

УДК 515.2:519.3

А.Н.Хомченко, Е.И.Литвиненко, И.А.Астионенко
Херсонский национальный технический университет

СТАНДАРТНЫЕ СЕРЕНДИПОВЫ МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Установлены причины возникновения парадокса "отрицательных" узловых нагрузок в элементах серендипова семейства.

Ключевые слова: серендиповы аппроксимации стандартного типа; базисные функции и линейчатые поверхности; парадокс "отрицательных нагрузок" в поузловом распределении равномерной массовой силы.

Введение. В работе рассматриваются базисные функции стандартного типа для элементов серендипова семейства. Серендиповы конечные элементы (СКЭ) можно получить из лагранжевых конечных элементов (ЛКЭ) путем исключения внутренних узлов (известная процедура конденсации, сгущения). Мы возвращаемся к поучительному парадоксу "отрицательных нагрузок" в узлах СКЭ высших порядков, пытаемся найти объяснение и установить причины его появления. Рассмотренные здесь вопросы не нашли освещения в работах предшественников. Отсутствие физического правдоподобия в поузловом распределении нагрузки – серьезный недостаток СКЭ высших порядков, а "отрицательные нагрузки" – острая форма неадекватности моделей. Именно этот парадокс определил повышенный интерес к серендиповым аппроксимациям, указал район поисков и в конечном итоге вывел на альтернативные СКЭ. Подобные парадоксы вносят "возмущение", но в силу этого обогащают арсенал познавательных средств.

Анализ предшествующих публикаций, цель статьи. Пытаясь разобраться в причинах возникновения парадокса "отрицательных нагрузок", мы, естественно, обращаемся к работам авторитетных предшественников. История СКЭ высших порядков началась в работе [1], написанной инженерно-ориентированными учеными, обладающими изобретательной находчивостью и замечательной интуицией. По признанию авторов [1], первые базисы СКЭ были получены подбором. С тех пор в МКЭ сохраняется твердое убеждение, что СКЭ плохо поддаются какой-либо формализации. Мы думаем, что это заблуждение, которое вполне согласуется с законом сохранения невежества [2]. О стандартных серендиповых полиномах пишут многие авторы. Например [3-7]. Удивительно, что только Зенкевич [3] обращает внимание на парадокс "отрицательных нагрузок". Он справедливо оценивает поузловое распределение с отрицательными нагрузками в угловых узлах как противоестественное, лишённое здравого смысла. К сожалению, Зенкевич советует смириться с физически аномальным распределением, поскольку математически локализация нагрузки выполнена правильно. Однако правильная формула – слабое утешение для приверженцев механических и теплотехнических аналогий. Редактор перевода профессор Победря правильно замечает, что некоторые высказывания Зенкевича могут быть приняты "в штыки", а его интуитивные соображения не заменят математического исследования. Мы убеждены, что именно математическое исследование причин парадокса и коррекция узловых нагрузок способны вернуть доверие к серендиповым аппроксимациям.

Цель статьи – показать, что первопричина парадокса "отрицательных нагрузок" кроется в самом определении стандартного СКЭ высшего порядка. А прямым "виновником" неадекватности модели является линейчатость базисных поверхностей, которая сковывает свободу формообразования внутри СКЭ. Ниже мы покажем, что существует математически обоснованные и физически естественные распределения узловых нагрузок на СКЭ высших порядков.

Основная часть. Обычно узловая доля нагрузки определяется интегральным усреднением соответствующей базисной функции по площади КЭ:

$$f_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, h) dS, \quad (1)$$

где $N_i(x, h)$ – базисная функция, отвечающая узлу i ; dS – элемент площади КЭ; S – площадь КЭ. Понятно, что формула (1) пригодна и для лагранжевых элементов, хотя в этом случае вычисления можно упростить, воспользовавшись *a priori* весами квадратур Ньютона-Котеса. Для ЛКЭ эта процедура реализуется без исключения во всех узлах, для СКЭ – только в промежуточных. Доли угловых узлов вычисляются из условия весового баланса. Можно воспользоваться процедурой конденсации [6], исключив внутренние узлы ЛКЭ. Этот простой и наглядный подход позволяет обнаружить существование альтернативных базисов СКЭ.

Преобразование ЛКЭ в СКЭ проследим на примере элемента бикубической интерполяции. На рис. 1 показаны соответствующие элементы ($|x| \leq 1, |h| \leq 1$).

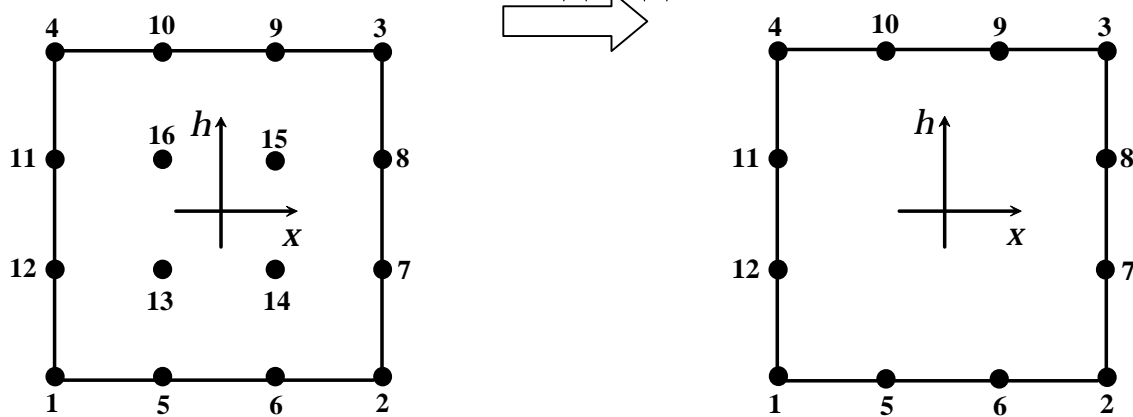


Рис. 1. ЛКЭ (16 узлов) и СКЭ (12 узлов)

Пусть p_i – доля единичной нагрузки в угловых узлах $i = 1, \dots, 4$; q_i – доля нагрузки в промежуточных узлах $i = 5, \dots, 12$; r_i – доля нагрузки во внутренних узлах ЛКЭ $i = 13, \dots, 16$.

Нагрузка от равномерной массовой силы на ЛКЭ локализуется следующим образом: $p_i = \frac{1}{64}$, $q_i = \frac{3}{64}$, $r_i = \frac{9}{64}$. Исключение внутренних узлов осуществляется путем распределения “внутренней” нагрузки по граничным узлам. Так ЛКЭ превращается в СКЭ. Легко догадаться, что существует бесчисленное множество способов распределения. Если $\frac{9}{64}$ распределить поровну

между тремя ближайшими граничными узлами, то получим на СКЭ: $p_i = \frac{2}{32}$, $q_i = \frac{3}{32}$.

Любопытно, что это же распределение можно получить другим путем на основе стержневой аналогии. При этом СКЭ представляется в виде четырех стержней, состыкованных в углах, а далее на каждом стержне применяется правило Ньютона-Котеса “трех восьмых”. Как видим, такое распределение легко интерпретируется физически, чего не скажешь о распределении Зенкевича

[3]: $p_i = -\frac{1}{8}$, $q_i = \frac{3}{16}$. Выпишем стандартные серендиповы многочлены [5], порождающие противоестественное распределение:

$$N_i(x_i, h_i) = \frac{1}{32}(1+x_i x)(1+h_i h)(9(x^2+h^2)-10), \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, 4; \quad x_i, h_i = \pm 1.$$

$$N_i(x_i, h_i) = \frac{9}{32}(1-x^2)(1+h_i h)(1+9x_i x)$$

$$i = 5, 6, 9, 10; \quad x_i = \pm \frac{1}{3}; \quad h_i = \pm 1.$$

$$N_i(x_i, h_i) = \frac{9}{32}(1-h^2)(1+x_i x)(1+9h_i h)$$

$$i = 7, 8, 11, 12; \quad x_i = \pm 1; \quad h_i = \pm \frac{1}{3}.$$

В соответствии с интерполяционной гипотезой типа Лагранжа функции $N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ должны удовлетворять следующим требованиям:

$$N_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{h}_k) = d_{ik}, \quad \sum_{i=1}^{12} N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = 1, \quad (3)$$

где d_{ik} – символ Кронекера; i – номер функции, k – номер узла. Чтобы установить причины возникновения парадокса “отрицательных нагрузок”, проанализируем определение СКЭ на примере элемента 3-го порядка (рис. 1, многочлены (2)). В [4] на с. 173 читаем: “... базисные функции получаются умножением членов степени 3 по одной переменной на линейные члены по другой переменной”. Чувствуется стремление авторов обеспечить на границах КЭ совпадение серендиповой и лагранжевой аппроксимации – это сохраняет C^0 -гладкость. Авторы [5] на стр. 203 пишут, что характеристика СКЭ как кубического относится к изменению $N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ в направлении \mathbf{x} при постоянном \mathbf{h} или в направлении \mathbf{h} при постоянном \mathbf{x} . Напомним, что некоторые авторы, например, [6] такой СКЭ называют бикубическим. Как видим, у инженеров [4] и математиков [5] определения СКЭ совпадают. Из стандартного определения СКЭ следует, что все функции $N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ (кроме угловых), ассоциируемые с некоторой стороной КЭ, должны обязательно изменяться линейно в направлении, перпендикулярном этой стороне. Такое ограничение никак не обосновано, хотя мотивы создателей СКЭ понятны. При подборе многочленов с двумя аргументами очень удобно воспользоваться одномерной лагранжевой интерполяцией и хорошо известным методом разделения переменных (“Разделяй и властвуй!”). Через четыре года после появления СКЭ у Тейлора [7], предложившего нематричный метод построения базиса СКЭ, была возможность исправить этот недостаток, однако Тейлор, по-видимому, находился под сильным влиянием предшественников. Его базисы совпали со стандартными, в которых со всеми промежуточными узлами ассоциируются линейчатые поверхности (с нулевой гауссовой кривизной). Неспособные прогибаться линейчатые поверхности скрывают модель СКЭ (жесткая модель). Количество таких поверхностей растет с увеличением порядка элемента. Так, на СКЭ 2-го порядка их 50%, 3-го порядка – 67%, 4-го порядка – 75%. При таком поведении “промежуточных” поверхностей весовой баланс (3) сохраняется только за счет образования глубоких “оврагов” на “угловых” поверхностях $N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, $i = \overline{1, 4}$. Появление “отрицательных нагрузок” в угловых узлах объясняется особенностями формообразования $N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h})$. Все это сопровождается появлением нежелательных кратных нулей в узлах, где обращается в ноль не только сама функция $N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, но и ее частные производные. Кстати, эти качества полиномов $N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ вовсе не предусмотрены интерполяционной гипотезой типа Лагранжа. Вот и выходит, что создатели стандартных СКЭ нарушили один из важнейших научных принципов, запрещающий умножать сущности сверх необходимого (бритва “Оккама”).

Задача построения альтернативной модели СКЭ, свободной от “негативизма” в распределении угловых нагрузок, была решена [8] через 14 лет после появления стандартных серендиповых полиномов. Первый альтернативный базис имеет вид:

$$N_i(x_i, h_i) = \frac{1}{32}(1 + x_i x)(1 + h_i h)(9(1 - x_i x - h_i h)^2 - 1),$$

$$i = 1, \dots, 4; \quad x_i, h_i = \pm 1.$$

$$N_i(x_i, h_i) = \frac{9}{32}(1 - x^2)(1 + h_i h)(9x_i x + h_i h) \quad (4)$$

$$i = 5, 6, 9, 10; \quad x_i = \pm \frac{1}{3}; \quad h_i = \pm 1.$$

$$N_i(x_i, h_i) = \frac{9}{32}(1-h^2)(1+x_i x)(x_i x + 9h_i h)$$

$$i = 7, 8, 11, 12; \quad x_i = \pm 1; \quad h_i = \pm \frac{1}{3}.$$

Соответствующее распределение узловых нагрузок: $p_i = \frac{1}{8}; q_i = \frac{1}{16}$.

Оказалось, что двух моделей (2) и (4) достаточно для генерирования бесконечного множества базисов с положительным распределением нагрузок. Например, чтобы получить базис, реализующий распределение: $p_i = \frac{2}{32}; q_i = \frac{3}{32}$ (стержневая аналогия), нужно усреднить базисы

(2) и (4) соответственно с весами $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Заметим, что благодаря появлению тринадцатого

параметра $x^2 h^2$ легко и быстро решается обратная задача: по наперед заданному распределению узловых нагрузок найти модель СКЭ, реализующую это распределение. Стандартные серендиповы многочлены с такой задачей не справляются. О новых подходах и нестандартных серендиповых многочленах можно почитать в [9].

Выводы. Устраняя внутренние узлы ЛКЭ, Зенкевич и его коллеги надеялись освободить аппроксимирующую поверхность над элементом. Надежды не оправдались, а появились другие ограничения, не предусмотренные интерполяционной гипотезой типа Лагранжа. В модели Зенкевича с промежуточными узлами ассоциируются ортогонально "армированные" поверхности, сконструированные по шаблону (поведение на границе). Эти поверхности обладают "памятью" и сохраняют профиль, сформированный на границе. Многопараметрические многочлены, описанные в [9], позволяют устранить многочисленные недостатки стандартных моделей СКЭ.

1. Ergatoudis I. Curved isoperimetric "quadrilateral" elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Internat. J. Solids Struct., — № 4. — 1968. — P. 31-42.
2. Сухотин А. Превратности научных идей / А. Сухотин. — М.: Молодая гвардия, 1991. — 271 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
4. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
5. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. — М.: Мир, 1981. — 304 с.
6. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. — М.: Мир, 1981. — 216 с.
7. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
8. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А.Н. Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 9 с. — Деп. в ВИНТИ 18.03.82, № 1213.
9. Астионенко И.А. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства / И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Науч. вестн. Серия: матем., физика. — № 5(60). — Вып. 16. — Белгород: БелГУ, 2009. — С. 15-31.