УДК 514.181.24
О.Ю.Ройко
Луцький національний технічний університет

ГАУСОВА КРИВИНА ДИСКРЕТНО ЗАДАНИХ ПОВЕРХОНЬ ЯК КРИТЕРІЙ ДЛЯ ЗАГУЩЕННЯ СІТКИ

В роботі розглянуто один із підходів до апроксимації гаусової кривини дискретних моделей поверхонь і її вплив на процес загущення трикутної сітки. Крім того враховані особливості вибору кроку апроксимації для поверхонь, що представлені квадродеревом.

Постановка проблеми. Дискретне моделювання геометричних образів різних розмірностей є актуальним завданням прикладної геометрії. Незважаючи на численні здобутки як вітчизняних так і закордонних фахівців в даній галузі чимало проблем залишаються відкритими. Крім того в ході розвитку та інтенсивного впровадження дискретного моделювання в різні галузі людської діяльності постійно з'являються нові завдання, що привертають увагу фахівців.

Паралельно із ростом обчислювальної потужності сучасних комп'ютерних систем зростає і кількість даних, що потребують обробки при створенні дискретних моделей. Такий ріст зумовлений передусім зростанням складності задач, що розв'язуються шляхом моделювання. Саме тому є актуальними методи оптимізації алгоритмів розв'язку задач моделювання та способи раціонального представлення інформації. В даній роботі ці питання розглянуто стосовно дискретного моделювання складних поверхонь.

Одними із найпоширеніших моделей дискретних поверхонь є сітки із рівномірним кроком. Такий спосіб представлення моделей значно спрощує математичні викладки, алгоритми та розрахунок. Для відносно простих поверхонь такий спосіб моделювання є мабуть найбільш прийнятним. Однак в багатьох випадках представлення поверхонь у вигляді сіток із рівномірним кроком є неоптимальним. Наприклад дискретна модель поверхні з різким перепадом значення кривини (рис. 1) потребує малого значення кроку сітки для того, щоб така апроксимація була прийнятною з практичної точки зору. Такий підхід веде до зростання кількості інформації, що обробляється, причому при зменшенні кроку одночасно вздовж двох осей розмірність задачі зростає квадратично. Під розмірністю задачі тут розуміємо кількість даних про модель, а не геометричну розмірність простору моделі. З іншого боку представлена на рис. 1 поверхня має практично плоскі ділянки на краях, для яких загущення сітки не призводить до зростання точності локальної апроксимації. Відповідно тут має місце нераціональне використання обчислювальних ресурсів.

Рисунок 1. Поверхня з різким перепадом значення локальної кривини

Даний приклад показує, що використання рівномірного кроку сітки в загальному не є оптимальним підходом при дискретному моделюванні поверхонь. Очевидно, що оптимальний підхід при виборі кроку повинен враховувати певні локальні характеристики поверхні що моделюється. В наведеному прикладі такою характеристикою поверхні може виступати її кривина.

Метою даної роботи є розробка підходу до моделювання поверхонь із врахуванням дискретного аналогу її гаусової кривини.

Аналіз досліджень та публікацій. На сьогоднішній день вітчизняними та зарубіжними вченими розроблено ряд підходів для апроксимації диференціальних характеристик кривих та поверхонь. Зокрема робота [1] присвячена апроксимації диференціальних характеристик для дискретних багатовимірних геометричних образів. В роботі [2] наведені формули для розрахунку дискретних аналогів головних, а також гаусової та середньої кривин дискретних моделей поверхонь.

При моделюванні поверхонь для підрахунку координат вузлів використовується математичний апарат числових послідовностей, теоретичні засади якого викладені в [3].

Основна частина. Матеріал, що представлений нижче, стосується поверхонь, які моделюються сіткою із трикутними коміками та представлені квадродеревом. Доцільність використання трикутної сітки та квадродерев розглянута в роботі автора [4] і тут дане питання не піднімається.

В роботі [2] дискретним значення дискретного аналогу гаусової кривини для трикутної сітки пропонується визначати за наступною формулою:

$$K(z_i) = \frac{1}{A}\left(2p - \sum_j q_j\right)$$

де A — площа деякої області в околі i -го вузла;
q_j — кут при вузлі i комірки j, яка йому суміжна (рис. 2).

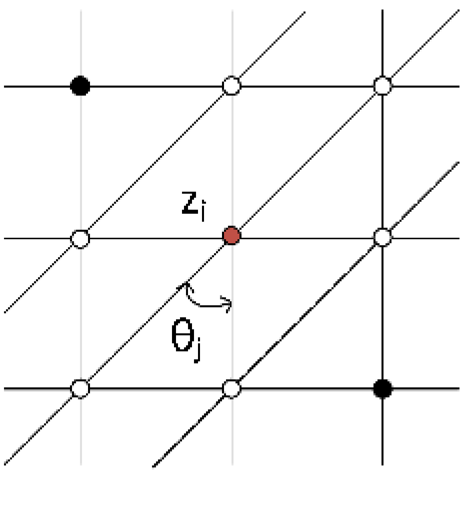

Рисунок 2. До питання апроксимації гаусової кривини

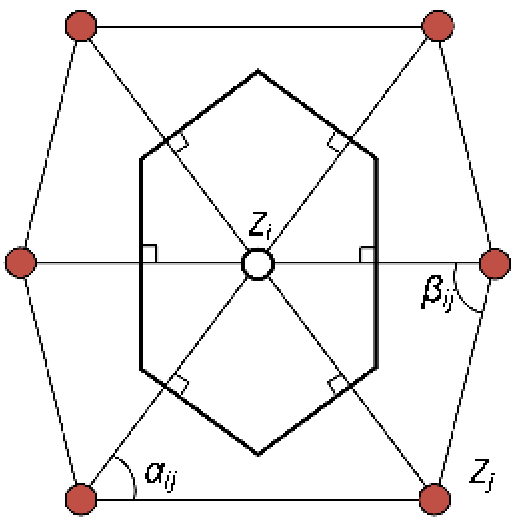

Рисунок 3. Визначення «області Вороного» для i -го вузла

Область A можна визначити декількома способами. Зокрема для кожного вузла вона може бути встановлена по аналогії із знаходженням багатокутника діаграми Вороного. Діаграма Вороного скінченної множини точок S на площині представляє таке розбиття площини, при якому кожна область цього розбиття утворює множину точок, більш близьких до одного з елементів множини S, ніж до будь-якого іншого елементу множини. В контексті сітки, яка є моделлю поверхні, для кожного її вузла «область Вороного» відсікається перпендикулярами, що проведені до середин інцидентних йому зв'язків (рис. 3).

Її площа обчислюється за формулою

$$A = \frac{1}{8}\sum_j \left(\operatorname{ctg} a_{ij} + \operatorname{ctg} b_{ij}\right)\left\|z_i - z_j\right\|^2$$

де a_{ij}, b_{ij} — кути, протилежні зв'язку ij .

Маючи дані формули розглянемо процес локального загущення сітки на основі обчислених значень гаусової кривини. Представлення сітки за допомогою квадродерева призводить до виникнення ряду особливостей в процесі її загущення.

Незважаючи на те, що в роботі розглядаються сітки з трикутними комірками використання квадродерев дає можливість розглядати всі вузли, як такі що належать чотирикутній сітці. Справді, в такому випадку інформація про сітку заноситься в пам'ять і обробляється у списків із значеннями координат чотирьох вузлів. Тобто в квадродерево заноситься інформація не про вузли сітки, а про її комірки. Тому доцільно обирати саме чотири вузли, які утворюють «чотирикутну» комірку, що занесена в дерево та на основі значення гаусової кривини в цих вузлах приймати рішення про її поділ на чотири частини, таким чином загущуючи сітку.

Розглянемо ділянку сітки на рис. 4. Кружечками позначені базові вузли сітки, які заносяться в квадродерево. Всі інші вузли потрібні лише для уникнення розривів сітки і з'явились при її тріангуляції. Значення гаусової кривини розраховується лише в базових вузлах.

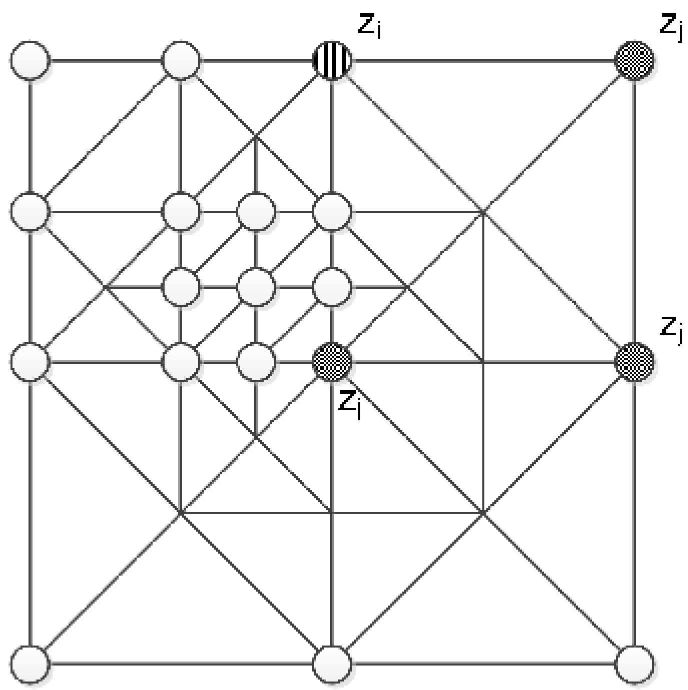

Рисунок 4. Базові вузли сітки

Для прикладу, на рис. 4 позначено вузли, що утворюють «чотирикутну» коміку. Пропонується наступний критерій для прийняття рішення про її розбиття: якщо значення гаусової кривини хоча б в одному вузлі комірки перевищує таке значення у трьох інших вузлах сітки в N_K разів, то така комірка розбивається на чотири менших і результат заноситься в квадродерево. Іншими словами, для того щоб сітка не була локально загущена, необхідно щоб значення кожного із чотирьох розглянутих вузлів потрапляло в інтервал

$$\frac{1}{N_K} K\left(z_j\right) \le K\left(z_i\right) \le N_K K\left(z_j\right), \quad i \ne j \tag{1}$$

де i — поточний вузол;

j — номери трьох інших вузлів;

$K(z_i)$ — значення гаусової кривини.

Величина N_K попередньо вибирається для кожної конкретної сітки. Її можна назвати чутливістю алгоритму, оскільки від її значення залежить якою мірою буде загущена сітка. Тому напряму впливає на вибір локального кроку сітки, а отже і на точність апроксимації. Питання вибору значення N_K і її впливу на точність апроксимації поверхні становить окремий інтерес і виходить за межі даної публікації.

На основі формули (1) можна записати алгоритм прийняття рішення про локальне загущення сітки на основі дискретної апроксимації гаусової кривини:

$$\textbf{for } \forall D = \{z_1, z_2, z_3, z_4\} \textbf{ do}$$

$$\textbf{if } \frac{1}{N_K} K(z_j) > K(z_i) \textbf{ or } K(z_i) > N_K K(z_j) \qquad i, j = \overline{1,4}, \; i \neq j$$

розділити D

записати інформацію про нащадків D *в квадродерево*

Висновки та перспективи. Запропонований алгоритм загущення сітки дозволяє досягати необхідного балансу між точністю апроксимації та раціональним використанням комп’ютерних ресурсів завдяки використанню коефіцієнта чутливості алгоритму N_K. Задаючи відповідну величину коефіцієнту інженер може досягати ступеня загущення сітки, необхідного для прийнятного рішення практичних задач.

В подальшому необхідно розробити підходи для оцінки похибки апроксимації та швидкодії алгоритмів моделювання поверхонь, які представлені квадродеревом. Крім того, теоретичний інтерес становить дослідження впливу коефіцієнта чутливості алгоритму N_K на значення локального кроку сітки та відповідно на точність дискретного моделювання поверхонь.

1. Бобенко А. И. Дискретная дифференциальная геометрия. Интегрируемая структура / А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. — xxvi+488 с.
2. Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds / [Meyer M., Desbrun M., Schroder P., Barr A. H.]. — 2001. — 27 p.
3. Пустюльга С. І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями: дис. …доктора техн. наук: 05.01.01 / Сергій Іванович Пустюльга. — К., 2006. — 316 с.
4. Ройко О. Ю. Застосування квадродерев при моделюванні складних поверхонь числовими послідовностями / О. Ю. Ройко. — Прикладна геометрія та інженерна графіка. Випуск 88. — К.: КНУБА, 2011. — 394 с.