УДК 515.2

И.Г.Балюба
Горягин Б.Ф.
Т.П. Малютина
И.П.Давыденко
Е.В.Конопацкий
Донбаська національна академія будівництва і архітектури

ТОЧЕЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ И ЕГО МЕСТО В РЯДУ ДРУГИХ СУЩЕСТВУЮЩИХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Розглянутий математичний апарат точкового числення геометрично визначених форм у його взаємосвязі з іншими існуючими численнями, приведений приклад його застосування при визначенні точки, числа та лінії у чотирьохмірному просторі.

Ключевые слова: *точечное исчисление, геометрическая форма, четырехмерное пространство.*

Постановка проблемы. Точечное исчисление – один из способов конструирования геометрических форм по заданным условиям и является новым направлением в прикладной геометрии. Его теоретические и практические основы изложены только в диссертациях, докладах на конференциях и статьях, что вызывает трудности восприятия его результатов многими геометрами для применения при конструировании геометрических форм, многомерных явлений и процессов. До появления учебников и пособий по точечному исчислению, возникла проблема уменьшения трудностей восприятия научных работ с точечным исчислением.

Анализ последних исследований и публикаций. Результаты исследований, в виде расширенных статей по основам точечного исчисления, опубликованы в сборниках статей г. Мелитополь и г. Киев.

Формулировка целей статьи. Ставится задача указать место точечного исчисления в ряду существующих исчислений, показать его возможности вне зависимости от размерности пространства, проиллюстрировать эти возможности на конкретном примере.

Основная часть. Направление исследований, к которому принадлежит представленная работа, основывается на точечном исчислении. Это математический аппарат представления геометрически определенных форм в виде точечных алгоритмов. Точечные алгоритмы состоят только из точечных соотношений, каждый из которых, позволяет замену его системой n-покоординатных вычислительных формул (n-размерность пространства, заданного декартовой системой координат). Данная замена точечных соотношений в координатные соотношения, переводит точечный алгоритм геометрической формы в вычислительный алгоритм, пригодный для создания компьютерной модели геометрической формы.

Теоретические основы точечного исчисления изложены в докторской диссертации проф. Балюбы И.Г. [1], практическое наполнение – в кандидатской диссертации Малютиной Т.П. [2], в многочисленных статьях кафедры "Градостроительство и инженерная графика" Донбасской национальной академии строительства и архитектуры: Полищука В.И. [3], Горягина Б.Ф., Давыденко И.П., Конопацкого Е.В., Деменковой Я.А., Наминас З.А., Старченко Ж.В., Бумаги А.И. и др., в работах геометров Донецкой школы: проф. Скидана И.А. и его учеников, в работах геометров Мелитопольской школы: проф. Найдыша А.В., проф. Верещаги В.М. и их учеников.

Точечное исчисление основным элементом выбирает точку и с помощью математических операций с точками и числами (параметрами) определяет более сложные n-мерные геометрические формы. Это исчисление заимствовало многое из существующих исчислений:

– **из барицентрического исчисления**: в качестве определителя пространства выбирается симплекс, что позволяет работать в более общей аффинной геометрии; разбивать симплекс на подсимплексы, в которых можно задавать фрагменты геометрической формы простейшими каноническими уравнениями, не теряя взаимосвязи этих фрагментов единого уравнения в первоначальном декартовом симплексе (декартовой системе координат). Существенное различие барицентрического и точечного исчислений состоит в геометрической сущности чисел (параметров). В первом – числа это вес, присоединенный к вершине симплекса, во втором – числа это простые отношения трех точек прямых, связанных с вершинами симплекса. Ближе всего точечное исчисление примыкает к барицентрическому исчислению тогда, когда в качестве весов вершин симплекса принимаются противоположные точкам площади, объемы, и т.п.;

– **из тензорного исчисления**: особую информационную роль играют символы, индексы и их расположение в обозначении. Точечное исчисление выбрало за основу эту особенность, что обеспечивает не зрительную, а логическую наглядность – это позволяет ориентироваться в многомерном пространстве с учетом ориентации геометрических форм, позволяет отражать симметрию формы, состоящую из множества точек в его символьном обозначении;

– из векторного исчисления: вместо векторов в точечном исчислении рассматриваются направленные отрезки, что позволило разделить параметры положения и формы и работать с ними раздельно. Поскольку направленный отрезок – это закрепленный вектор, то многие результаты и достоинства векторного исчисления для закрепленных векторов перенесены в точечное исчисление. Можно утверждать, что точечное исчисление это векторное исчисление закрепленных (не свободных векторов), заданных парами точек, сформированных в системе симплексов, где числами (параметрами) являются выраженное явно или неявно простое отношение трех точек прямой;

– точечное исчисление: создано как математический аппарат инженера не для исследования имеющейся геометрической формы на наличие определенных ее свойств, а для конструирования необходимой формы с наличием этих необходимых свойств. Это обеспечивается особенностью точечного исчисления в последовательности определения геометрической формы, от ее необходимой натуральной величины к ее проекциям, а не наоборот, как было раньше. Эта особенность объясняет то, что чертежи при изложении точечного решения задачи, независимо от размерности, задаются не проекциями, а натуральной величиной. Такую возможность дает инвариантность параметра точечного исчисления относительно параллельного проецирования:
все что происходит с точкой и ее перемещением, которое обеспечивает такой параметр, идентично в любом из взаимосвязанных симплексов (на всевозможных параллельных проекциях) включая симплекс прямой OE_i (ось декартовой системы координат). Это позволяет осуществлять переход от натуральной величины формы, к любой ее проекции включая ось – создает покоординатный переход от точечного алгоритма к вычислительному (компьютерному) алгоритму.

Точечное исчисление состоит из специфических точечных формул с различными параметрами, отражающими различные геометрические операции, которые содержат заданные точки и функции от параметра. Имея геометрический алгоритм формы, для получения ее точечного, а с ним и вычислительного алгоритма, необходимо:

– для каждой графической операции зафиксировать ее точечный аналог из набора точечных формул и получить точечный алгоритм искомой геометрической формы;

– каждую формулу перезадают количеством *n*-покоординатных вычислительных формул путем подстановки вместо заданных точек их координат. Совокупность вычислительных формул задают искомый вычислительный алгоритм.

Точечное исчисление работает в многомерном пространстве, где исчисляет точки, необходимые числовые величины и линии. Рассмотрим простейший пример, иллюстрирующий применение точечного исчисления при решении задач.

Задача. В четырехмерном пространстве заданы три точки:

$$A(x_A, y_A, z_A, t_A),\ B(x_B, y_B, z_B, t_B),\ C(x_C, y_C, z_C, t_C)\,. \qquad (1)$$

Определить центр *K* окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Определить радиус r этой окружности. Дать уравнение окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Задача состоит из трех частей:

– результатом является точка.

– результатом является число.

– результатом является кривая линия.

Примером решения этой задачи проиллюстрируем:

– работу точечного исчисления в многомерном пространстве. Покажем, что увеличение размерности пространства из трех до четырех или уменьшение от трех до двух, никак не изменяет получение точечного алгоритма решения задачи;
– увеличение размерности пространства из трех до четырех требует только незначительного изменения вычисления метрического оператора и добавления еще одного уравнения в вычислительный (компьютерный) алгоритм решения;
– для использования точечного исчисления, при решении задачи, необходимо предварительно выбрать некоторый геометрический алгоритм ее решения. Поскольку каждому геометрическому алгоритму соответствует свой точечный и вычислительный алгоритм, то для упрощения решения задачи очень важен предварительный выбор геометрического алгоритма;
– работа в точечном исчислении состоит в том, чтобы для каждой графической операции записать точечную формулу из набора формул этого исчисления. Отсюда следует очень важный принцип развития точечного исчисления – пополнение его точечными формулами;
– работа в точечном исчислении отличается от работы в других исчислениях, включая векторное исчисление, и требует специальной подготовки при его использовании.

Что касается первой части задачи, то достаточно применить формулу точечного исчисления особых точек треугольника полученной в кандидатской диссертации Малютиной Т.П.:

$$K = \frac{Aa + Bb + Cc}{a + b + c}, \text{ где } a = |BC|,\ b = |CA|,\ c = |AB|. \qquad (2)$$

При необходимости, эту формулу можно упростить (вычесть одну из точек), например точку *C*:

$$K = \frac{(A-C)a + (B-C)b + (C-C)c}{a+b+c} + C = \frac{(A-C)a + (B-C)b}{a+b+c} + C. \qquad (3)$$

Это упрощение означает, что в первом случае точка *K* задана в симплексе *ABC*, где каждая вершина симплекса равнозначная. Во втором случае точка *C* принята за начальную точку, а *K* задана в общей декартовой системе координат с репером двух закрепленных векторов $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$.

Точечный алгоритм точки *K* состоит из одной формулы. Для вычислительного алгоритма необходимо определить длины сторон треугольника. В точечном исчислении метрика определяется с помощью метрического оператора, что представляет собой приспособленное к точкам (вершинам симплекса) скалярное произведение векторов:

$$a^2 = (BC)^2 = \Sigma_{BB}^{C} = \Sigma(B-C)^2;\ b^2 = (CA)^2 = \Sigma(A-C)^2;\ c^2 = (AB)^2 = \Sigma(B-A)^2. \qquad (4)$$

В обозначении метрического оператора трех точек $\Sigma_{AB}^{C} = \Sigma(A-C)(B-C)$ точка *C* (верхний индекс знака суммы) обозначает, что эта точка принята за начальную и произведен переход к скалярному произведению векторов $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$. Раскрыть знак суммы – это значит перейти к координатам и просуммировать разности по всем *n*-координатам:

$$\begin{aligned} &\Sigma_{AB}^{C} = \Sigma(A-C)(B-C) = \\ &= (x_A - x_C)(x_B - x_C) + (y_A - y_C)(y_B - y_C) + (z_A - z_C)(z_B - z_C) + (t_A - t_C)(t_B - t_C). \end{aligned} \qquad (5)$$

Вычислительный алгоритм центра вписанной в треугольник окружности имеет вид:

$$A(x_A, y_A, z_A, t_A),\ B(x_B, y_B, z_B, t_B),\ C(x_C, y_C, z_C, t_C), \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 + (t_B - t_C)^2}, \\ b &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 + (t_A - t_C)^2}, \\ c &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 + (t_B - t_A)^2}, \end{aligned} \qquad (6)$$

$$x_K = \frac{a(x_A - x_C) + b(x_B - x_C)}{a+b+c} + x_C,\; y_K = \frac{a(y_A - y_C) + b(y_B - y_C)}{a+b+c} + y_C,$$
$$z_K = \frac{a(z_A - z_C) + b(z_B - z_C)}{a+b+c} + z_C,\; t_K = \frac{a(t_A - t_C) + b(t_B - t_C)}{a+b+c} + t_C. \tag{7}$$

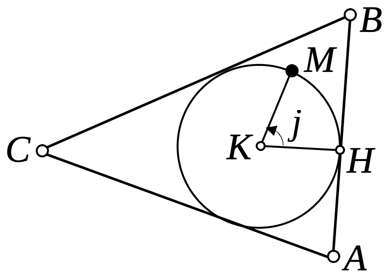

Рис. 1. Схема определения центра *K* окружности, вписанной в треугольник *ABC*

Для решения второй части задачи определим точку *H* основания перпендикуляра опущенного из точки *K* на прямую *AB* (рис. 1).

Для этого применим формулу точечного исчисления для определения точки *H*:

$$H = \frac{A\Sigma_{AK}^{B} + B\Sigma_{BK}^{A}}{\Sigma_{AK}^{B} + \Sigma_{BK}^{A}} = \frac{A\Sigma_{AK}^{B} + B\Sigma_{BK}^{A}}{c^2}. \tag{8}$$

Определим метрические операторы, использованные в этой формуле для точки *H*, подставим их выражения через вершины симплекса *A*, *B*, *C*, после подстановки и преобразований, получим:

$$H = \frac{A(ac + \Sigma_{AC}^{B}) + B(bc + \Sigma_{BC}^{A})}{c(a+b+c)}. \tag{9}$$

Далее определяем радиус r искомой окружности:

$$r = \frac{\sqrt{b^2(\Sigma_{AC}^{B})^2 + a^2(\Sigma_{BC}^{A})^2 + 2\Sigma_{AB}^{C}\Sigma_{AC}^{B}\Sigma_{BC}^{A}}}{c(a+b+c)}. \tag{10}$$

Учитывая, что метрические операторы выражаются через длины сторон треугольника:

$$\Sigma_{BC}^{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2},\; \Sigma_{AC}^{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2},\; \Sigma_{AB}^{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \tag{11}$$

то можно r выразить через длины сторон треугольника *ABC*. Если метрические операторы задать в виде:

$$\Sigma_{BC}^{A} = b\cos g,\; \Sigma_{AC}^{B} = ac\cos g,\; \Sigma_{AB}^{C} = ab\cos g, \tag{12}$$

то можно получить выражение r и *H* через длины векторов $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ репера и угла между ними.

Переходим к решению третьей части задачи. В качестве параметра для точечного уравнения вписанной в треугольник окружности *M* выбираем угол $0 \le j \le 2p$, где $j = \angle MKH$. Сначала проведем работу в прямоугольном симплексе *HBK*, а затем перейдем к первоначальному симплексу *CAB*. Определим длину сторон этого треугольника:

$$HB = \frac{\Sigma_{BK}^{A}}{c},\; BK = \frac{\sqrt{c^2 r^2 + (\Sigma_{BK}^{A})^2}}{c}. \tag{13}$$

Далее применяем стандартную параметризацию плоскости *HBK*:

$$M = \frac{(H-K)s_{MBK} + (B-K)s_{HMK}}{s_{HBK}} + K. \tag{14}$$

Обозначим $\angle BKH = d$, тогда имеем:

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{(H-K)s_{MBK}+(B-K)s_{HMK}}{s_{HBK}}+K=(H-K)\frac{\sin(d-j)}{\sin d}+(B-K)\frac{r\sin j}{BK\sin d}+K= \\
&=(H-K)\left[\cos j-\frac{\cos d\sin j}{\sin d}\right]+(B-K)\frac{r\sin j}{BK\sin d}+K= \\
&=(H-K)\left[\cos j-\frac{r\sin j}{HB}\right]+(B-K)\frac{r\sin j}{HB}+K= \\
&=(H-K)\cos j+(B-H)\frac{r\sin j}{HB}+K.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Подставляя значения точек H, K переходим к первоначальному симплексу CAB:

$$
\begin{aligned}
M &= \left(\frac{(A-C)\Sigma_{AK}^{B}+(B-C)\Sigma_{BK}^{A}}{c^2}-\frac{(A-C)a+(B-C)b}{a+b+c}\right)\cos j+ \\
&+\frac{(B-C+C-A)\Sigma_{AK}^{B}}{c}\frac{r\sin j}{\Sigma_{BK}^{A}}+\frac{(A-C)a+(B-C)b}{a+b+c}+C.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Окончательно точечное уравнение окружности, вписанной в треугольник ABC, принимает вид:

$$M=(A-C)p(j)+(B-C)q(j)+C, \tag{17}$$

где $p(j)=\dfrac{\Sigma_{AK}^{B}\cos j}{c^2}-\dfrac{r\Sigma_{AK}^{B}\sin j}{c\Sigma_{BK}^{A}}+\dfrac{a(1-\cos j)}{a+b+c}$,

$$q(j)=\frac{\Sigma_{BK}^{A}\cos j}{c^2}-\frac{r\Sigma_{AK}^{B}\sin j}{c\Sigma_{BK}^{A}}-\frac{b(1-\cos j)}{a+b+c},\ 0\le j\le 2p\ .$$

Обратим внимание, что полученная точечная формула для окружности M имеет один и тот же вид независимо от размерности n-пространства, в котором заданы вершины A, B, C треугольника. Разница выявляется в вычислительном алгоритме и в параметрическом уравнении (количеством уравнений в системе). Так, параметрически искомая окружность выражается системой из четырех уравнений:

$$
\begin{cases}
x=(x_A-x_C)p(j)+(x_B-x_C)q(j)+x_C \\
y=(y_A-y_C)p(j)+(y_B-y_C)q(j)+y_C \\
z=(z_A-z_C)p(j)+(z_B-z_C)q(j)+z_C \\
t=(t_A-t_C)p(j)+(t_B-t_C)q(j)+t_C
\end{cases},\ 0\le j\le 2p
\tag{18}
$$

В решении последней части задачи применены специфические приемы точечного исчисления, поэтому для полного понимания проведенных преобразований требуется особый опыт работы в нем.

Выводы. Решена задача по указанию места точечного исчисления в ряду существующих исчислений, показаны возможности исчисления вне зависимости от размерности пространства и проиллюстрированы эти возможности на конкретном примере.

1. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: Дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01. – Макеевка, 1995. – 227с.
2. Малютина Т.П. Интерпретация вычислительной геометрии плоских фигур в точечном исчислении: Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. – Макеевка, 1998. – 161 с.
3. Балюба І.Г. Основи математичного апарату точкового числення. / Балюба І.Г., Поліщук В.І., Малютіна Т.П.; Праці ТДАТА. Вип.4. Прикладна геометрія та інженерна графіка, т.29. – Мелітополь, 2005. - С.22-30.