УДК 515.2

В.Р.Самостян, А.А.Хомич
Луцький національний технічний університет

# ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ ЗАМКНУТИХ КРИВИХ СТАТИКО-ГЕОМЕТРИЧНИМ МЕТОДОМ

*В роботі розроблено алгоритм дискретного формування замкнутих кривих статико-геометричним методом із забезпеченням якомога більшого порядку гладкості у точці замикання.*

**Постановка проблеми**. В умовах високоточного виробництва, як правило, всі контури деталей ввизначаються у вигляді кривих, складених із кусків гладких лекальних ліній. Різні технологічні умови можуть вимагати від кривої наявності тих або інших геометричних характеристик. У багатьох траєкторних задачах шкідливими є різкі зміни кривини або стрибки кривини на контурі. До таких задач можна віднести проектування трубопроводів, корпусів автотранспортних засобів, космічних апаратів, об'єктів будівництва та ін. Для вирішення такого роду завдань потрібні не просто гладкі замкнуті лінії, а криві з плавною зміною кривини, або іншими подібними властивостями. Однак, використання кривих з неперервною кривиною не завжди представляється можливим через технологічні та алгоритмічні особливості, а застосування кусків кривих з кусково-неперервною кривиною – не завжди досягає очікуваного ефективного результату. Вище названі проблеми можуть зняти дискретні методи моделювання одновимірних образів з певними геометричними властивостями. Одним із таких методів є статико-геометричний метод [1], який поряд з іншими методами дискретного геометричного моделювання несе в собі ряд переваг при створенні дискретних геометричних моделей. Тому розробка підходів та алгоритмів дискретного моделювання замкнутих кривих дозволяє суттєво розширити коло практичних задач для ефективного застосування статико-геометричного методу.

**Аналіз останніх досліджень.** Питанню формування дискретно представлених замкнутих кривих статико-геометричним методом була присвячена робота [2]. В даній роботі був запропонований алгоритм дискретного формування центрально-організованої замкнутої кривої з заданими вихідними даними та заданою площею замкнутої області моделей. Однак запропонований в роботі алгоритм не дає однозначного розв'язку, потребує врахування низки обмежень на вихідні умови та не забезпечує відповідної гладкості у вузлі замикання формованої дискретно представленої замкнутої кривої.

**Формування цілей роботи.** Метою даної роботи є розробка алгоритмів дискретного формування замкнутих кривих статико-геометричним методом з забезпеченням якомога більшого порядку гладкості у точці замикання.

**Основна частина.** Умови на плавність обводів в точках стиковки можуть мати різного роду вимоги по відношенню до їх гладкості, що може забезпечуватись спільною дотичною в цій точці, або якщо такої гладкості не достатньо, то можливо достатньо спільної дотичної та однакових радіусів кривини спряжених кривих.

За допомогою явно заданої функції неможливо описати будь-яку замкнуту криву. Як правило, в такому випадку діють наступним чином криву розбивають на "правильні" ділянки, тобто на ділянки кожна з яких описується або функцією від $x$, або функцією від $y$. Всіх цих недоліків в даній мірі позбавлена параметрична форма запису кривої.

Процес формування статико-геометричним методом замкнутої кривої проводиться окремо по координатних складових $x$ та $y$. Основним формоутворюючим фактором даного методу є вектор зовнішнього навантаження прикладений до вузлів моделі. Навантаження або його координатні складові у багатьох випадках дають можливість прогнозувати динаміку зміни геометрії моделі, виражати геометричні характеристики формованого образу через параметри складових навантаження, змінювати значення навантаження на вузли образу у процесі можливих ітерацій. При цьому графік функції навантаження в розрахованих точках моделі однозначно характеризує дискретний аналог гладкості на множині вузлів формованого образу. Якщо функція розподілу навантаження є дискретним аналогом неперервної функції то, відповідно до цього, буде забезпечуватись і гладкість моделі. При наявності особливих точок на графіку навантаження втрачається гладкість між сформованими вузлами модельованої кривої, а при наявності стрибків навантаження у точках формованої моделі з'являться точки розривів. Вектори навантаження слугують крім того вільними параметрами для врахування практично необмеженої кількості вихідних даних та умов у процесі моделювання.

Якщо розглядати процес дискретного моделювання у параметричному вигляді замкнутих кривих статико-геометричним методом, то загальну систему лінійних рівнянь для визначення геометричних параметрів моделей можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} &a_{i-k}x_{i-k} + .... + a_{i-1}x_{i-1} + a_i x_i + a_{i+1}x_{i+1} + ... + a_{i+k}x_{i+k} + kP_i^x = 0 \\ &a_{i-k}y_{i-k} + .... + a_{i-1}y_{i-1} + a_i y_i + a_{i+1}y_{i+1} + ... + a_{i+k}y_{i+k} + kP_i^y = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

де $a_i$ - коефіцієнти скінченно-різницевих операторів,

$x_i, y_i$ - координати вузлів дискретної моделі,

$kP_i^x, kP_i^y$ - складові формоутворюючого навантаження.

Результат розв'язання системи рівнянь рівноваги (1) статико-геометричного методу буде представляти єдиний замкнутий одновимірний образ тільки в тому випадку, якщо значення початкових і кінцевих координат по кожній із координатних складових будуть рівними:

$$x_0 = x_n \qquad y_0 = y_n ,$$

де $x_0$, $y_0$ – координати початкового вузла; $x_n$, $y_n$ – координати кінцевого вузла.

Приклад графічної інтерпретації такої умови представлений на рис. 1.

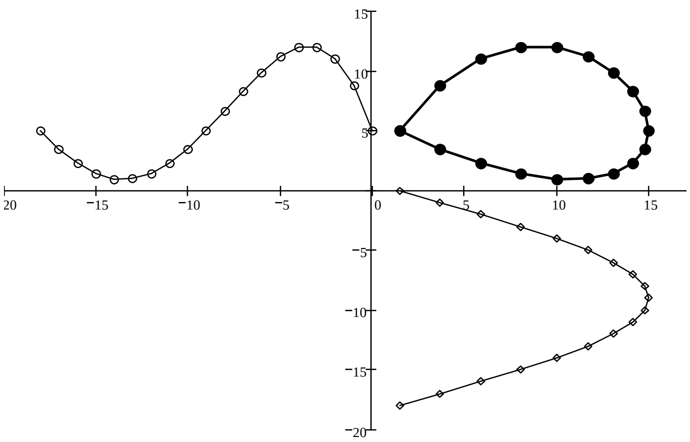

Рис. 1 Замкнута дискретно представлена крива

Однак для кола практичних задач, де моделями є дискретно представлені замкнуті криві, однією із найважливіших характеристик є дискретний аналог гладкості супровідної ламаної. Зупинимося детальніше на даній характеристиці. У випадку гладких неперервних параметрично заданих кривих для кожної точки із параметром $t$ повинна існувати, як мінімум, визначена перша похідна $x^1(t),\ y^1(t)$, значення якої задаватиме у точці єдину дотичну. Для замкнутих на певному проміжку неперервних кривих може також існувати єдина точка замикання, у якій визначені права та ліва дотичні. Тоді кут між правою та лівою дотичними буде характеризувати ступінь не гладкості замкнутої кривої у точці $t_0$. Якщо кут $a(t_0) = 0$, то крива у точці замикання є гладкою. Крім того у багатьох траєкторних практичних задачах необхідно замкнуті на визначеному проміжку криві моделювати не просто гладкими, а з плавною зміною кривини чи іншими подібними властивостями. Відповідно постає питання про кількість визначених похідних більш високих порядків у параметрично заданих функцій.

Для задання вертикальної дотичної у вузлі замикання, при формуванні дискретно представленої замкненої кривої статико-геометричним методом, необхідною і достатньою умовою є задання рівності значень сусідніх координат, відносно вузла замикання, по координатній складовій $x$. Тобто в систему лінійних рівнянь статико-геометричного методу необхідно додати рівняння : $x_з = x_{n-1}$, тоді систему можна представити наступним чином:

$$\begin{cases} x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + kP_i^x = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1} + kP_i^x = 0 \\ x_0 = x_n \\ x_{n-1} = x_i \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + kP_i^y = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} + kP_i^y = 0 \\ y_0 = y_n \end{cases} \qquad (2)$$

в результаті розв’язання якої отримаємо масив значень координат з якими будуємо дискретно представлену замкнену криву рис. 2.

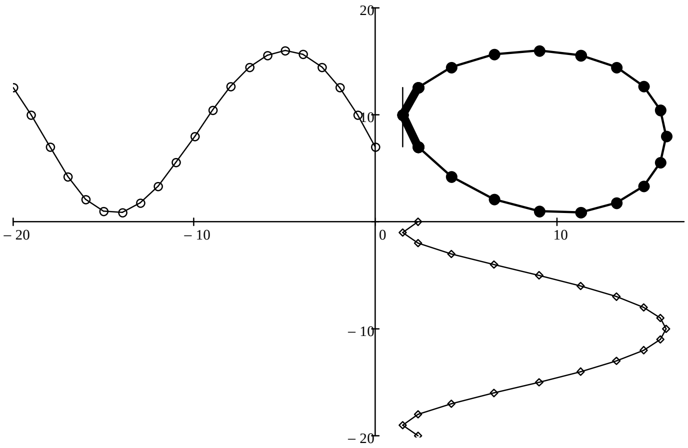

Рис. 2 Замкнута дискретно представлена крива з першим порядком гладкості у точці замикання

Для забезпечення гладкості більш високого порядку при формуванні дискретно представлених замкнених кривих статико-геометричним методам необхідно в систему рівнянь рівноваги вводити додаткові умови рівності координат вузлів по кожній із координатних складових. При цьому обов’язковою умовою є вибір обчислювального шаблону, за яким складається система рівнянь (1), таким чином щоб відповідна центральна різниця лежала в околі точки замикання. Наприклад, процес формування дискретно представленої замкненої кривої статико-геометричним методом із забезпеченням другого порядку гладкості у вузлі замикання буде проходити наступним чином. Складаємо систему рівнянь рівноваги, підбираючи обчислювальний шаблон так щоб центральна різниця лежала в околі точки замикання:

$$\begin{cases} x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+1} + kP_i^x = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} - 4x_{n-1} + 6x_n - 4x_{n+1} + x_{n+1} + kP_n^x = 0 \\ x_0 = x_n,\ \ x_{n+2} = x_{i+1},\ \ x_{n+1} = x_i \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+1} + kP_i^y = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-2} - 4y_{n-1} + 6y_n - 4y_{n+1} + y_{n+1} + kP_n^y = 0 \\ y_0 = y_n,\ \ y_{n+2} = y_{i+1},\ \ y_{n+1} = y_i \end{cases} \qquad (3)$$

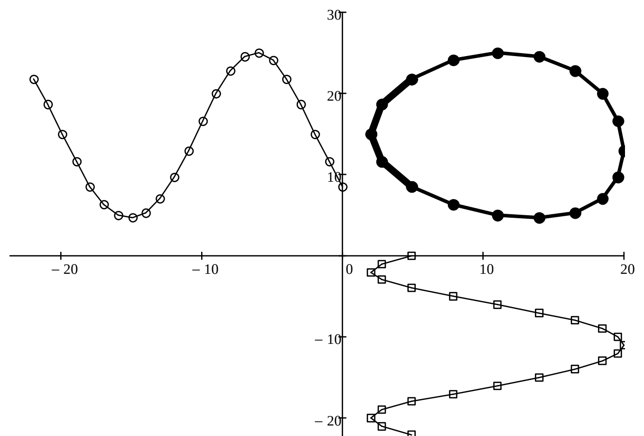

Рис.3. Дискретно представлена замкнута крива з другим порядком гладкості

За результатами розв’язання системи (3) будуємо дискретно представлену замкнуту криву із забезпеченням другого порядку гладкості у точці замикання (рис. 3).

При моделюванні дискретних аналогів зрівноважених замкнутих кривих у параметричному вигляді статико-геометричним методом суттєву роль відіграють складові зовнішнього формоутворюючого навантаження. Якщо значення складових навантаження у вузлах на визначених граничних умовах мають функціональний розподіл, то дискретну модель кривої будемо вважати гладкою у точці замикання, якщо складові навантаження мають кусково-функціональний розподіл – дискретна модель буде включати особливу точку. Тому для забезпечення гладкості у точці замикання необхідною умовою є функціональний розподіл складових значень навантаження не тільки між граничними вузлами, але й у них самих.

Порядок гладкості дискретної моделі замкнутої кривої, побудованої статико-геометричним методом, можна збільшувати за рахунок вибору обчислювального шаблону, за яким складається система рівнянь (1).Параметричний аналіз на сумісність такої системи дає можливість ефективно підібрати функції розподілу навантаження у вузлах моделі для кожної із координатних складових, управляючи якими можна динамічно змінювати геометричні характеристики формованих образів.

**Висновки.** В роботі запропоновані алгоритми дискретного моделювання замкнутих кривих статико-геометричним методом із забезпеченням першого та другого порядків гладкості за заданими вихідними даними. Підвищення порядку гладкості пропонується проводити за рахунок збільшення обчислювальних шаблонів при знаходженні значень координат по кожній із координатних складових.

1. Ковалёв С.Н. Формиравание дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дис….докт. техн. наук. 05.01.01/ М.: МАИ, 1986.-348с.
2. Ковтун О.М. Формування центрально організованої замкненої дискретно представленої кривої, що обмежує задану площу./Прикл. геометрия и инж. графика.-К., 1999,вып.65, с.197-201.