_n - z_j) \left. \right) + \sum_{k=1}^{m-1} (q_{k+1}^{(iR)} - q_k^{(iR)}) \cdot (\operatorname{ch}x(z - z_i) S_+(z - z_i) - \\
 - \operatorname{ch}x(z - z_k^{(i^*)}) S_+(z - z_k^{(i^*)}) + & N(z, z_k^{(i^*)}, z_{i-1}) + \sum_{j=1}^{n-1} (I_{j+1} - I_j) \cdot \Psi_{jk}^{(i)}(x) \operatorname{ch}x(z - z_j) S_+(z - z_j) - \\
 - \frac{2\operatorname{ch}xz}{\Delta_*} \cdot (\operatorname{sh}x(z_n - z_i) - & \operatorname{sh}x(z_n - z_k^{(i^*)})) + \sum_{j=1}^{n-1} (I_{j+1} - I_j) \cdot \Psi_{jk}^{(i)}(x) \operatorname{sh}x(z_n - z_j) \left. \right) + \frac{q_0}{x^2} \cdot [1 + \\
 + \sum_{j=1}^{n-1} (I_{j+1} - I_j) \cdot \Phi_j(x) \operatorname{ch}x(z - z_j) & S_+(z - z_j) - \frac{2\operatorname{ch}xz}{\Delta_*} \sum_{j=1}^{n-1} (I_{j+1} - I_j) \cdot \Phi_j(x) \operatorname{sh}x(z_n - z_j) \left. \right\} dx.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Невідомі апроксимаційні значення $q_k^{(iR)}$ ($k = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}$) температури знаходимо, розв'язавши систему $n \cdot m$ лінійних алгебраїчних рівнянь, отриману з виразу (14).

Отже, шукане температурне поле в кусково-однорідному шарі із наскрізним включенням циліндричної форми описує формула (14). Зі співвідношення (14) дістаємо значення температури в довільній точці кусково-однорідного шару (в його однорідних елементах, в області включення та на поверхнях спряження однорідних елементів).

Аналіз числових результатів. Як частковий приклад, розглянемо шар із наскрізним чужорідним включенням, для якого виконано числовий аналіз безрозмірної надлишкової температури $T^* = T / (q_0 R^2)$ для таких вихідних даних: матеріал шару – кераміка ВК94-I ($I_1 = 13,4 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{C}^0)$), матеріал включення – срібло ($I_0 = 419 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{C}^0)$), $n = 5$ – кількість розбиттів інтервалу $]0; Z_1[$; $Z_1 = z_1 / R = 1$.

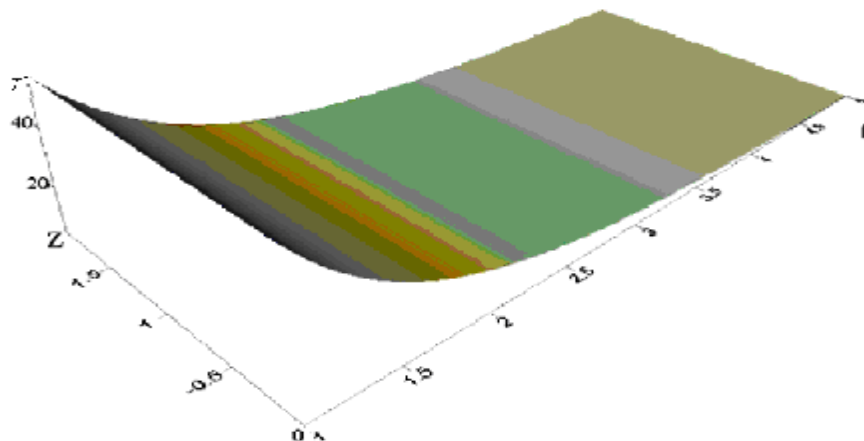


Рис.2. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірних координат r та Z

Побудовано (рис.2) залежність температури T^* від безрозмірних радіальної $r = r / R$ та аксіальної $Z = z / R$ координат. Як бачимо, максимальна температура досягається в області дії рівномірно розподілених по об'єму циліндричного наскрізного чужорідного включення внутрішніх джерел тепла.

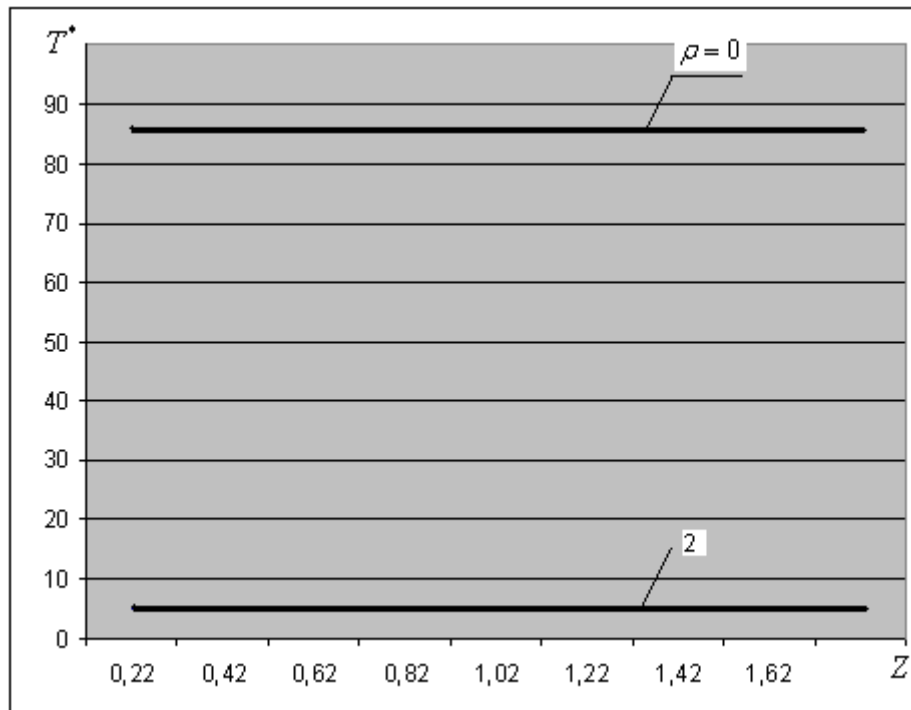


Рис.3. Залежність безрозмірної температури T^* від безрозмірної координати Z

Рис.3 ілюструє зміну температури T^* залежно від аксіальної координати Z для різних значень радіальної координати r . Як видно із графіків температура змінюється лінійно і практично є сталою для наведених значень r , причому значення її значно відрізняються в області включення ($r = 0$) та в шарі ($r = 2$), що відповідає розглядуваній фізичній моделі.

Висновки. Із використанням узагальнених функцій та кусково-лінійної апроксимації температури $q(R, z)$ на межовій поверхні S_R включення виразом (7) побудовано рівняння теплопровідності (8) із розривними та сингулярними коефіцієнтами. За допомогою інтегрального перетворення Ганкеля знайдено аналітичний розв'язок у вигляді (14) крайової задачі теплопровідності (1), (2), який дозволяє для довільної точки обчислювати значення температури на основі розроблених нових алгоритмів та створених програмних засобів і прогнозувати режими роботи окремих елементів і вузлів мікроелектронних пристроїв та ідентифікувати невідомі параметри, а також підвищити термостійкість, що збільшує їх термін експлуатації.

1. В. Гавриш, Д. Федасюк. Моделювання теплових режимів в термочутливому шарі з тепловиділяючим чужорідним включенням // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2009. – № 650. – С. 94–100.
2. В. Гавриш, Д. Федасюк. Моделювання теплових режимів в термочутливій кусково-однорідній смугі з внутрішніми джерелами тепла // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика. – Львів, 2009. – № 651. – С. 50–54.
3. Барвінський А.Ф., Гавриш В.І. Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла // Проблеми машиностроення. – 2009. – 12, № 1. – С. 47–53.
4. Гавриш В.І., Федасюк Д.В. Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням // Промышленная теплотехника. – 2010. – 32, № 5. – С. 18–25.
5. Гавриш В.І., Федасюк Д.В., Косач А.І. Гранична задача теплопровідності для шару з чужорідним циліндричним включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – 46, № 5. – С. 115–120.
6. Gavrysh V.I. Fedasyuk D.V. Thermal simulation of heterogeneous structural components in microelectronic devices // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. – 2010. – 13, – № 4. – P. 439–443.

7. *В. Гавриш.* Моделювання температурних режимів у термочутливому шарі з тепловиділяючим включенням паралелепіпедної форми малих розмірів // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2010. – № 672. – С. 104–109.
8. *В. Гавриш, Д. Федасюк.* Моделювання теплових режимів у термочутливому кусково-однорідному шарі з чужорідним тепловиділяючим включенням // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2010. – № 663. – С. 84–90.
9. *В. Гавриш, А. Косач.* Моделювання теплового стану в термочутливому елементі потужного світлодіода // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 694. – С. 254–259.
10. *В. Гавриш, А. Косач, Ю. Нога.* Моделювання температурних режимів у термочутливому вузлі мікроелектронних пристроїв // Вісник НУ "ЛП" Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 710. – С. 79–84.
11. *Гавриш В.И., Косач А.И.* Моделирование температурных режимов в элементах микроэлектронных устройств // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2011. № 1–2 (90). – С. 27–30.
12. *Гавриш В.И., Косач А.И.* Моделирование температурных режимов в электронных устройствах кусочно-однородной структуры // Электронное моделирование. – 2011. – 33, № 4. – С. 99–113.
13. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
14. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наукова думка, 1992. – 280 с.
15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. – 720 с.