

УДК 514.18

В.І.Скочко

Київський національний університет будівництва та архітектури

## ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ ФОРМ В ПРОЦЕСІ МОДЕЛЮВАННЯ НДС ПРУЖНОГО ТІЛА ЗАСОБАМИ ДИСКРЕТНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

*У роботі розглядається варіант визначення компонентів тензора напружень у точках дискретно представленого тіла на основі застосування інтерполяційних співвідношень та функцій форм методу скінченних елементів.*

Ключові слова: дискретизація, скінченний елемент, функції форм, тензор напружень.

**Постановка проблеми.** При дослідженні деформованого стану деякого пружного середовища (тіла) під дією внутрішніх та зовнішніх сил часто виникає потреба у визначенні напружень у необхідних точках цього середовища. Саме здатність тіла чинити пружний опір шляхом виникнення внутрішніх зусиль і спричиняє загальну картину його деформацій. Отже, якщо відомий початковий і деформований стани тіла, то можуть бути розраховані напруження у кожній його точці. Тепер виникає лише питання щодо обрання того чи іншого методу визначення напружень, в залежності від постановки даної задачі.

Дана стаття являється доповненням роботи [1], де було запропоновано спосіб визначення напружено-деформованого стану (НДС) об'ємного пружного середовища на основі поєднання узагальненого статико-геометричного методу формування геометричних об'єктів та узагальненого закону Гука. Цей спосіб дає можливість чітко прослідкувати взаємозв'язок між напруженнями у тілі і його деформаціями, що врівноважуються в процесі ітераційного числення, необхідність якого зумовлена нелінійною залежністю саме між напруженнями та деформаціями. Однак, вище згаданий спосіб передбачає визначення лише напружень в характерних місцях досліджуваного тіла, а саме на гранях окремих фрагментів, на які умовно поділяється тіло в процесі дискретизації, тоді як може виникнути необхідність у визначенні напружень у будь-якій внутрішній точці одного з фрагментів. Для вирішення даної проблеми, в першу чергу, слід встановити залежність між координатами досліджуваної точки даного фрагменту та координатами вузлів останнього.

**Аналіз останніх досліджень.** У вище зазначеній роботі [1] представлений варіант дискретного розбиття досліджуваного середовища на окремі фрагменти, що у початковому – недеформованому стані являли собою прямокутні паралелепіпеди (або куби у часткових випадках) та приймали форму довільних шестигранників у процесі деформації. В роботі [2] були показані й інші варіанти поділу тіла на елементарні фрагменти. Головними ознаками усіх варіантів розбиття були: 1) усі ребра елементарних фрагментів до і після деформації залишалися прямими відрізками, 2) зв'язок між різними елементами континуума здійснювався через вершини (або вузлові граничні точки), 3) при переході через спільну грань двох сусідніх елементів передбачалася  $C^0$ -неперервність (шляхом «натягування» на ребра спільної грані мінімальної роздільної поверхні), що в достатній мірі задовольняє вимогам 3-вимірних задач чисельного моделювання роботи пружних середовищ.

**Основна частина.** Повертаючись до поставленої проблеми, слід зазначити, що для встановлення залежності між координатами вузлових та довільних точок елементарного фрагменту зручно використовувати інтерполяційні поліноми та функції форми (перші одержуються шляхом використання останніх), які є широко уживаними у методі скінченних елементів (МСЕ) [3,4]. В рамках інтерполяційної методики зміну функції у деякій області можна описати за допомогою значень функції та її похідних у заздалегідь обраних точках даної області на основі інтерполяції [5,6,7,8]. Застосування функцій форм МСЕ в нашому випадку пояснюється тим, що останні легко будуються для елементів, які володіють усіма тими ж ознаками, що й згадані в роботах [1,2] елементарні фрагменти. Для опису кожного фрагменту (у відповідності із МСЕ) необхідно ввести дві системи координат [3]:

$$X^T = [x \ y \ z] = [x_1 \ x_2 \ x_3]; \quad (1)$$

$$\xi^T = [x_1 \ x_2 \ x_3], \quad (2)$$

де  $X^T$  – глобальна система координат (тут, на відміну від [1], окрім звичного позначення глобальних координат  $x, y$  та  $z$  ми використовуватимемо позначення із індексами  $x_1, x_2$  та  $x_3$  відповідно, для подальшого скорочення записів);  $x^T$  – локальна система координат.

Локальна система координат відноситься до одного скінченного елемента. Рівняння перетворення між локальними і глобальними координатами в загальному випадку нелінійні:

$$X = X(\xi); \quad \xi = \xi(X), \quad (3)$$

так як криволінійні локальні координати дають простий опис елемента із викривленими гранями. Для криволінійних об'ємних елементів, віднесених до локальних координат  $x_i$ , зв'язок між частковими похідними першого порядку по локальним та глобальним координатам встановлюється матрицею Якобі:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = J \frac{\partial}{\partial x}; \quad J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}. \quad (4)$$

При однозначному зв'язку між локальними та глобальними координатами рівняння (4) може бути обернене:

$$\frac{\partial}{\partial x} = R \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad R = J^{-1}. \quad (5)$$

Якщо позначити глобальні координати вузла  $L$  через  $x_{iL}$ , а локальні – через  $x_{iL}$ , то сукупності координат одного вузла, а також усіх  $K$  координат вузлів одного елемента можна представити у формі вектор-стовпців:

$$X_L^T = [x_{1L} \quad x_{2L} \quad x_{3L}]; \quad \xi_L^T = [x_{1L} \quad x_{2L} \quad x_{3L}]; \quad (6)$$

$$X_{L..K}^T = [x_{11} \quad x_{21} \quad x_{31} \quad \dots \quad x_{1L} \quad x_{2L} \quad x_{3L} \quad \dots \quad x_{1K} \quad x_{2K} \quad x_{3K}]; \quad (7)$$

$$\xi_{L..K}^T = [x_{11} \quad x_{21} \quad x_{31} \quad \dots \quad x_{1L} \quad x_{2L} \quad x_{3L} \quad \dots \quad x_{1K} \quad x_{2K} \quad x_{3K}].$$

Для об'ємних елементів (крім трикутних елементів і елементів у формі тетраєдрів) співвідношення між глобальними і локальними координатами мають вигляд:

$$x_i(x_1, x_2, x_3) = \sum_{(L)} N_L(x_1, x_2, x_3) x_{iL}, \quad (8)$$

де  $N_L$  – це функції форми вузлів (або вершин елементарних фрагментів у нашій інтерпретації) об'ємного елемента. Так, наприклад, для 8-ми вершин шестигранних елементів, геометрична модель яких співпадає з моделлю шестигранних фрагментів, описаних в [1], функції форм матимуть наступний вигляд:

$$N_L = \frac{1}{8} (1 + x_1 x_{1L}) (1 + x_2 x_{2L}) (1 + x_3 x_{3L}) \quad (L=1, \dots, 8). \quad (9)$$

де  $x_i$  – локальні координати досліджуваної точки скінченного елемента.

Такі функції форми відповідають елементам так званого серендипова сімейства.

Фактично усі переміщення та деформації кожного елемента відбуваються в глобальній системі координат, тоді як координати усіх його точок у локальній системі залишаються сталими. Наочно процес деформації шестигранного скінченного елемента показано на рисунку 1.а.

В рамках лінійної теорії пружності діє узагальнений закон Гука. В області малих деформацій він із достатньою точністю описує стан багатьох реальних матеріалів. У матричній формі, із урахуванням початкових напружень  $s_0$  та початкових деформацій  $e_0$ , закон Гука має вигляд:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0, \quad (10)$$

де  $s$  – вектор-стовпець напружень

$$\sigma^T = [s_{xx} \quad s_{yy} \quad s_{zz} \quad t_{xy} \quad t_{yz} \quad t_{xz}] = [s_{11} \quad s_{22} \quad s_{33} \quad t_{12} \quad t_{23} \quad t_{13}]; \quad (11)$$

$e$  – вектор-стовпець деформацій

$$\varepsilon^T = [e_{xx} \quad e_{yy} \quad e_{zz} \quad e_{xy} \quad e_{yz} \quad e_{xz}] = [e_{11} \quad e_{22} \quad e_{33} \quad e_{12} \quad e_{23} \quad e_{13}]; \quad (12)$$

$E$  – симетрична матриця пружних сталей порядку  $6 \times 6$ . Для тривимірного анізотропного однорідного тіла ця матриця містить 21 константу матеріалу. Якщо матеріал ізотропний, то  $E$  набуває такого вигляду:

$$E = \frac{E}{(1-u)(1-2u)} \begin{pmatrix} 1-u & u & u & 0 & 0 & 0 \\ u & 1-u & u & 0 & 0 & 0 \\ u & u & 1-u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2u)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2u)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2u)/2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де  $E$  – це модуль пружності даного матеріалу;  $u$  – це коефіцієнт Пуассона.

Зв'язок між вектором деформації  $\varepsilon$  та вектором переміщень  $\mathbf{u}$  в лінійній теорії пружності задається лінійним кінематичним рівнянням [3]:

$$\varepsilon = D\mathbf{u}, \quad (14)$$

де  $D$  – матриця диференційного оператора, що для об'ємних тіл має наступний вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix} \quad \left( \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (15)$$

Узагальнені переміщення  $\mathbf{u}$  в кожному вузлі  $L$  об'єднуються в вектор  $\mathbf{v}_L$ . Якщо

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] - \quad (16)$$

вектор-функція поля переміщень точок елемента, то узагальнений вектор переміщень  $\mathbf{v}_L$  включає відповідні величини для усіх вузлових точок  $L=1,2,\dots,K$  одного елемента:

$$\mathbf{v}^T = [v_1 \quad \dots \quad v_L \quad \dots \quad v_K] = [u_{1L} \quad u_{2L} \quad u_{3L} \quad \dots \quad u_{1K} \quad u_{2K} \quad u_{3K}]. \quad (17)$$

Однак, переміщення  $\mathbf{u}$  досліджуваного скінченного елемента мають бути представлені через узагальнений вектор переміщень  $\mathbf{v}$  та матрицю функцій форм  $N$  наступною залежністю:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = N(x_1, x_2, x_3)\mathbf{v}. \quad (18)$$

Тут матриця функцій форм  $N$  має наступний вигляд:

$$N(x_1, x_2, x_3) = [N_1 I \quad \dots \quad N_L I \quad \dots \quad N_K I], \quad (19)$$

де  $I$  – одинична матриця  $m \times m$  (де  $m$  – розмірність задачі).

Таким чином, враховуючи рівності (14) та (18), приходимо до такої форми запису узагальненого виразу для розрахунку напруженого стану у будь-якій точці елемента:

$$\boldsymbol{\sigma} = E(DN\mathbf{v} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0. \quad (20)$$

Повертаючись знову до поставленої на початку задачі, слід звернути увагу на те, що компоненти вектора переміщень ми визначаємо не за алгоритмом МСЕ (шляхом додаткової побудови матриць жорсткості та вузлових навантажень), а у відповідності до способу запропонованому в [1]. Тому, користуючись термінологією останньої роботи, слід визначити переміщення усіх вузлових точок елементарних фрагментів  $\mathbf{v}_L$ , як різниці координат вузлів додаткової сітки (яка відтворює геометричну дискретну модель тіла, вузли якої позначаються як  $t_{(i \pm 1/2u; m \pm 1/2v; n \pm 1/2w)}$ , де  $u, v, w$  – натуральні числа, і координати вузлів якої залежать від положення вузлів центральної сітки; вузли останньої відповідають положенням центрів ваги елементарних фрагментів і позначаються як  $s_{l;m;n}$ )<sup>1</sup> у їх початковому і деформованому станах. Інакше кажучи:

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{t}_L - \mathbf{t}_{L0}. \quad (21)$$

Тут вектори координат у початковому та у деформованому станах мають наступний вигляд:

$$\mathbf{t}_L = [x_{1L} \quad x_{2L} \quad x_{3L}]; \quad (22)$$

$$\mathbf{t}_{L0} = [x_{1L0} \quad x_{2L0} \quad x_{3L0}]. \quad (23)$$

Зазначимо також, що для відтворення загального деформованого стану досліджуваного тіла в [1] було використано інший алгоритм визначення напружень, хоча використання запропонованих у даній роботі інтерполяційних формул також дозволяє отримати шукані напруження. Таке рішення було продиктоване тим, що локальний поелементний розрахунок

<sup>1</sup> Тут  $t$  та  $s$  це відповідно узагальнені позначення координат додаткової та центральної сіток [1].

напружень за МСЕ призводить до поля напружень, що не задовольняють в загальному випадку умовам рівноваги і мають значні розриви на суміжних поверхнях елементів та вузлів, тоді як спосіб визначення напружень запропонований у [1] передбачає менші перепади напружень та меншу чутливість останніх до перерозподілу переміщень і внутрішніх зусиль у досліджуваному тілі, що необхідно для сходження ітераційного числення. Також відомо, що напруження всередині скінченного елемента, загалом, визначаються більш точно, ніж в вузлових (а, отже, і розташованих на ребрах та гранях) точках.

Щоб переконатися у правильності прийнятого способу визначення внутрішніх напружень елементарних фрагментів, розрахуємо напруження у точці прикладання зусилля. Очевидно, що в місці прикладання деякої заданої сили, компоненти повного напруження, яке діятиме по площадці перпендикулярній до даної сили, мають відповідати векторним складовим цієї сили. Для цього скористаємося результатами розрахунків прикладу представленою в роботі [1]. Вихідні умови досліджуваного фрагменту були такими: модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПа; коефіцієнт Пуассона  $\nu=0.2$ ; компоненти вектора навантаження, прикладені до центру ваги фрагменту (із глобальними координатами  $x_{1f}=x_{2f}=x_{3f}=2.5$  (м), та локальними координатами  $x_{1f}=x_{2f}=x_{3f}=0$ ) становили  $f_{x1}=100$  кН,  $f_{x2}=150$  кН та  $f_{x3}=200$  кН. Координати вершин даного фрагменту в глобальній (м) та локальній (безрозмірні одиниці) системах зведено до таблиці 1. Розрахункові переміщення вузлів досліджуваного шестигранного фрагменту (мм) показано в таблиці 2. Схему розташування вузлів та переміщень, а також прикладене розрахункове навантаження, показано на рисунку 1.б.

Таблиця 1

Координати вузлів у глобальній системі (м)									Координати вузлів у локальній системі (б.о.)								
X	1	2	3	4	5	6	7	8	x	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_{1Lo}$	3	2	2	3	3	2	2	3	$x_{1L}$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$x_{2Lo}$	2	2	3	3	2	2	3	3	$x_{2L}$	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
$x_{3Lo}$	3	3	3	3	2	2	2	2	$x_{3L}$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1

Таблиця 2

Компоненти вектора переміщень, $v$ (мм)	Номера вузлів додаткової сітки (№)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_{1L}$	0.00023	0.00015	0.00021	0.00085	0.00014	0.00016	0.00015	0.00022
$u_{2L}$	0.00029	0.00024	0.00033	0.0013	0.00024	0.00024	0.00024	0.00034
$u_{3L}$	0.00048	0.00029	0.00047	0.00173	0.00031	0.00034	0.00031	0.00039

Результатом розрахунку в програмному середовищі Mathcad 14.0 є компоненти тензора напружень у точці прикладання зусилля ( $kH/m^2$ ):

$$\sigma(x_{1f}, x_{2f}, x_{3f})^T = \sigma(2.5, 2.5, 2.5)^T = [123.18 \ 150.72 \ 177.61 \ 57.48 \ 80.84 \ 70.26].$$

Компоненти повного напруження визначимо за формулами:

$$P_{x1} = s_{11} \cdot \cos a + t_{12} \cdot \cos b + t_{13} \cdot \cos j ; \quad (24)$$

$$P_{x2} = t_{21} \cdot \cos a + s_{22} \cdot \cos b + t_{23} \cdot \cos j ; \quad (25)$$

$$P_{x3} = t_{31} \cdot \cos a + t_{32} \cdot \cos b + s_{33} \cdot \cos j , \quad (26)$$

де напрямні косинуси нормалі до досліджуваної елементарної площадки (із досліджуваною точкою) розраховуються за формулами:

$$\cos a = f_{x1} / (f_{x1}^2 + f_{x2}^2 + f_{x3}^2)^{1/2} ; \quad (27)$$

$$\cos b = f_{x2} / (f_{x1}^2 + f_{x2}^2 + f_{x3}^2)^{1/2} , \quad (28)$$

$$\cos j = f_{x3} / (f_{x1}^2 + f_{x2}^2 + f_{x3}^2)^{1/2} . \quad (29)$$

В результаті розрахунку одержимо такі компоненти повних напружень:

$$P_{x1} = 137.8097 \text{ kH/M}^2, P_{x2} = 157.4954 \text{ kH/M}^2, P_{x3} = 201.0878 \text{ kH/M}^2,$$

що говорить про достатньо вірну роботу даного способу, навіть для даного ступеню дискретного розбиття.

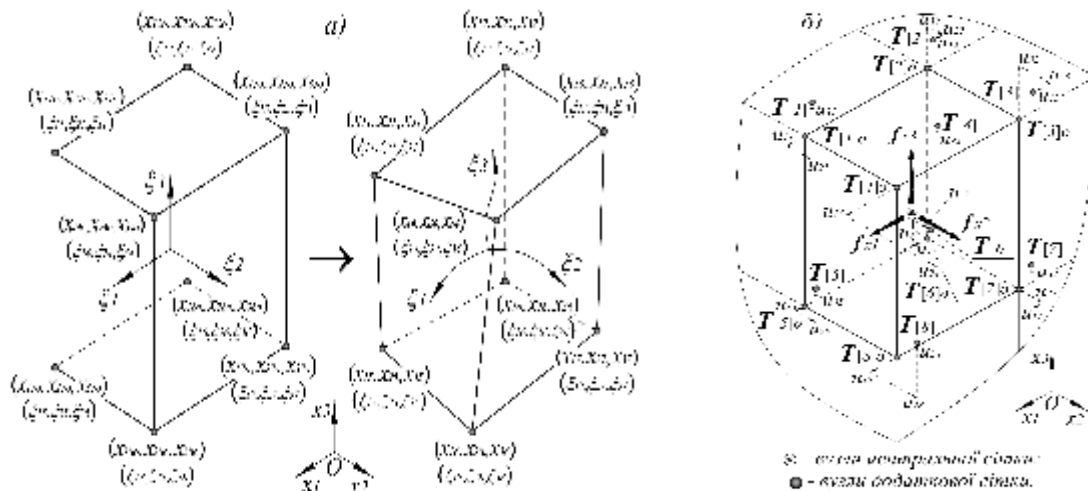


Рис. 1.

**Висновки.** Очевидно, що запропонована методика моделювання НДС пружного середовища на основі використання скінченно-елементної моделі у поєднанні із статико-геометричним уявленням про формоутворення дискретно представлених об'єктів дає змогу значно розширити межі використання останнього. Застосування інтерполяційних співвідношень на основі функцій форм дозволяє проаналізувати не лише напруження у вузлах та гранях елемента, а й дає можливість локально розрахувати поле внутрішніх напружень кожного із елементарних фрагментів, що в свою чергу уможливорює відтворення глобальної картини НДС досліджуваного середовища або тіла. Окрім того, запропоновані алгоритми є зручними у застосуванні при дії на середовище польових структур, оскільки дія навантаження може бути сприйнята безпосередньо центром ваги фрагменту, а не розподілене між вузловими зусиллями. Продемонстрований приклад говорить про загальну коректність спільної роботи запропонованих раніше способів.

1. Скочко В.І. Геометричне моделювання деформованого стану пружного середовища, що перебуває під дією заданого навантаження. Н. т. збірник «Енергозбереження в будівництві та архітектурі». Випуск 1. Відповідальний редактор А.М. Тугай. – КНУБА, 2011р. – 190с. 145-160с.
2. Скочко В.І. Варіанти дискретизації середовища, що знаходиться під механічним впливом польових структур в процесі сушіння. Н. т. збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет – Вип.4, т.50. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011р. – 219с. 174-180с.
3. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев: Вища школа. Главное изд-во, 1982. – 480с.
4. Метод скінченних елементів у задачах будівельної механіки: Навчальний посібник / В.А. Баженов, О.С. Сахаров, Г.Й. Мельниченко, С.М. Чорний. – К.: КДТУБА, 1994. – 368с.
5. Oden J.T., Reddy J.N.. An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. – New York – London: John Wiley and Sons, 1976.
6. Ciarlet P.G., Raviart P.A.. General Lagrange and Hermite Interpolation in R With Application to Finite Element Method. – Arch. Ration Mech. Anal., 1972, Vol. 46.
7. Ciarlet P.G., Raviart P.A.. Interpolation Theory over Curved Elements. – Comp. Mech. Appl. Mech. Eng. 1972, 1.
8. Wachspress E.L.. Rational Finite Element Basis. – New York: Acad. Press, 1975.