

УДК 515.2

В.Ф.Челомбїтько

Харківський національний університет радіоелектроніки

## ПОБУДОВА ВІЗЕРУНКОВИХ РОЗЕТОК ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙ З КЕРОВАНИМИ КРИВИНАМИ

*Розглянуто спосіб побудови візерункових розеток за допомогою ліній, вздовж яких їх кривини змінюються за законом функції виду  $[1 + p \arccos(\cos(s))]^w$ .*

**Постановка проблеми.** Машинні візерунки використовують для сучасної реклами, як заставки в книгах і журналах, в декоративних малюнках, які наносяться на тканину та посуд, тощо. Останнім часом організуються виставки художньої машинної графіки, адже орнаменти, які побудовані комп'ютером, часто не підпадають під якийсь стиль, і за формою можуть бути набагато більш різноманітніші, ніж придумані художниками. Для оформлення приміщень (паркетних підлог, стін та стель) все більшого поширення набувають візерункові розетки – тобто орнаментальні мотиви переважно у вигляді квітки, що розпустилося, з однаковими симетричними відносно повороту пелюстками (застосовуються в архітектурі, ювелірних виробках, тощо). На рис. 1 наведено приклади візерункових розеток, запозичених із сайту <http://www.vipparkets.lv/parket-rozetka.php>.



Рис. 1. Приклади відомих візерункових розеток

Відомі результати доцільно було б доповнити шляхом створення алгоритмів побудови візерункових розеток з використанням обчислювальної техніки. Наприклад, за допомогою ліній з керованою кривиною залежно від параметрів, що входять до їх описів. Адже при деяких розрахунках для опису кривих доцільно застосовувати їхні натуральні рівняння [1]. Інакше кажучи, такі рівняння, які описують кривину лінії залежно від натурального параметра  $s$ , що визначає довжину даної кривої починаючи з її деякої точки.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідженню кривих, у натуральні рівняння яких входить тригонометрична функція косинуса, присвячені роботи Краузе [1]. Складанню рівнянь плоских кривих із застосуванням натуральних рівнянь присвячені роботи С.Ф.Пилипаки [2], С.Ю.Бадаєва, Т.И.Щеголевої [3], В.Д.Борисенка, С.А.Устенка, В.Е.Спіцина [4] та інших авторів. Аналіз відомих результатів показав, що поки не дослідженим виявилось питання побудови ліній з використанням обернених тригонометричних функцій.

**Формулювання цілі статті.** Розробити спосіб побудови візерункових розеток за допомогою ліній, вздовж яких їх кривини змінюються за законом функції виду  $[1 + p \arccos(\cos(s))]^w$ , де  $w > 0$ .

**Основна частина.** Подальшим узагальненням побудови кривих з керованою кривиною буде вивчення більш складних залежностей входження (класичної) кривини в описи результуючих кривих. У даній роботі розглянутий випадок, коли у формули опису результуючої лінії входить кривина з додатнім степенем (формули виду  $[1 + p \arccos(\cos(s))]^w$ ).

Відомо [5], що натуральне рівняння кривої на площині має вигляд

$$\frac{1}{R} = f(s), \quad (1)$$

де  $R$  - радіус кола, дотичного до гладкої кривої в певній її точці, а функція  $f(s)$  визначає закон зміни залежно від натурального параметра  $s$  кривину кривої (тобто величину  $k = 1/R$ ). За визначенням (класичної) кривини дуги кривої у точці  $M$  називається величина

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|, \quad (2)$$

де  $\alpha$  - кут між дотичними в точках  $M$  і  $M_{\alpha}$ , а  $\Delta s$  - довжина дуги  $MM_{\alpha}$ . З використанням похідної формули (2) можна записати як

$$k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|, \quad (3)$$

де  $\alpha(s)$  - кут повороту дотичної у точці  $M$ , що залежить від шляху, пройденого по кривій,  $\frac{d\alpha}{ds}$  - похідна функції  $\alpha(s)$  по параметрі  $s$ .

Рівняння (3) допомагає описати криву, що задана натуральним рівнянням. Дійсно, з рівняння  $k = \frac{d\alpha}{ds} = f(s)$  обчислюється функція

$$a(s) = \int_0^s f(s) ds + a_0, \quad (4)$$

за допомогою якої обчислюється кут нахилу дотичній залежно від довжини дуги.

Тоді відповідно до відомих [4] залежностей

$$\frac{dx}{ds} = \cos a \quad \text{і} \quad \frac{dy}{ds} = \sin a \quad (5)$$

параметризацію кривої можна задати у вигляді

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos a(s) ds + x_0; \\ y(s) &= \int_0^s \sin a(s) ds + y_0, \end{aligned} \quad (6)$$

або, з врахуванням (4), рівняння шуканої кривої має вигляд

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos \left( \int_0^s f(s) ds + a_0 \right) ds + x_0; \\ y(s) &= \int_0^s \sin \left( \int_0^s f(s) ds + a_0 \right) ds + y_0, \end{aligned} \quad (7)$$

Легко переконатися в тому, що обертання кривої спричиняє зміна у формулах (7) постійної  $a_0$ , а її паралельний перенос пов'язаний зі зміною параметрів  $x_0$  і  $y_0$ . Рівність цих постійних нулю визначає розташування кривої так, що початкова точка для відліку дуги розташована в початку координат, а додатній напрямок дотичної у ній збігається з додатнім напрямком осі  $Ox$ .

Подальшим розвитком поняття кривих з керованими кривинами буде розгляд *степеню кривини лінії*.

*Визначення.* Нехай кривина уздовж кривої змінюється за законом  $k^w(s)$ , де  $w > 0$  і  $s$  - натуральний параметр. За допомогою функції  $k^w(u)$  задамо вираз  $a_w(s)$  у вигляді

$$a_w(s) = \int_0^s k^w(u) du, \quad (8)$$

Тоді параметр  $w$  назвемо степенем кривини лінії  $\{x(s), y(s)\}$ , отриманої в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{ds}x(s) = \cos(a_w(s)); \quad \frac{d}{ds}y(s) = \sin(a_w(s)). \quad (9)$$

Зазначимо, що кривина лінії другого степеня застосовується при побудові еластик Ейлера, а кривини ліній більш високих степенів використовуються при побудові треків елементарних часток у магнітних полях (дані з Інтернету).

Для побудови кривих додатного степеня кривини було складено Maple- програма, фрагмент якої у вигляді процедури-функції має вигляд:

```
profil := proc(kap, a, b)
  local sys, p, ics, p1:
  sys:= diff(alpha(s),s) = kap(s)^w,
        diff(f1(s),s) = cos(alpha(s)),
        diff(f2(s),s) = sin(alpha(s)):
  krai:= f1(0)=0,f2(0)=0, alpha(0)=0;
  ans:=dsolve({sys,krai},{f1(s),f2(s),alpha(s)},type=numeric);
  pic:=odeplot(ans,[f1(s),f2(s)], s=a..b,
  numpoints=12000,thickness=2,color=black):
  display(pic,scaling=constrained);
end:
```

У цьому фрагменті програми через **kap** позначено (класичну) кривину кривої, через **a** і **b** - границі зміни параметра довжини дуги, систему диференціальних рівнянь Френе позначено через **sys**, розв'язок цієї системи позначено через **ans**, а підготовлену для візуалізації інформацію позначено як **pic**. Звертатися до процедури-функції треба, наприклад, так:

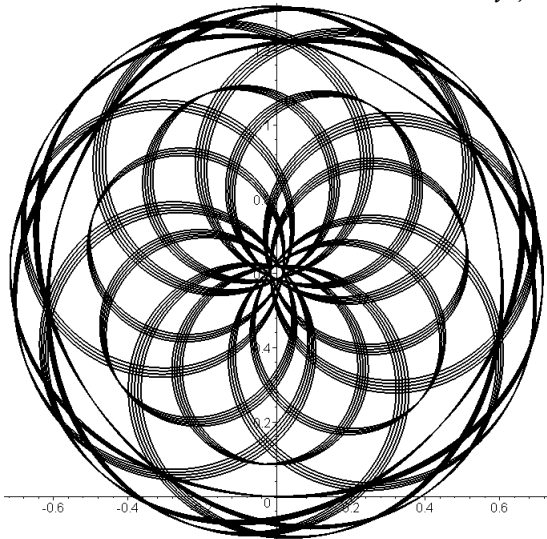
```
w := 2.:
kap := s -> 1 + p*arccos(cos(s));
profil(kap, 0, 66*Pi);
```

У результаті у системі декартових координат  $\{f_1(s), f_2(s)\}$  буде побудована лінія, що відповідатиме параметрам **kap**, **p** і **w**. Але досвід роботи показує, що незначні зміни параметра  $p$  призводять до значних змін в зображенні візерункової розетки. Тому пропонується будувати  $N$  кадрів анімаційних зображень на інтервалі  $[A...B]$  зміни параметра  $p$ . Для цього складено Maple- програму:

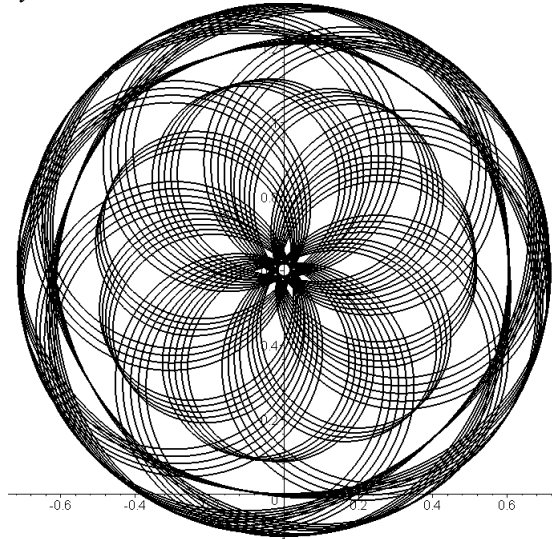
```
for i from 0 to N do
  p := evalf(A + (B - A)*i/N):
  z := convert(p, string):
  txt:= cat(`p = `, z):
  kap := s -> 1 + p*arccos(cos(s));
  Gr[i] := display(profil(kap, 0, 66*Pi), title=txt);
end do:

display(seq(Gr[i], i=0..N), scaling=CONSTRAINED,
insequence=true, view=[-1..1, -0.5..1.5]);
```

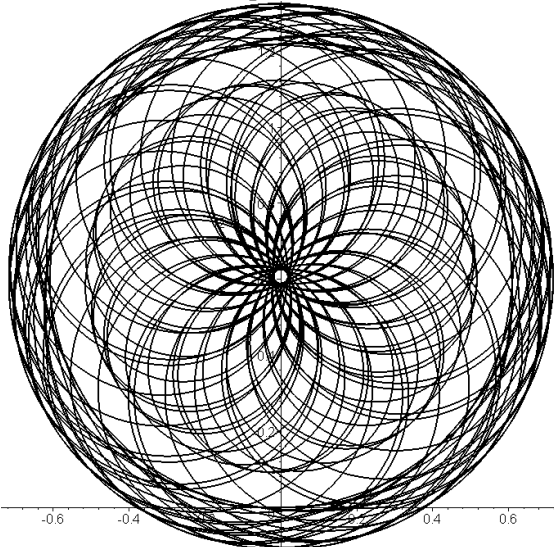
При цьому в кожному кадрі буде зображено значення параметра  $p$ , яке відповідатиме цьому зображенню. На рис. 2 при  $w=1$  наведено приклади візерункових розеток на деяких значеннях  $p$  лише з інтервалу  $[0,969...1]$ .



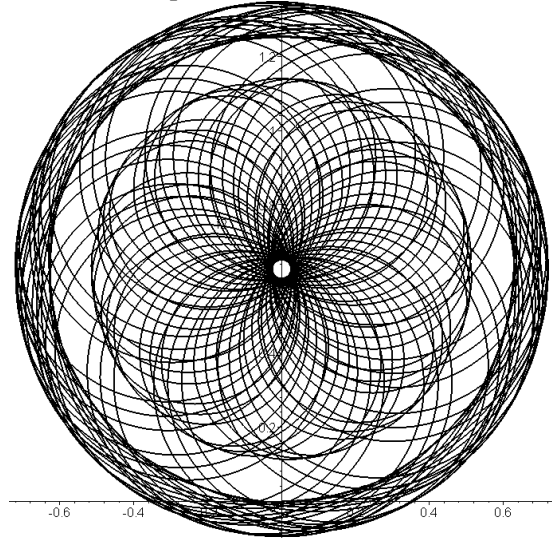
$p = 1$



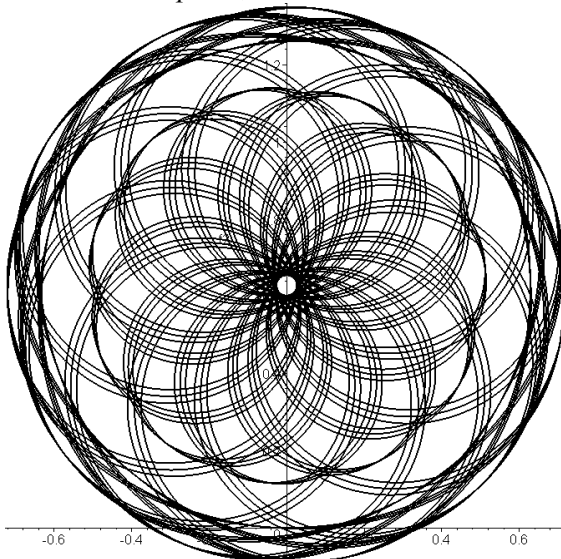
$p = 0,9994444445$



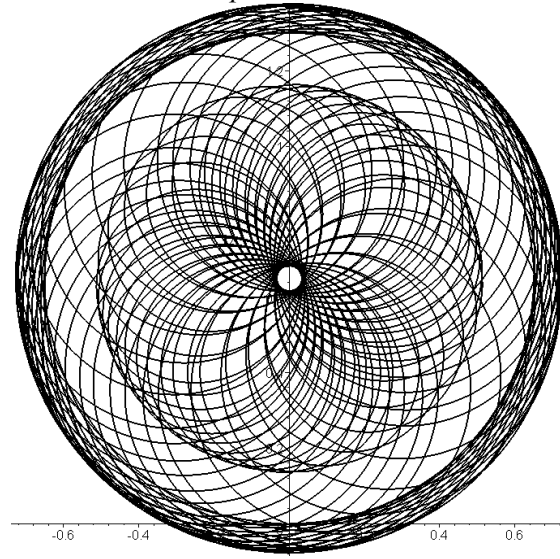
$p = 0,9966666667$



$p = 0,985$



$p = 0,9833333334$



$p = 0,9694444445$

Рис. 2. Приклади візерункових розеток залежно від параметра  $p$  при  $w=1$ .

На рис. 3 і 4 наведено приклади візерункових розеток залежно від параметра  $p$  при  $w=2$  і  $w=3$ .

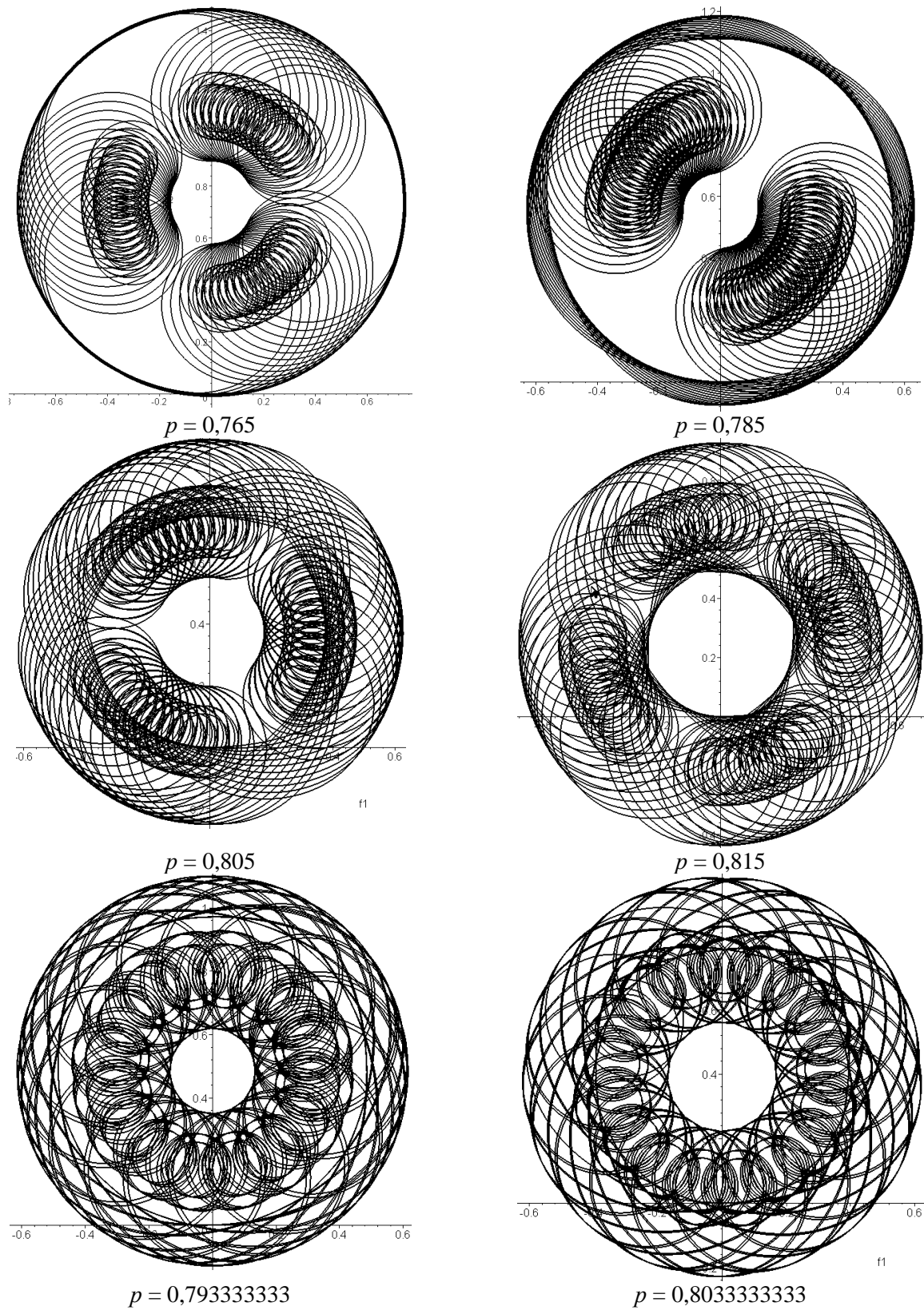


Рис. 3. Приклади візерункових розеток залежно від параметра  $p$  при  $w=2$ .

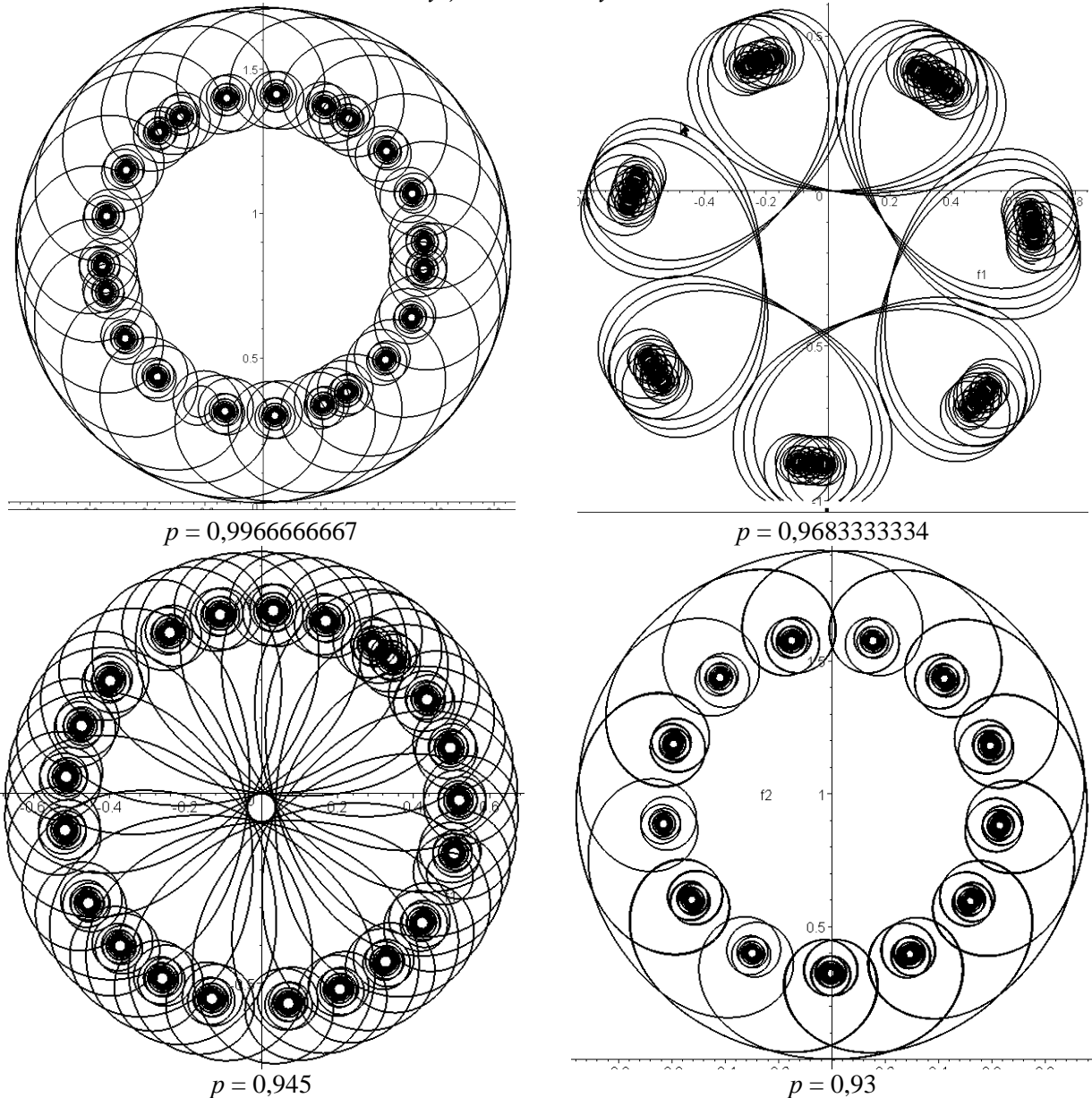


Рис. 4. Приклади візерункових розеток залежно від параметра  $p$  при  $w=3$ .

**Висновок.** Будувати візерункові розетки доцільно за допомогою ліній, вздовж яких їх кривини змінюються за законом функції виду  $[1 + p \arccos(\cos(s))]^w$ , де  $w > 0$ .

1. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения / А.А. Савелов / - М.: Физматгиз, 1960.- 289 с.
2. Пилипака С.Ф. Дослідження плоских кривих, натуральні рівняння яких мають синусоїдний характер // Пилипака С.Ф./ Прикладна геометрія та інженерна графіка . К.: КНУБА, 2006. – вип. 76. – С. 160-165
3. Бадаєв Ю.І. Універсальна аналітична крива для побудови візерунка. // Ю.І.Бадаєв, Т.І.Щоголева / Прикладна геом. та інж. графіка - Праці / Таврійська держ. агротехнічна академія. Вип. 4, Т, 40. - Мелітополь: ТДАТА, 2008,- с. 32-37.
4. Борисенко В.Д. Масштабування плоских криволінійних обводів заданої кривини // Борисенко В.Д., Устенко С.А., Спіцин В.С. / Прикладна геометрія та інженерна графіка . К.: КНУБА, 2003. – вип. 72. – С. 189-191
5. Рашевский Л.В. Курс дифференциальной геометрии / Л.В. Рашевский / - М.,Л. : ГОНТИ, 1939, 360с.