УДК 514.18

В.П.Самчук, Ю.В.Клак
Луцький національний технічний університет

ФОРМОУТВОРЕННЯ ДИСКРЕТНИХ СІТОК В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛОГАРИФМІЧНОГО МАСШТАБУВАННЯ У РАДІАЛЬНОМУ НАПРЯМКУ

Робота присвячена дослідженню формоутворення дискретних сіток статико-геометричним методом моделювання в циліндричній системі координат, проекції яких на горизонтальну площину мають форму кільцевого сектора з нерівномірним кроком вузлів у радіальному напрямку. В алгоритмі формоутворення використовується логарифмічне масштабування вузлів дискретної сітки в радіальному напрямку.

Ключові слова: *статико-геометричний, дискретний каркас, сітка, циліндрична система координат.*

Постановка проблеми. В практиці геометричного моделювання та формоутворення поверхонь технічних форм широко застосовується їх дискретне представлення завдяки простому аналітичному представленню та ефективним алгоритмам для проведення розрахунків на ЕОМ.

В багатьох прикладних інженерних задачах використання прямолінійних систем координат є не ефективним, оскільки велика кількість задач моделювання набагато простіше описується та розв'язується в криволінійних системах, наприклад, задачі на криволінійних контурах. Тому ґрунтовне дослідження способів формоутворення поверхонь в криволінійних координатних системах забезпечить створення ефективних алгоритмів розрахунку їх форми на ЕОМ.

Полярна система координат, на відміну від декартової, має особливу точку – полюс. Тому, розв'язуючи задачі формоутворення на основі апроксимації диференціальних рівнянь, при наближенні до полюса системи, доводиться збільшувати густоту сітки з метою забезпечення необхідної точності моделі. В зв'язку з цим, потребує розв'язання задача формування сітки в циліндричній системі координат, крок вузлів якої у радіальному напрямку змінюється за певним законом, зокрема експоненціальним. Це дозволить збільшувати густоту вузлів при наближенні до полюса системи координат, зберігаючи при цьому необхідну точність, та навпаки, при віддаленні від особливої точки зменшувати густоту вузлів моделі поверхні звільняючись від зайвої інформації яка не впливає на точність представлення дискретної моделі. Крім цього, можливість управління густотою дискретної сітки в радіальному напрямку дозволяє розширити коло задач моделювання та формоутворення які можна розв'язувати за допомогою алгоритмів прикладної геометрії.

Статико-геометричний метод моделювання дискретно представлених кривих та поверхонь забезпечує простий аналітичний опис задачі формоутворення та дозволяє для її розв'язання використовувати необхідну кількість параметрів з їх чіткою геометричною інтерпретацією. Множина узагальнених управляючих сил, які виступають основним носієм вільних параметрів, дозволяє легко керувати процесом формоутворення та враховувати наперед задані вимоги, характер яких може бути не тільки геометричний але й статичний та кінематичний.

Отже, актуальними є дослідження, пов'язані з розширенням моделюючих можливостей статико-геометричного методу [1] формування двовимірних дискретних об'єктів на основі розробки алгоритмів дискретного представлення поверхонь, геометрія яких в плані ефективніше описується в полярній та циліндричній системах координат, ніж в прямокутній декартовій.

Аналіз останніх досліджень. Способам дискретного представлення поверхонь та питанням управління їх формою присвячено ряд робіт вчених, що працюють в області прикладної геометрії. Багато праць присвячено дослідженню формоутворення в полярній та циліндричній системах координат. Зокрема, в роботі [2] було запропоновано спосіб дискретного моделювання дуги кола в полярній системі координат, як плоского елемента каркасу довільної просторової форми. В роботі [3] запропоновано спосіб дискретного формування зрівноважених плоских елементів каркасу довільної сітки в полярній системі координат. В роботі [4] запропоновано алгоритм формування зрівноваженої сітки, яка в плані має форму кільцевого сектора з регулярним кроком вузлів у радіальному напрямку.

Однак, на нашу думку, в опублікованих роботах недостатньо уваги приділено дослідженню способів моделювання дискретно представлених поверхонь, які б враховували особливості пов'язані з полюсом циліндричної системи координат. Тому задача формування зрівноваженої сітки, яка в плані має форму кільцевого сектора,і вузли якої розміщуються у радіальному напрямку в логарифмічному масштабі є актуальною і потребує дослідження.

Метою роботи є розробка алгоритму формоутворення дискретних сіток в циліндричній системі координат, план яких має форму кільцевого сектора з нерівномірним кроком вузлів у радіальному напрямку.

Основна частина. При формуванні дискретних моделей зрівноважених сіток статико-геометричним методом, ліва частина системи лінійних рівнянь, з якої обчислюються координати вузлів, являє собою скінченно-різницеву апроксимацію диференціального оператора Лапласа, який в декартовій системі координат можна записати у вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0. \qquad (1)$$

Для того, щоб описати дискретну модель сітки в полярній системі координат, можна застосувати диференціальний оператор Лапласа для полярної системи координат.

Якщо для переходу від декартової системи координат до полярної використовуються формули, що зв'язують декартові та полярні координати точки у вигляді:

$$\begin{cases} x = r\cos(j), \\ y = r\sin(j); \end{cases}$$

тоді диференціальний оператор Лапласа набуде виду:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial j^2}=0. \qquad (2)$$

Скінченно-різницева апроксимація рівняння (2) ускладнюється наявністю у ньому похідної непарного порядку, оскільки це вимагає додаткового обґрунтування вибору лівих чи правих скінченних різниць.

Щоб отримати для полярної системи координат симетричну форму скінченно-різницевого оператора, який буде апроксимувати відповідний диференціальний, потрібно в ньому позбутися похідної непарного порядку.

Використаємо для переходу від декартової системи координат до полярної формули, що зв'язують декартові та полярні координати точки у вигляді:

$$\begin{cases} x = a\,e^{r}\cos(j), \\ y = a\,e^{r}\sin(j); \end{cases} \qquad (3)$$

де a – коефіцієнт, який має розмірність одиниць довжини, для спрощення приймемо $a=1$,
r – безрозмірний параметр.

Необхідність введення в (3) коефіцієнтів a зумовлена тим, що параметри r та j є величинами безрозмірними, а в прикладних задачах моделювання x та y – це цілком конкретні значення координат, які мають розмірність довжини, тому для узгодження розмірностей в праві частини виразів (3) і вводяться відповідні коефіцієнти, які відіграють роль масштабних множників.

Застосувавши конформне перетворення з підстановкою $r=e^{r}$, та перейшовши до координат $r-j$, можна звільнитись від похідної непарного порядку у формулі (2) і таким чином, спростити обчислювальний шаблон.

Параметри x та y в (3) є складовими одного комплексного числа z, тому можна записати:

$z=e^{w}$, де $w=u+iv$, та $z=x+iy$,

звідки: $$x+iy=e^{u}\left[\cos(v)+i\sin(v)\right].$$

Прирівнявши окремо дійсні та уявні частини, отримаємо:

$$\begin{cases} x=e^{u}\cos(v), \\ y=e^{u}\sin(v). \end{cases}$$

Отже, x та y це дійсна і уявна частина певної аналітичної функції.

Часткові похідні по r виражаються через r у вигляді:

$$\frac{\partial W}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}-\frac{\partial W}{\partial r}\right). \tag{4}$$

Підставивши вирази (4) в (2), отримаємо оператор Лапласа для полярної системи координат, який записаний у формі, подібній до його вигляду в декартовій системі (1):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial j^2}=0. \tag{5}$$

Скінченно-різницева апроксимація полярного диференціального оператора (5) з правою частиною має вигляд:

$$z_{j-1,k}+z_{j,k-1}-4z_{j,k}+z_{j,k+1}+z_{j+1,k}=a\ P_{j,k}, \tag{6}$$

де $z_{j,k}$ – апліката шуканого вузла,

j – параметр радіального напрямку,

k – параметр колового напрямку,

$P_{j,k}$ – формуюче навантаження.

a – коефіцієнт пропорційності, для спрощення $a=1$.

Перехід до координат $r-j$ дозволяє формувати дискретні моделі зрівноважених сіток на основі системи скінчено-різницевих рівнянь виду (6) з рівномірним кроком вузлів в обох координатних напрямках (рис. 1).

Після визначення аплікат вузлів сітки в системі $r-j$ потрібно перейти до реальних координат по параметрах r, та j (рис. 2).

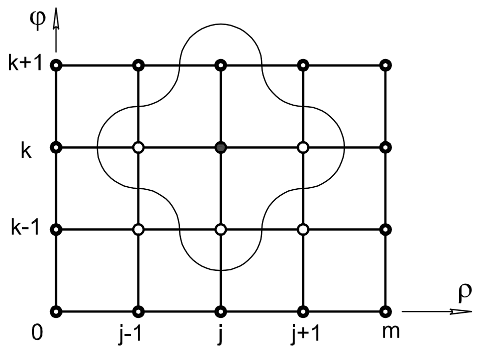

Рис. 1. План сітки, яка моделюється в системі координат $r-j$

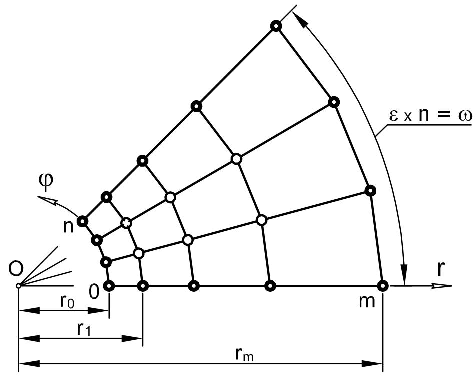

Рис. 2. План сітки після переходу до системи координат $r-j$

Оскільки параметр r пов'язаний з реальною радіальною координатою вузла залежністю $r=\ln(r)$, то це означає, що він формує певну логарифмічну шкалу.

Позитив такого підходу полягає в тому, що для формування дискретної моделі зрівноваженої сітки в полярній системі координат, завдяки застосуванню логарифмічного масштабу, можна використовувати звичайний обчислювальний шаблон для прямокутної сітки з рівномірним кроком, при цьому обчислені аплікати вузлів будуть належати моделі в системі координат $r-j$ з експоненціальним кроком вузлів у радіальному напрямку.

Приклад. Побудувати дискретний каркас сітки горизонтальна проекція якої має форму кільцевого сектора (рис. 3) з параметрами: в радіальному напрямку кількість інтервалів $m=4$, крок змінюється за експоненціальною залежністю $r_j = e^j$, в коловому – кількість інтервалів $n = 6$, крок рівномірний $e = \frac{p}{18}$. Аплікати вузлів опорного контуру в колових напрямках розподіляються за законом степеневої функції 2-го порядку, в радіальних напрямках – за лінійним законом (рис. 4), значення їх представлені в таблиці 1. Необхідно забезпечити проходження сітки через точку з аплікатою $Z_{2,3} = 18$.

Таблиця 1

Аплікати вузлів опорного контура

Номер вузла	0	1	2	3	4	5	6
$z_{j,k}$ при k=0	1	1,2244	1,8344	3,4926	8	-	-
$z_{j,k}$ при k=6	8	8,0962	8,3576	9,0683	11	-	-
$z_{j,k}$ при j=0	1	4,6667	7,3333	9	9,6667	9,3333	8
$z_{j,k}$ при j=4	8	11,5556	13,8889	15	14,8889	13,5556	11

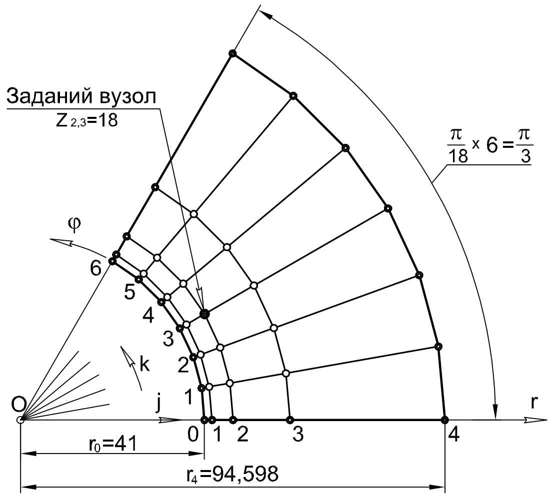

Рис. 3. Параметри сітки в плані

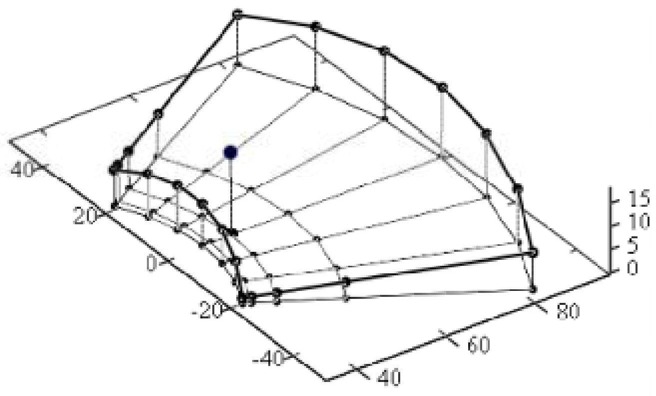

Рис. 4. Задані параметри сітки: опорний контур та один внутрішній вузол (в координатах $r - j$)

Враховуючи вихідні дані, переходимо до координат $r - j$. Задані параметри сітки в нових координатах представлені на рис. 5. Модель сітки описується на основі системи з 15-ти скінченно-різницевих рівнянь виду (6), записаних для усіх невідомих внутрішніх вузлів та одного параметра P. В результаті розв’язання системи, визначаються 14 невідомих аплікат Z вузлів та значення шуканого формуючого навантаження P, яке забезпечує проходження сітки через заданий вузол:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 4.6667 & 7.3333 & 9 & 9.6667 & 9.3333 & 8 \\ 1.2244 & 8.7577 & 13.0659 & 15.1302 & 15.2474 & 13.201 & 8.0962 \\ 1.8344 & 10.8664 & 15.8352 & 18 & 17.7844 & 14.9197 & 8.3576 \\ 3.4926 & 11.8308 & 16.2013 & 18.0429 & 17.763 & 15.1285 & 9.0683 \\ 8 & 11.5556 & 13.8889 & 15 & 14.8889 & 13.5556 & 11 \end{pmatrix} \qquad P = 5{,}20735.$$

На рис. 6 представлено результат формування сітки в координатах $r - j$.

Результат формоутворення за заданими вихідними даними після повернення до координат $r - j$ представлено на рис. 7.

Профіль сформованої сітки по радіальному напрямку, який проходить через заданий вузол представлено на рис. 8.

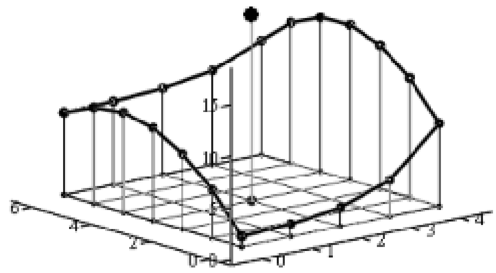

Рис. 5. Задані параметри сітки в координатах $r - j$: опорний контур та один внутрішній вузол

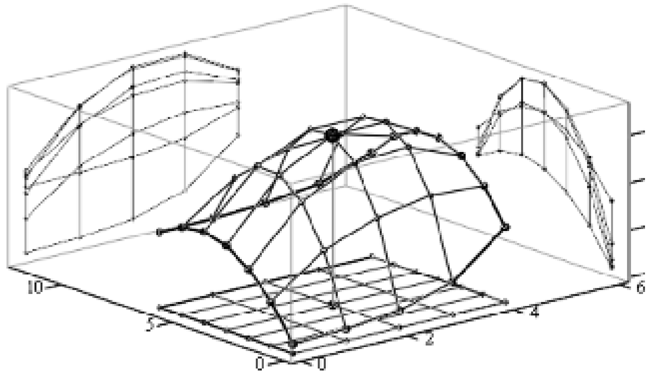

Рис. 6. Дискретна сітка сформована за заданими вимогами в координатах $r - j$

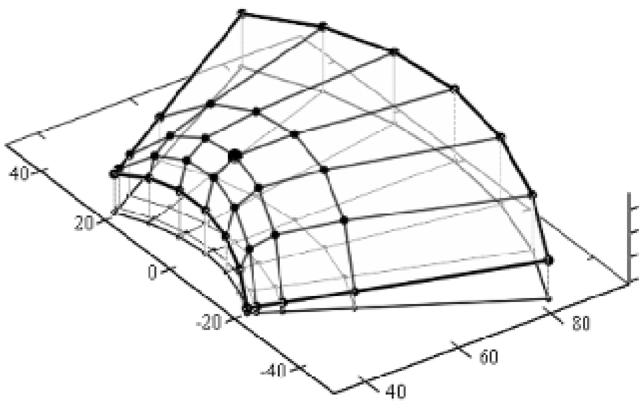

Рис. 7. Дискретна сітка сформована за заданими вимогами

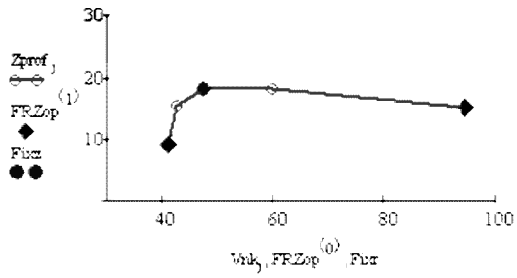

Рис. 8. Профіль сітки по променю *k*=3

Висновки. В роботі запропоновано алгоритм формування дискретних каркасів сіток в циліндричній системі координат, план яких має форму кільцевого сектора з нерівномірним кроком вузлів у радіальному напрямку.

Використання нерівномірного кроку при формоутворенні дискретних сіток в полярній системі координат дозволяє ефективно розподіляти "щільність" інформації про вузли моделі, збільшуючи її кількість при наближенні до полюса системи координат, та зменшуючи при віддаленні від нього.

Завдяки застосуванню в радіальному напрямку логарифмічного масштабування, стало можливим обчислити аплікати вузлів сітки в циліндричній системі координат за допомогою шаблону який використовується для сіток в декартовій системі з рівномірним кроком вузлів.

1. Ковалёв С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций./ С.Н. Ковалёв. // Дис. докт. техн. наук. 05.01.01 /М.: МАИ, 1986. - 348с.
2. Пустюльга С.І. Формування дискретної моделі дуги кола статико-геометричним методом в полярній системі координат / С.І. Пустюльга, В.П. Самчук // Наукові нотатки. Луцьк: РВВ ЛНТУ. – 2009. Вип. 26, с. 261-264.
3. Пустюльга С.І. Формоутворення дискретних моделей кривих ліній статико-геометричним методом в полярній системі координат/ С.І. Пустюльга, В.П. Самчук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА. – 2010. Вип. 86. – с. 160 - 165.
4. Пустюльга С.І. Формоутворення дискретно представлених поверхонь статико-геометричним методом в циліндричній системі координат / С.І. Пустюльга, В.П. Самчук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА. – 2010. Вип. 84. – с. 285 - 291.