

УДК 514.18  
 Г.Я.Тулученко  
 ХНТУ (м. Херсон, Україна)

### ВПЛИВ ОПЕРАЦІЇ КОНДЕНСАЦІЇ НА ВЛАСТИВОСТІ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ ТРИКУТНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

У статті досліджується сумісна динаміка змін локальних критеріїв якості апроксимаційних властивостей модифікованого трикутного скінченного елемента третього порядку при проведенні операції внутрішньої конденсації.

*Ключові слова:* трикутний скінченний елемент, внутрішня конденсація, якість базису.

**Постановка проблеми.** При застосуванні у методі скінчених елементів (МСЕ) операції конденсації як внутрішньої, так і зовнішньої, основна увага приділяється зменшенню розмірності глобальної системи рівнянь, побудові ефективних алгоритмів ансамблювання матриць елементів тощо. У той же час у користувачів програмних продуктів, що реалізують МСЕ, існує потреба у наочному дослідженні динаміки змін показників якості базисів, що відбуваються під час виконання внутрішньої конденсації.

**Аналіз основних досліджень та публікацій.** У літературі описані різні підходи до реалізації операції конденсації при розв'язанні певних класів граничних задач [1-4]. При цьому думки авторів щодо наслідків виключення внутрішніх вузлів елементів для апроксимуючих властивостей базисів різняться. У роботі [2] відзначається, що апроксимуючі властивості модифікованого елемента знижуються у порівнянні із вихідним елементом. У роботі [4] автором наводиться доведена ним теорема про обчислювальну еквівалентність базисів, що отримуються у результаті операції конденсації.

Приклад конденсації внутрішнього вузла для трикутного скінченного елемента третього порядку, який досліджується у даній статті, описаний у [3]. Але, як зазначають автори роботи [5], Ф. Сьярле і П.-А. Рав'яр, розглянувши конкретну лінійну комбінацію базисних функцій, не обґрунтовують її переваги у порівнянні з нескінченною множиною інших припустимих коефіцієнтів у цій лінійній комбінації.

Локальні оцінки якості базисів окремих СЕ описані у [6-7].

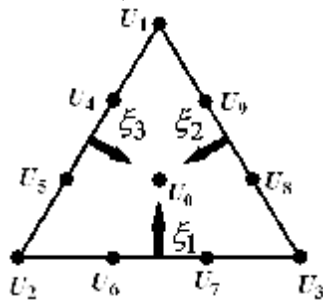


Рис. 1. Трикутний СЕ III порядку лагранжевого типу

**Цілі статті.** Виконати системний аналіз динаміки змін низки локальних оцінок апроксимаційної спроможності базису трикутного СЕ III порядку лагранжевого типу при реалізації операції внутрішньої конденсації.

**Основна частина.** Формули (1) є прикладами виразів базисних функцій трикутного СЕ III порядку лагранжевого типу (рис. 1) у барицентричних координатах для вузла у барицентрі трикутника  $U_0$ , одного вузла у вершині  $U_1$  та одного вузла  $U_4$  на стороні СЕ:

$$N_0 = 27x_1x_2x_3; \quad N_1 = \frac{1}{2}x_1(3x_1 - 1)(3x_1 - 2); \quad N_4 = \frac{9}{2}x_1x_2(3x_1 - 1). \quad (1)$$

Вирази інших базисних функцій отримують підходящою перестановкою індексів [8]. Там же наведені рівняння базисних функцій трикутних СЕ першого та другого порядків.

Базиси трикутних СЕ перших трьох порядків характеризуються такими числами обумовленості  $cond(G)$  у нормі  $L_2$  складених для них матриць Грама  $G$ : для СЕ I порядку – 4,00, для СЕ II порядку – 17,21 і для СЕ III порядку – 33,97 (рис. 2). Інтегрування виконувалося по площі трикутників, які вписані у коло одиничного радіуса.

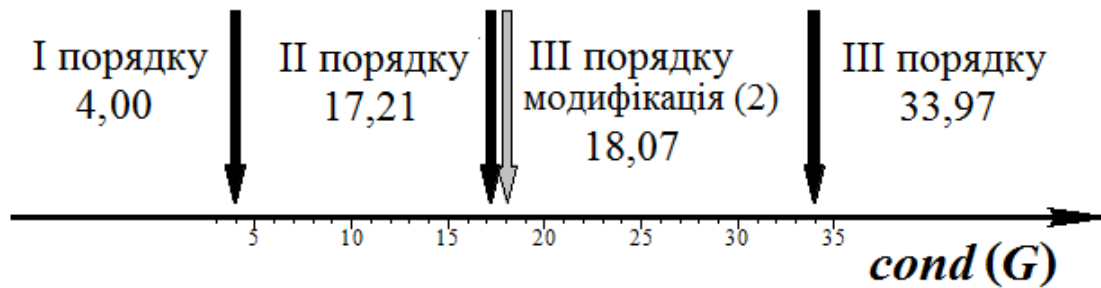


Рис. 2. Числа обумовленості матриць Грама для базисів трикутних СЕ

Очевидно, що зростання порядку СЕ приводить до зростання числа обумовленості матриці Грама. Оскільки відомо [7], що зростання числа обумовленості матриці Грама негативно позначається на апроксимаційних властивостях СЕ, то доцільним є дослідити можливості операції внутрішньої конденсації для нейтралізації негативного впливу зростання кількості вузлів (зокрема появи внутрішніх вузлів) при зростанні порядку СЕ.

Розподілимо вираз базисної функції для внутрішнього центрального вузла між базисними функціями, що асоціюються із зовнішніми вузлами, тобто виконаємо операцію внутрішньої конденсації, за формулами:

$$\left. \begin{aligned} F_i &= N_i + \frac{1}{3} \cdot (1 - 6a) \cdot N_0, & i = \overline{1;3} \\ F_i &= N_i + a \cdot N_0, & i = \overline{4;9} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Значення параметра  $a$  із проміжку  $[0; 1/6]$  відповідають природному розподілу внеску базисної функції  $N_0$  між базисними функціями, асоційованими із зовнішніми вузлами:

- коли  $a = 0$ , внесок базисної функції  $N_0$  розподіляється виключно між базисними функціями для вузлів у вершинах СЕ;
- коли  $a = \frac{1}{6}$ , внесок базисної функції  $N_0$  розподіляється виключно між базисними функціями для вузлів на сторонах СЕ.

Зауважимо, що умова збереження вагового балансу  $\sum_{i=1}^9 F_i = 1$  не порушується і при значеннях параметра  $a$ , що виходять за проміжок  $[0; 1/6]$ , але, як буде видно із подальших досліджень, при цьому значно погіршуються апроксимаційні властивості такого базису. Приклади поверхонь модифікованих базисних функцій (2) для різних значень параметра  $a$  наведені на рисунках у табл. 1.

Дослідимо залежність від значення параметра  $a$  таких показників якості модифікованого базису  $\{F_i, i = \overline{1;9}\}$  як величина визначника матриці Грама, число обумовленості матриці Грама та величина сліду матриці жорсткості (обчислена за припущення ізотропного середовища із одиничною матрицею коефіцієнтів теплопровідності або пружності, або фільтрації в залежності від фізичного змісту конкретної задачі) (рис. 3-5).

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
| <p>Рис. 3. Залежність величини визначника матриці Грама для базису (2)</p> | <p>Рис. 4. Залежність величини числа обумовленості матриці Грама у нормі метрики <math>L_2</math> для базису (2)</p> | <p>Рис. 5. Залежність величини сліду матриці жорсткості для базису (2)</p> |

Таблиця 1

Приклади поверхонь базисних функцій (1) і (2) трикутного СЕ III порядку

| Параметр конденсації | Кутові вузли (переріз поверхонь) | Вузли на сторонах |
|----------------------|----------------------------------|-------------------|
| $a = 0$              |                                  |                   |
| $a = 1/9$            |                                  |                   |
| $a = 1/6$            |                                  |                   |

Заради наочності перейдемо до подання результатів обчислень у наближеному вигляді, хоча самі дослідження виконувалися за допомогою точних методів (де це можливо) системи Maple.

Наближене рівняння залежності (рис. 3) значення визначника матриці Грама від параметра конденсації  $a$  має вигляд:

$$\det(G) \approx 10^{-12} \cdot (223,303a^2 - 49,623a + 4,480). \quad (3)$$

Функція (3) досягає свого мінімального значення  $\min \det(G) \approx 1,723 \cdot 10^{-12}$ , коли  $a = 1/9$ .

Відрізок  $[0; 1/6]$  значень параметра  $a$  відповідає ділянці графіка залежності числа обумовленості матриці Грама у нормі метрики  $L_2$ , коли значення цього числа практично не змінюється і наближено дорівнює  $\approx 18,07$  (рис. 4).

Залежність (рис. 5) величини сліду матриці жорсткості від параметра конденсації  $a$  має вигляд:

$$Trace = \frac{\sqrt{3}}{40} \cdot (2916a^2 - 972a + 493). \quad (4)$$

Найменше значення сліду матриці жорсткості досліджуваного модифікованого елемента на відрізьку  $[0; 1/6]$  досягається у точці  $x = 1/6$  і дорівнює  $\frac{103}{10} \sqrt{3} \approx 17,840$ , причому його локалізація співпадає із точкою глобального мінімуму функції (4).

Також дослідимо динаміку змін вузлових значень розподілу рівномірної масової сили від параметра конденсації  $a$  (табл. 2). Нагадаємо, що спектр міжвузлового розподілу рівномірної масової сили складається із середніх значень подвійних інтегралів від базисних функцій по площі СЕ:

$$g_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i dS,$$

де  $D$  – поточний СЕ, по площі якого відбувається інтегрування;  $dS$  – елемент площі поточного СЕ;  $S$  – площа поточного СЕ;  $i$  – номер вузла.

Таблиця 2

Спектр вагових коефіцієнтів базисних функцій (1) та (2)

| Базис     |           | Вагові коефіцієнти базисних функцій, які асоційовані з |                                 |                               |
|-----------|-----------|--|---------------------------------|-------------------------------|
|           |           | центральний вузлом                                     | кутовими вузлами                | вузлами на сторонах           |
| Базис (1) |           | $\frac{9}{20}$   | $\frac{1}{30}$                  | $\frac{3}{40}$                |
| Базис (2) | $a \in R$ | —  | $\frac{1}{60} \cdot (11 - 54a)$ | $\frac{3}{40} \cdot (1 + 6a)$ |
|           | $a = 0$   | —  | $\frac{11}{60}$                 | $\frac{3}{40}$                |
|           | $a = 1/9$ | —  | $\frac{1}{12}$                  | $\frac{1}{8}$                 |
|           | $a = 1/6$ | —  | $\frac{1}{30}$                  | $\frac{3}{20}$                |

Природний спектр міжвузлового розподілу рівномірної масової сили спостерігається, коли вагові коефіцієнти базисних функцій для внутрішніх вузлів на сторонах СЕ (у даному випадку

$\{g_i, i = \overline{4;9}\}$ ) більші за вагові коефіцієнти базисних функцій для вузлів у вершинах СЕ  $\{g_i, i = \overline{1;3}\}$ ). Ця вимога виконується для тих значень параметра конденсації  $a$ , які задовольняють нерівності:

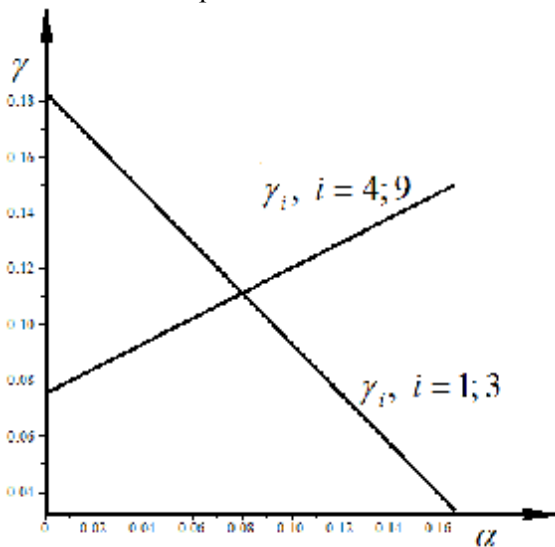


Рис. 6. Залежність вагових коефіцієнтів  $g_i$  від значення параметра конденсації  $a$

$$\frac{1}{60} \cdot (11 - 54a) < \frac{3}{40} \cdot (1 + 6a),$$

тобто, коли  $a > \frac{13}{162}$  або наближено  $a > 0,080$  (рис. 6).

**Висновки.** Таким чином, базисні функції (2) мають кращі апроксимаційні властивості, коли значення параметра конденсації знаходяться у проміжку

$$a \in \left( \frac{13}{162}; \frac{1}{6} \right] \quad \text{або} \quad \text{наближено}$$

$a \in (0,80; 0,167]$ . При цьому такі критерії оптимізації апроксимаційних властивостей базисних функцій трикутного СЕ третього порядку як число обумовленості матриці Грама у нормі метрики  $L_2$ , величина сліду

матриці жорсткості, природність спектру міжвузлового розподілу рівномірної масової сили виявилися несуперечливими. Очевидно, що остаточний висновок щодо оптимального значення параметра конденсації  $a$  потрібно робити, виходячи із типу конкретної крайової задачі, до розв'язання якої планується залучати СЕ із базисом (2).

У зв'язку з цим окремо відзначимо, що не існує такого значення параметра конденсації  $a$ , при якому б базисні функції модифікованого базису (2) були гармонічними, тобто задовольняли рівнянню Лапласа.

**Перспективи подальших досліджень.** У подальшому автор статті планує охопити у дослідженнях інші види СЕ та дослідити сумісний вплив операцій конденсації та наближеного інтегрування на апроксимаційні властивості модифікованих СЕ.

1. Норри Д. Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ. / Д. Норри, Ж. де Фриз. — М.: Мир, 1981. — 304 с.
2. Стренг Г. Теория метода конечных элементов: Пер. с англ. / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М.: Мир, 1977. — 350 с.
3. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. — М.: Мир, 1980. — 512 с.
4. Шопов П.Й. Метод конденсации для задач механики несжимаемых флюидов / П.Й. Шопов // Сердика: Българско математическо списание. — 1984. — Т. 10. — С. 198—205.
5. Пинежанинов Ф. Базисные функции для конечных элементов [Электронный ресурс] / Ф.Пинежанинов, П.Пинежанинов // Exponenta.ru — Режим доступа: [http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta\\_RU/soft/Mathemat/pinega/a1/a1.asp.htm](http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/soft/Mathemat/pinega/a1/a1.asp.htm)
6. Секулович М. Метод конечных элементов / М. Секулович. — М.: Стройиздат, 1993. — 664 с.
7. Пинежанинов Ф. Свойства базисных функций [Электронный ресурс] / Ф.Пинежанинов, П.Пинежанинов // Exponenta.ru — Режим доступа: [http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta\\_RU/soft/Mathemat/pinega/a2/a2.asp.htm](http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/soft/Mathemat/pinega/a2/a2.asp.htm)
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М.: Мир, 1979. — 392 с.