УДК 515.2:
О.М.Семків, А.М.Попова
Національний університет цивільного захисту України

НАБЛИЖЕНИЙ ОПИС ФОРМИ ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ ОСІ ГНУЧКОЇ НИТКИ ПОСТІЙНОГО ПЕРЕТИНУ

Наведені розрахунки форми гнучкої нитки, яка обертається навколо горизонтальної осі за умови, що інтенсивність відцентрового навантаження рівномірно розподілена по прольоту нитки і провисання невелике порівняно з її прольотом.

Постановка проблеми. Розробка ефективних засобів боротьби з лісовими пожежами є однією з актуальних проблем не тільки в лісовому господарстві України, але й у багатьох інших країнах [1, 2]. Тому доцільними будуть дослідження, спрямовані на розробку нових технологій та технічних пристроїв боротьби з лісовими пожежами. В Національному університеті цивільного захисту України у процесі розробки новий грунтометальний механізм із якірним ланцюгом як робочим органом. В роботі [3] наведено схематичне зображення навісного грунтометального механізму (рис. 1). Метання ґрунту тут здійснюється завдяки обертанню навколо горизонтальної осі ланцюга, у якості якого пропонується обрати ланцюг морського якоря. При цьому ланки ланцюга здирають частки ґрунту, і завдяки відцентровій силі, здійснюють їх транспортування до зони пожежі (це нагадує дію дитячої скакалки на піску). Тому актуальними будуть дослідження, присвячені пошуку раціональних параметрів грунтометального механізму.

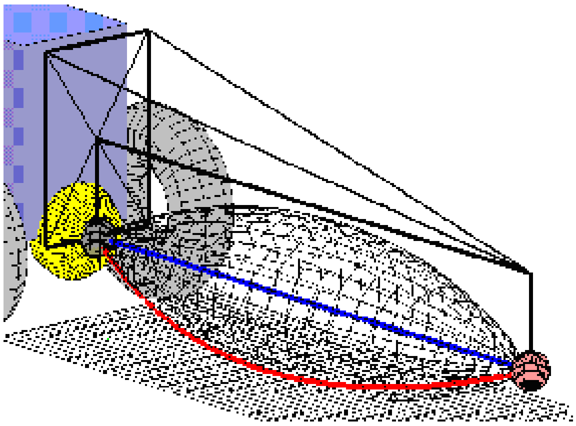

Рис. 1. Грунтометальний механізм (зображено слід від обертання ланцюга)

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для прикладної геометрії цікавою є поверхня (форма траєкторії) обертання ланок якірного ланцюга, яка впливає на експлуатаційні властивості механізму грунтометання. В роботі [3] таку поверхню названо квазиконоїдом, адже за певних умов вона зводиться до «класичного» коноїда. Але в процесі обертання за умови гальмування ланки ланцюга біля ґрунту можливі інші варіанти форми ланцюга. Для дослідження цього ланцюг пропонується вважати гнучкою ниткою, яка обертається навколо горизонтальної осі. У техніці зустрічаються аналогічні види елементів, при визначенні міцності яких важливе значення має власна вага. Це - так звані гнучкі нитки [5,6]. Таким терміном позначаються гнучкі елементи у лініях електропередач, у канатних дорогах, у висячих мостах і ще інших спорудах. Такі технічні об'єкти досліджуються засобами курсів опору матеріалів [7]. Але ще недостатньо дослідженими є питання, пов'язані з розрахунком форми гнучкої нитки, яка обертається навколо горизонтальної осі.

Формулювання цілі статті. Розрахувати форми гнучкої нитки, яка обертається навколо горизонтальної осі за умови, що інтенсивність відцентрового навантаження рівномірно розподілена по прольоту нитки (а не за її довжиною) і провисання невелике порівняно з її прольотом.

Основна частина. Нехай гнучка нитка постійного перерізу навантажена завдяки відцентрової сили власною вагою й «підвішена» у двох точках, що перебувають на різних рівнях. Під дією відцентрової сили і власної ваги нитка провисає по деякій кривій АОВ. Циліндричну проекцію відстані між опорами (точками закріплення) позначимо як L і назвемо прольотом. Нитка має постійний перетин, отже, вага її розподілена рівномірно по її довжині. Вважається, що спостерігач знаходиться в рухомій системі координат, звідки форма нитки сприймається як звичайне провисання. Тому далі вважатимемо, що вагу нитки спричиняє відцентрова сила. Нехай провисання нитки невелике у порівнянні з її прольотом, і довжина кривої АОВ мало відрізняється від довжини хорди АВ. У цьому випадку з достатнім степенем точності можна вважати, що «відцентрова» вага нитки рівномірно розподілена не по її довжині, а по довжині її проекції на вісь,

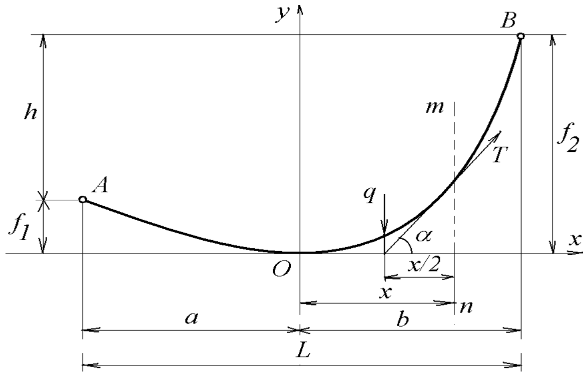

Рис. 2. Гнучка нитка постійного перерізу

розташованої на циліндрі, тобто уздовж прольоту *L*. Нехай інтенсивність навантаження рівномірно розподілена по прольоту нитки і дорівнює q. Це навантаження (що має розмірність сила/довжина) може бути не тільки власною вагою нитки, що припадає на одиницю довжини прольоту, але й додатковою вагою налиплого ґрунту, що також вважається розподіленим.

Початок координат виберемо в самій нижчій точці провисання нитки О, положення якої, нам поки не відоме, мабуть, залежить від величини навантаження q, від відношення між довжиною нитки по кривій й довжиною прольоту, а також від відносного положення опорних точок. У точці О дотична до кривої провисання нитки, буде горизонтальною. По цій дотичній направимо вправо вісь *x* (рис. 2).

Виріжемо двома перетинами - на початку координат і на відстані *x* від початку координат (перетин m - n) - частину довжини нитки. Тому що нитка припущена гнучкою, тобто здатною протидіяти лише розтяганню, то дія відкинутої частини на ту, що залишилася можливо тільки у вигляді сили, спрямованої по дотичній до кривої провисання нитки в місці розрізу; інший напрямок цієї сили неможливий. На рис. 2 представлена вирізана частина нитки з діючими на неї силами. Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q спрямовані вертикально донизу. Вплив лівої відкинутої частини (горизонтальна сила H) спрямована ліворуч, через те, що нитка «працює» на розтягнення. Дія правої відкинутої частини (сила T) спрямована праворуч по дотичній до кривої провисання нитки в цій точці.

Складемо рівняння рівноваги вирізаної ділянки нитки. Візьмемо суму моментів всіх сил відносно точки прикладання сил T и дорівняємо її нулю. При цьому врахуємо, спираючись на наведене допущення, що рівнодіюча розподіленого навантаження інтенсивністю q буде qx, і що вона прикладена посередині відрізка x. Тоді $H \cdot y - qx\frac{x}{2} = 0$, звідки

$$y = \frac{qx^3}{2H}. \qquad (1)$$

З формули (1) слідує, що крива провисання нитки є параболою. Коли обидві точки підвісу нитки перебувають на одному рівні, то $f_1 = f_2 = f$. Величина f у цьому випадку буде так званою стрілою провисання. Її можна визначити за умови симетрії, адже нижча точка нитки перебуває посередині прольоту , тому $a = b = \frac{1}{2}$; підставляючи в рівняння (1) значення $x = b = \frac{1}{2}$ й $y = f$ одержуємо:

$$f = \frac{qL^3}{8H}. \qquad (2)$$

З формули (1) знаходимо величину сили H:

$$H = \frac{qL^3}{8f}. \qquad (3)$$

Величина H визначає горизонтальний натяг нитки. Таким чином, якщо відоме навантаження q і натяг H, то за формулою (2) знайдемо стрілу провисання f. При заданих q і f натяг H визначається формулою (3). Зв'язок цих величин з довжиною s нитки по кривій провисання встановлюється за допомогою відомої з математики наближеної формули

$$s \approx l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f^2}{L^2}\right).$$

Складемо другу умову рівноваги вирізаної частини нитки, а саме, дорівняємо нулю суму проекцій всіх сил на вісь x: $-H+T\cos a=0$. Із цього рівняння знайдемо силу T - натяг у довільній точці $T=\dfrac{H}{\cos a}$.

Звідси слідує, що сила T збільшується від нижчої точки нитки до опор і буде найбільшою в точках підвісу – там, де дотична до кривої провисання нитки становить найбільший кут з горизонталлю. При малому провисанні нитки цей кут не досягає більших значень, тому з достатньою для практики степінню точності можна вважати , що зусилля у нитці постійне й дорівнює її натягу H. На цю величину звичайно й ведеться розрахунок міцності нитки.

Для визначення найбільшої сили біля точок підвісу будемо вважати, що вертикальні складові реакцій опор рівні між собою й дорівнюють половині сумарного навантаження на нитку, тобто $\dfrac{gl}{2}$. Горизонтальні складові дорівнюють силі H, обчисленою за формулою (3). Повні реакції опор можна обчислити як геометричну суму цих складових:

$$T_{\max}=\sqrt{\left(\frac{qL^2}{8f}\right)^2+\left(\frac{gL}{2}\right)^2}=\frac{gL^2}{8f}\sqrt{1+16\frac{f^2}{L^2}}=H\sqrt{1+\frac{16f^2}{L^2}}$$

Якщо через F позначена площа перетину гнучкої нитки, то умова її міцності має вигляд $s=\dfrac{H}{F}\le[s]$. Замінивши натяг H його значенням за формулою (3), одержимо $\dfrac{qL^2}{8fF}\le s$. Із цієї формули при заданих L, q, F і $[s]$ можна визначити необхідну стрілу провисання f. Розв’язок при цьому спроститься, якщо в q буде включена лише власна вага; $q=g\cdot F$, де γ - вага одиниці об'єму матеріалу нитки, і $f=\dfrac{gFL^2}{8F[s]}=\dfrac{lL^2}{8[s]}$. Тобто величина F не ввійде в розрахунок.

Якщо точки підвісу нитки перебувають на різних рівнях, то підставляючи в рівняння (1) значення $x=-a$ і $x=b$, знаходимо $f_1=\dfrac{qa^2}{2H}$; $f_2=\dfrac{qb^2}{2H}$. Звідси із другого виразу визначаємо натяг $H=\dfrac{qb^2}{2f_2}$. А ділячи перше на друге, знаходимо $\dfrac{f_1}{f_2}=\dfrac{a^2}{b^2}$ або $a=\pm b\sqrt{\dfrac{f_1}{f_2}}$. Вважаючи, що $b+a=L$, одержуємо: $b\pm b\sqrt{\dfrac{f_1}{f_2}}=L$ або $b=L/\left(1\pm\sqrt{\dfrac{f_1}{f_2}}\right)$. Підставивши це значення b у формулу певного натягу H, остаточно визначаємо:

$$H=\frac{qL^2}{2(\sqrt{f_2}\pm\sqrt{f_1})^2}. \tag{4}$$

Два знаки в знаменнику вказують на те, що можуть бути дві основні форми провисання нитки. Перша форма при меншому значенні *H* (знак плюс перед другим коренем) дає нам вершину параболи між опорами нитки. При більшому натягу H (знак мінус перед другим коренем) вершина параболи розташується лівіше опори A (рис. 2). Одержуємо другу формулу кривої.

Можлива й третя (проміжна між двома основними) форма провисання, що відповідає умові $f_1=0$; тоді початок координат O_3 співпаде із точкою A. Та або інша форма будуть отримана залежно від співвідношень між довжиною нитки по кривій провисання AOB (рис. 2) і довжиною хорди AB.

Якщо при підвісі нитки на різних рівнях невідомі стріли провисання f_1 і f_2, але відомий натяг H, то можна одержати значення відстаней a й b і стріл провисання f_1 і f_2. Різниця h рівнів підвіски дорівнює $h=f_2-f_1$. Підставимо в цей вираз значення f_1 і f_2, і перетворимо його, маючи на увазі, що $b+a=L$: $h=\dfrac{qb^2}{2H}-\dfrac{qa^2}{2H}=\dfrac{q}{2H}(b^2-a^2)=\dfrac{q}{2H}(b+a)(b-a)=\dfrac{qL}{2H}(b-a)$. Звідки $b-a=\dfrac{2Hh}{qL}$. А тому що $b+a=L$, то $a=\dfrac{1}{2}-\dfrac{Hh}{qL}$ і $b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{Hh}{qL}$. Підставляючи значення *a* і *b* у вирази для стріл провисання f_1 і f_2, одержуємо формули для обчислення величини f_1 і f_2:

$$f_1 = \frac{q_1 L^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2qL^2} - \frac{h}{2}; \qquad f_2 = \frac{q_2 L^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2qL^2} - \frac{h}{2}$$

Висновки. Одержані залежності дозволяють здійснити класифікацію форм провисання нитки. А саме, при а > 0 буде мати місце перша форма провисання нитки, при а < 0 – друга форма провисання нитки і при а = 0 – третя форма. Слід зазначити, що у тих випадках, коли стріла провисання не є малою у порівнянні із прольотом, виведені формули не можуть бути застосованими, тому що дійсна крива провисання нитки (ланцюгова лінія) буде вже значно відрізнятися від параболи, отриманої завдяки припущенню про рівномірний розподіл навантаження по *прольоту* нитки, а не за її *довжиною*, як те має місце в дійсності.

Робота в цьому напрямку продовжується . На рис. 3 зображено експериментальну установку грунтометального механізму.

Рис. 3. Експериментальна установка грунтометального механізму.

Висновки. Зроблені допущення про закон розподілу навантаження полегшує розрахунок, але робить його разом з тим наближеним; якщо при точному розв'язанні (навантаження розподілене уздовж кривої) кривою обертання буде ланцюгова лінія, то при наближеному розв'язанні крива обертання виявляється квадратною параболою.

1. Коршиков А.А. Крупным лесным пожарам — адекватные технологии/ А. А. Коршиков, Г. Г. Шиллер, П. В. Сидаренко [и др.]. // Лесное хозяйство. - 2005. - № 1. - С. 45 - 46.
2. Коломинова М.В. Машины и механизмы для борьбы с лесными пожарами: метод. указания / М.В.Коломинова. – Ухта: УГТУ, 2008. – 43 с.
3. Валдайский Н.П. Тушение лесных низовых пожаров способом метания грунта: метод. рекомендации. / Н.П.Валдайский, С.М. Вонский, А.Н.Чукичев. - Л.: ЛеНИИЛХ, - 1977. - 33с.
4. Чукичев А.Н. Грунтомёт ГТ-3 для борьбы с лесными пожарами / А.Н.Чукичев, Н.П.Валдайский, С.М.Вонский, Ю.М.Кодянов // Сб. науч. тр. Механизация лесохозяйственных работ на северо-западе Таёжной зоны, Л.: ЛеНИИЛХ, 1976. - С. 71-76.
5. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити.–М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.– 240 с.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах.– т. 3.– М.: Наука, 1973.– 488 с.
7. Вольмир А. С. Сопротивление материалов. / А.С.Вольмир, Ю.П.Григорьев, А.И.Станкевич / Москва: Дрофа, 2007. - 592 с.