

УДК 514.18

Л.С.Бойко

Луцький національний технічний університет

КОНСТРУЮВАННЯ РОЗГОРТОК ОДНОТИПНИХ ВІДСІКІВ ТОРСІВ, ЯКІ АПРОКСИМУЮТЬ ПОВЕРХНЮ ГВИНТОВОГО КОНОЇДА

Одержано параметричні рівняння розгортки відсіку торса і його ребра звороту. Чисельним інтегруванням побудовано розгортку відсіка, обмеженого заданими лініями. Здійснено візуалізацію отриманих результатів.

Постановка проблеми. Гвинтовий коноїд, який в техніці відомий під назвою шнека, має досить широке застосування, як робочий орган машин різного призначення. Оскільки він є нерозгортною поверхнею, то виготовляється штамповкою або прокаткою металевої смуги, що призводить до значних пластичних деформацій. Між тим можливий варіант заміни його відсіками розгортних поверхонь. В статті розглянуто побудову розгортки однотипного відсіку, якими апроксимується поверхня шнека.

Аналіз останніх досліджень. Заготовки виготовлення витків шнека розраховуються наближено, оскільки його поверхня є нерозгортною. Існує довідкова література, в якій наводяться параметри наближеної розгортки для деформації її у поверхню гвинтового коноїда. В праці [1] запропоновано вести розрахунок заготовки у вигляді зрізаного конуса, який з певною точністю заміняє відповідний відсік катеноїда, що є згинанням витка коноїда. Звідси витикає один із способів апроксимації катеноїда зрізаними конусами [2], причому цими ж конусами можна апроксимувати і відповідний відсік коноїда [3]. В праці [4] розглянуто апроксимацію гвинтового коноїда смугами торсів вздовж просторових кривих, що задаються лінійною залежністю у внутрішніх координатах коноїда.

Формулювання мети статті. Розробити спосіб знаходження розгортки відсіку торса, який є однотипним елементом при апроксимації поверхні гвинтового коноїда.

Основна частина. В статті [4] нерозгортну поверхню гвинтового коноїда запропоновано апроксимувати однотипними відсіками торсів. Відсік торса конструюється у вигляді смуги, що дотикається до поверхні коноїда вздовж заданої лінії на ньому (рис. 1,а). Рівняння геометричних об'єктів наступні.

$$\text{Гвинтового коноїда: } X = u \cos v; \quad Y = u \sin v; \quad Z = bv. \quad (1)$$

$$\text{Лінії на ньому: } x_0 = av \cos v; \quad y_0 = av \sin v; \quad z_0 = bv. \quad (2)$$

$$X = av \cos v - u \frac{a(\cos v + v \sin v)}{\sqrt{a^2(1+v^2) + b^2}};$$

$$\text{Торса вздовж лінії: } Y = av \sin v - u \frac{a(\sin v - v \cos v)}{\sqrt{a^2(1+v^2) + b^2}}; \quad (3)$$

$$Z = bv + u \frac{b}{\sqrt{a^2(1+v^2) + b^2}}.$$

$$x_{\partial\zeta} = av \cos v - \frac{2a}{v}(\cos v + v \sin v);$$

$$\text{Його ребра звороту: } y_{\partial\zeta} = av \sin v - \frac{2a}{v}(\sin v - v \cos v); \quad (4)$$

$$z_{\partial\zeta} = bv + \frac{2b}{v}.$$

В [4] також наведені коефіцієнти першої квадратичної форми торса (3):

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 = 1;$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{b^2 - a^2(1-v^2)}{\sqrt{a^2(1+v^2)+b^2}};$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 = a^2(1+v^2) + b^2 +$$

$$+ \frac{b^2 + a^2v^2}{a^2(1+v^2)+b^2} \left(\frac{a^2u^2v^2}{a^2(1+v^2)+b^2} - \frac{4a^2uv}{\sqrt{a^2(1+v^2)+b^2}} \right).$$

В наведених рівняннях u і v є незалежними змінними, a і b – сталими, причому b – гвинтовий параметр поверхні, а за допомогою сталої a задається крива на поверхні внутрішнім рівнянням $u = av$.

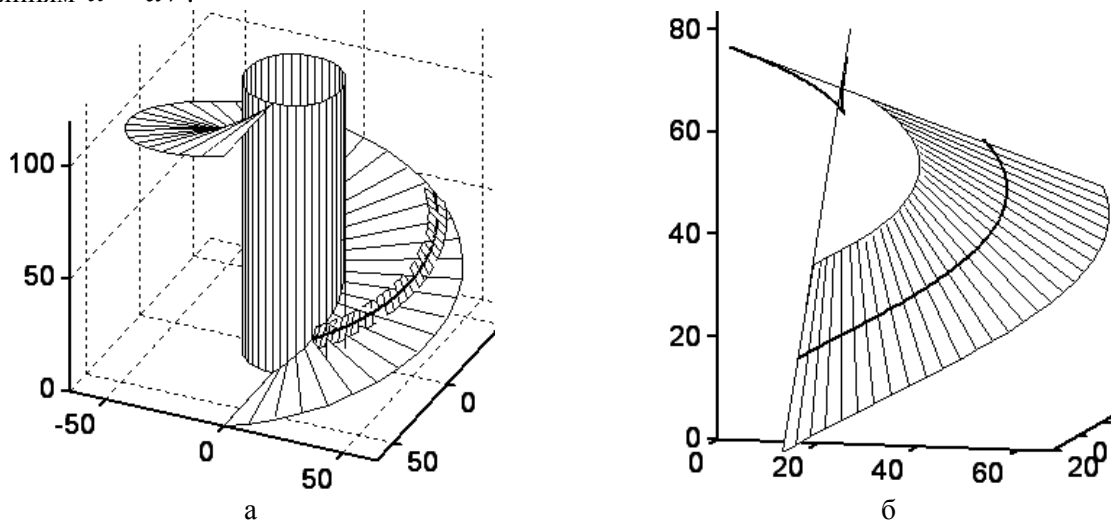


Рис.1. Смуга дотичного торса (3) до гвинтового коноїда (1) вздовж просторової кривої на ньому:
 а) торс дотикається до коноїда вздовж кривої (2);
 б) фрагмент торса (3), що проходить через просторову криву (2) та відповідна дуга ребра звороту (4).

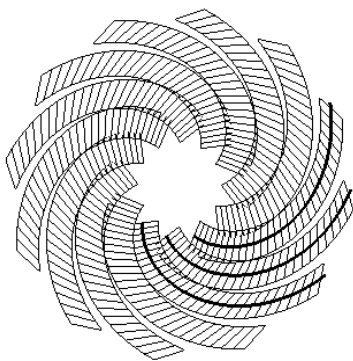


Рис. 2. Проекції апроксимованого коноїда

Поверхні побудовані при значенні сталих $b=19,1$ (при цьому крок коноїда становить 120 лінійних одиниць), $a=25$. Смуга торса побудована при однакових відрізках твірних $u=\pm 3$, відкладених від лінії дотику. Поворотом відріку торса на однаковий кут (наприклад, 30°) і зміщенням його в осьовому напрямі вгору на відповідну величину, на рис. 2 апроксимовано поверхню гвинтового коноїда.

Із рис. 2 видно, що смуги не досить точно апроксимують коноїд: ближче до осі вони перекривають одна одну, а далі від осі не покривають поверхню коноїда. Для знаходження точних меж відріку необхідно знайти лінію перетину сусідніх відріків з обох сторін. Проте знайти таку залежність у внутрішніх координатах $u = u(v)$, яка б описала цю лінію, не вдається, тому будемо її шукати у вигляді лінійної залежності $u = cv + d$. При цьому будемо використовувати горизонтальну проекцію, підбираючи сталі c і d таким чином, щоб на горизонтальній проекції лінії стику відріків по можливості збіглися. Така залежність була знайдена у вигляді $u = \pm(2,2v+3)$.

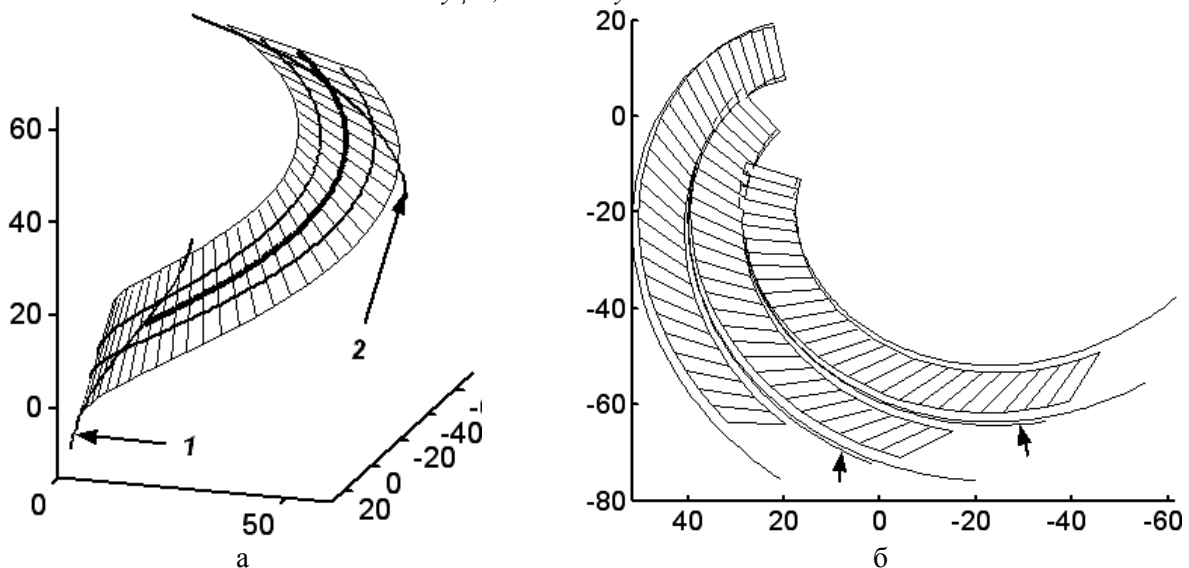


Рис. 3. Відсіки апроксимуючого тора з обмежувальними лініями на них:
а) стрілками відмічено лінії стику сусідніх відсіків на горизонтальній проекції;
б) обмежувальні лінії на аксонометричному зображенні тора.

Криві при знайдений лінійній залежності побудовані на рис. 3, причому на рис. 3,а стрілками показано, наскільки вони не збігаються на горизонтальній проекції. Будемо вважати, що нас така точність задовільняє. Залишається знайти обмежувальні лінії 1 і 2 (рис. 3,б), що відповідають співвісним із коноїдом циліндрам, між якими розташований необхідний відсік коноїда. Горизонтальна проекція циліндра радіуса r запишеться у вигляді кола відповідного радіуса:

$$X^2 + Y^2 = r^2. \quad (6)$$

Підставимо в (6) перших два вирази рівнянь тора (3) і розв'яжемо одержане квадратне рівняння відносно u :

$$u = \frac{\sqrt{a^2(1+v^2)+b^2} \left(av - \sqrt{r^2(1+v^2) - a^2v^4} \right)}{a(1+v^2)}. \quad (7)$$

Дослідження показали, що перед знаком кореня потрібно брати знак „-“. Підстановка внутрішнього рівняння (7) у рівняння тора (3) дає параметричні рівняння лінії перетину циліндра радіуса r із торсом (3). На рис. 3,б ці лінії побудовані на смугі тора для двох циліндрів: внутрішнього при $r=20$ (позначено цифрою 1) і зовнішнього при $r=65$ (позначено цифрою 2).

Для того, щоб знайти межі відсіку тора (3) на розгортці, окресленого чотирма лініями, спочатку необхідно знайти параметричні рівняння розгортки тора. Спочатку розшукаємо криву, в яку перетворюється лінія (2) при згинанні тора (3) на площину і рівняння якої в просторі можна одержати із (3) при $u=0$. Відомо, що її геодезична кривина не змінюється при згинанні. Знаходимо її за відомим виразом:

$$k_a = \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

У визначнику (8) перша стрічка є координати одиничного вектора нормалі до поверхні (3), друга і третя стрічки – відповідно перші і другі похідні кривої (2). Вираз перед визначником є величиною, оберненою до похідної довжини дуги кривої (2).

Координати одиничного вектора нормалі вздовж кривої (2) знайдено в праці [4]:

$$n_x = \frac{b \sin v}{\sqrt{b^2 + (av)^2}}; \quad n_y = -\frac{b \cos v}{\sqrt{b^2 + (av)^2}}; \quad n_z = \frac{av}{\sqrt{b^2 + (av)^2}}. \quad (9)$$

Перші і другі похідні кривої (2) будуть:

$$\begin{aligned}x'_0 &= a \cos v - av \sin v; & x''_0 &= -2a \sin v - av \cos v; \\y'_0 &= a \sin v + av \cos v; & y''_0 &= 2a \cos v - av \sin v; \\z'_0 &= b; & z''_0 &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Похідна дуги кривої (2) буде:

$$\frac{ds}{dv} = \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} = \sqrt{a^2(1+v^2) + b^2}. \quad (11)$$

Після підстановки (9), (10) і (11) у (8) і спрощень отримаємо:

$$k_a = \frac{av[b^2 + a^2(2+v^2)]}{[b^2 + a^2(1+v^2)]\sqrt{b^2 + a^2v^2}}. \quad (12)$$

Геодезична кривина (12) кривої на торсі стає повною кривиною цієї ж кривої на розгортці торса. Для знаходження параметричних рівнянь кривої за відомим натуральним рівнянням (рівнянням кривини) використаємо відомі формули переходу:

$$x_{0\delta} = \int \cos a \, ds; \quad y_{0\delta} = \int \sin a \, ds, \quad (13)$$

де кут $a = \int k_a ds$. Інтегруванням виразу (12) із врахуванням ds (11) знаходимо кут a :

$$a = \int \frac{av[b^2 + a^2(2+v^2)]}{[b^2 + a^2(1+v^2)]\sqrt{b^2 + a^2v^2}} \sqrt{a^2(1+v^2) + b^2} \, dv = \frac{\sqrt{b^2 + a^2v^2}}{a} + \text{Arctg} \frac{\sqrt{b^2 + a^2v^2}}{a}. \quad (14)$$

Остаточного інтегрування виразів (13) здійснити не вдається, тому параметричні рівняння кривої (2) в розгортці згідно (13) із врахуванням (14) і (11) запишуться:

$$\begin{aligned}x_{0\delta} &= \int \sqrt{a^2(1+v^2) + b^2} \cos \left(\frac{\sqrt{b^2 + a^2v^2}}{a} + \text{Arctg} \frac{\sqrt{b^2 + a^2v^2}}{a} \right) dv; \\y_{0\delta} &= \int \sqrt{a^2(1+v^2) + b^2} \sin \left(\frac{\sqrt{b^2 + a^2v^2}}{a} + \text{Arctg} \frac{\sqrt{b^2 + a^2v^2}}{a} \right) dv.\end{aligned}\quad (15)$$

Через кожену точку кривої (15) на розгортці проходить прямолінійна твірна під тим же кутом φ до неї, що і в просторі. Цей кут можна визначити, як кут між наступними векторами:

- вектора дотичної до кривої (2), заданого похідними:

$$\{a \cos v - av \sin v; \quad a \sin v + av \cos v; \quad b\}; \quad (16)$$

- напрямного вектора твірної торса (3):

$$\left\{ \frac{a(\cos v + v \sin v)}{\sqrt{a^2(1+v^2) + b^2}}; \quad -\frac{a(\sin v - v \cos v)}{\sqrt{a^2(1+v^2) + b^2}}; \quad u \frac{b}{\sqrt{a^2(1+v^2) + b^2}} \right\}. \quad (17)$$

За відомими формулами знаходимо вирази кута φ :

$$\cos f = \frac{a^2(v^2 - 1) + b^2}{a^2(1+v^2) + b^2}; \quad \sin f = \frac{2a\sqrt{a^2v^2 + b^2}}{a^2(1+v^2) + b^2}. \quad (18)$$

З іншої сторони, рівняння розгортки торса можна записати у вигляді:

$$X_\delta = x_{0\delta} + ul_\delta; \quad Y_\delta = y_{0\delta} + um_\delta, \quad (19)$$

де l_p і m_p - невідомі покищо напрямні косинуси твірної на розгортці. Вони визначаються, як косинус і синус кута між вектором дотичної до кривої в розгортці $\{x'_{0\delta}; y'_{0\delta}\}$ і напрямним

вектором твірної в розгортці $\{l_\delta; m_\delta\}$ за формулами:

$$\begin{aligned}l_\delta &= \cos f \cos a - \sin f \sin a; \\m_\delta &= \cos f \sin a + \sin f \cos a,\end{aligned}\quad (20)$$

де вирази для кутів α і φ наведені у (14) і (18).

Таким чином, параметричні рівняння (19) розгортки тора (2) стають відомими, оскільки всі вирази, що до них входять, відомі. Можна перекоонатися, що коефіцієнти першої квадратичної форми рівнянь (19) точно збігаються із (5), що свідчить про правильно знайдену розгортку.

Щоб побудувати за рівняннями (19) відсік тора в розгортці, обмеженого чотирма лініями (рис. 3,б), потрібно замість u підставити в них внутрішні рівняння цих ліній, тобто (7) для двох різних радіусів ($r=20$ і $r=65$) і $u = \pm(2,2v+3)$. На рис. 4,а чисельними методами побудовано розгортку відсіка з обмежуючими кривими.

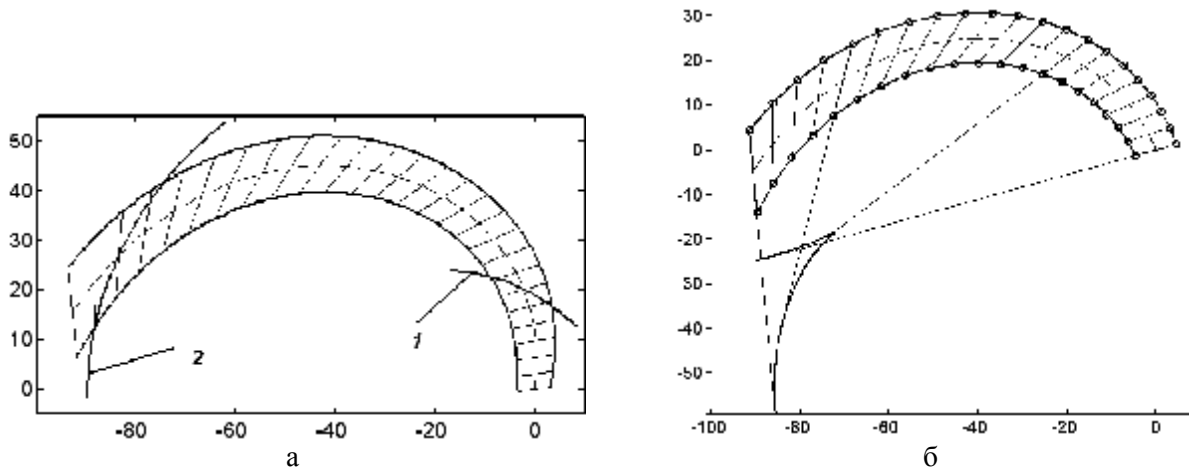


Рис. 4. Розгортка відсіку апроксимуючого тора, зображена на рис. 3,б (штриховою показана лінія дотику до коноїда):

- а) відсік з обмежуючими лініями;
- б) відсік, ребро звороту та окремі твірні.

Важливо, щоб в межі відсіку не попало ребро звороту, оскільки по одну сторону від нього поверхні не існує. Його на розгортці знаходимо теж виходячи із інваріантності геодезичної кривини при згинанні тора.

Висновки. Описано смугу тора, дотичного до гвинтового коноїда вздовж заданої просторової кривої. Знайдено внутрішні рівняння ліній, які описують на поверхні смуги криві, які окреслюють на смугі відсік. Множина однотипних відсіків апроксимують поверхню коноїда між двома співвісними циліндрами. Отримано параметричні рівняння розгортки тора та обмежуючі криві на ньому. Знайдено ребро звороту на поверхні тора та на його розгортці. Перспективи подальших досліджень полягають у апроксимації коноїда однотипними відсіками торсів, дотичних до поверхні коноїда вздовж інших кривих на його поверхні.

1. Пилипака С.Ф. Практичні аспекти гнуття шнеків сільськогосподарських машин / С.Ф Пилипака // Збірник наукових праць Національного аграрного університету "Механізація сільськогосподарського виробництва". –Том 6. "Теорія і розрахунок сільськогосподарських машин". –К.: НАУ, 1999. –С. 149 - 151.
2. Пилипака С.Ф. Апроксимація катеноїда, який є згинанням відсіку гвинтового коноїда, зрізаними конусами / С.Ф Пилипака, Л.С. Бойко // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КНУБА, 2010. – Вип. 84. –С. 280 – 284.
3. Пилипака С.Ф. Апроксимація гвинтового коноїда смугами торсів-гелікоїдів / С.Ф Пилипака, Л.С. Бойко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. –Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2010. –Вип. 26. –С. 73 – 80.
4. Пилипака С.Ф. Апроксимація гвинтового коноїда смугами торсів вздовж просторових кривих на його поверхні / С.Ф Пилипака, Л.С. Бойко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2011. –Вип. 28. –С. 19 – 24.