УДК 515.2

І.В.Прушко, С.І.Пустюльга
Луцький національний технічний університет

ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗРІВНОВАЖЕНИХ КРИВИХ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИМИ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНИМИ ФУНКЦІЯМИ

В роботі досліджуються процеси дискретного моделювання кривих ліній, що описуються дробово-раціональними та ірраціональними функціями з використанням статико-геометричного методу. Запропоновано підходи та алгоритми що до визначення коефіцієнтів у неоднорідних різницевих рівняннях при побудові дискретних моделей кривих на рівномірній сітці.

Ключові слова: *дискретно представлена крива, статико-геометричний метод, поверхня.*

Постановка проблеми. Дискретне представлення кривих ліній і поверхонь знайшло широке застосування в практиці геометричного моделювання завдяки простоті аналітичного опису та ефективним алгоритмам для проведення розрахунків на ЕОМ.

Оскільки дискретно представлені поверхні, що є моделями більшості об'єктів у техніці, як правило, задаються каркасом ліній (включаючи і лінії зі складною геометрією), то розширення класів кривих для використання їх як елементів каркасів поверхонь, вивчення геометричних властивостей окремих ДПК (дискретно представлених кривих) при формуванні просторових сіток, можливостей управління їх формою, може суттєво розширити коло практичних задач для ефективного використання методів дискретного моделювання та допоможе узагальнити їх властивості для формоутворення образів з розмірністю вищого порядку.

Аналіз останніх досліджень. Дискретному представленню кривих ліній, питанням коригування їх геометричної форми, локальному та глобальному згущенню точкових каркасів присвячено ряд робіт Київської та Мелітопольської шкіл прикладної геометрії [1,2,3].

Особливу увагу заслуговує статико-геометричний метод моделювання ДПК запропонований проф. Ковальовим С.М. [2], оскільки він забезпечує простий аналітичний опис задачі, а наявність вільних параметрів у формоутворюючому навантаженні має чітку геометричну інтерпретацію та дозволяє легко керувати процесом формоутворення ДПК, враховуючи наперед задані вимоги геометричного характеру.

Даний підхід дає можливість створювати моделі ДПК з різним кроком вздовж осей координат та з різними способами дискретизації. Наприклад, крок може бути: рівномірний або функціональний вздовж осі ДПК, рівномірний або функціональний вздовж самої ДПК, тощо.

Використовуючи статико-геометричний метод для дискретного моделювання кривих з рівномірним кроком вузлів вздовж осі, в опублікованих роботах були досліджені властивості ДПК з різними параметрами вузлового навантаження. Однак, суттєві результати були отримані тільки для трьох класів кривих: криві, що описуються параболічними, показниковими та деякими видами тригонометричних функцій.

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є розробка алгоритмів (у рамках статико-геометричного методу) моделювання дискретно представлених кривих, відмінних від моделей парабол *n*-го порядку, показникових функцій, синусно-косинусних кривих, дослідження властивостей їх формоутворення та можливостей управління формою за рахунок наявних вільних параметрів.

Основна частина. Розглянемо формування статико-геометричним методом дискретної моделі кривої на рівномірній сітці із рівновагою у вузлах (рис.1). Відповідно до положень даного методу будь-яку дискретну модель, що складається з вузлів та прямолінійних зв'язків між ними можна представити як зрівноважену систему сил, де внутрішні зусилля у в'язях, що пропорційні довжинам в'язей, зрівноважуються зовнішніми зусиллями P_{yi}, прикладеними до вузлів.

Виходячи із цього можна зробити припущення про можливість розв'язання оберненої задачі – завжди можна визначити координати вузлів структури за заданими зовнішніми зусиллями, прикладеними до її вузлів. Система рівнянь рівноваги вузлів буде лінійна, оскільки координатні складові зусиль лінійно залежать від координат сусідніх вузлів.

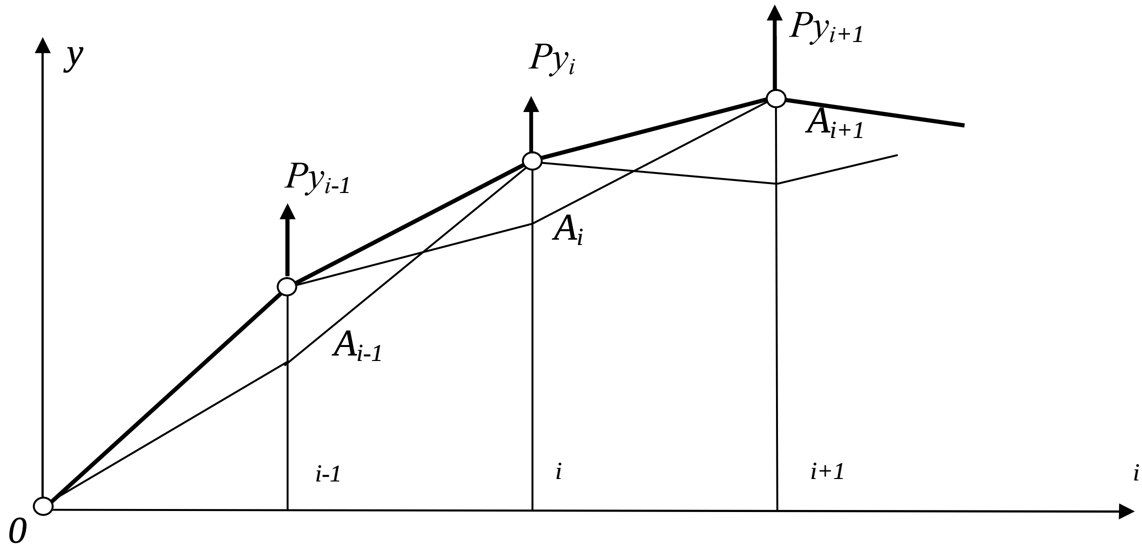


Рис.1

Лінійне рівняння рівноваги для одного i-го вузла дискретної моделі, побудованої на рівномірній сітці, можна записати у вигляді:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_i y_i + ... + a_n y_n + kP_i = 0\,; \qquad (1)$$

де y_1, y_2, …, y_n – координати вузлів сусідніх від i-го вузла, y_i – координати i-го вузла, $a_1, a_2, ...a_i, ...a_n$– коефіцієнти лінійних різницевих операторів, що показують дольову участь сусідніх вузлів у формуванні i-го вузла, які прийнято подавати у вигляді обчислювальних шаблонів, kP_i – зовнішнє навантаження, прикладене до i-го вузла.

Якщо записати систему лінійних рівнянь рівноваги (1) для всіх вузлів дискретної структури, то можна помітити, що управляючими параметрами моделі є, з одного боку - зовнішнє навантаження kP_i, прикладене до вузлів, а з іншого – коефіцієнти лінійних різницевих операторів a_n.

При використанні у якості дискретної моделі, для формування кривої, триточкової залежності між вузлами, зусилля P_{yi} орієнтуються паралельно одній із осей, а система рівнянь (1) набуде вигляду:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + kP_i = 0. \qquad (2)$$

З іншого боку, скінченно-різницеву апроксимацію диференційних рівнянь, з певною похибкою, що зменшується при збільшенні кількості суміжних точок, які приймають участь в даному процесі, теж представляють у вигляді лінійних різницевих операторів. Так, наприклад, значення 2-ої похідної з похибкою h^2 при триточковій залежності суміжних вузлів можна представити у вигляді:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}. \qquad (3)$$

Виразивши триточкову залежність (2) через kP_i, використовуючи вираз (3), отримаємо:

$$kP_i \approx \left(-h^2\right) \frac{d^2 y}{dx^2}. \qquad (4)$$

Якщо позначити $d = -h^2$, тоді:

$$kP_i \approx d\, \frac{d^2 y}{dx^2}. \qquad (5)$$

Виходячи з вище наведених міркувань, можна висунути припущення, що форма континуального аналога дискретно представленої кривої безпосередньо залежить від характеру функціонально заданого управляючого навантаження, яке формує ДПК.

Із (5) видно, що функція формоутворюючого навантаження є 2-ою похідною від рівняння континуального аналога кривої з деяким коефіцієнтом. Так, система лінійних рівнянь виду (2) при $P_i = const$ дасть дискретну модель параболи 2-го порядку $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

При цьому $y'' = 2a_2$, а отже дискретна модель параболи 2-го порядку формується під рівномірно розподіленим навантаженням.

Система лінійних рівнянь виду:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = 0, \ \left(1 \le i \le n\right),$$

аналогічна системі:

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + kP_i = 0; \\ \qquad P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1} = 0; \end{cases} \tag{6}$$

і описує дискретну модель параболи 3-го порядку $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, друга похідна якої рівна:

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x.$$

Тоді формоутворююче навантаження $kP_i \approx d\ \left(2a_2 + 6a_3 x\right)$, де $x \equiv i$ при рівномірному кроці вздовж осі *Ox*, є моделлю лінійно розподіленого навантаження, за допомогою якого формується дискретна модель параболи 3-го порядку.

Можна піти і іншим шляхом, виокремлюючи зовнішнє формоутворююче навантаження із дискретної форми континуального аналога. Загальна схема виокремлення навантаження представляється виразом:

$$\begin{aligned} & y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = a_0 + a_1(i-1) + a_2(i-1)^2 + a_3(i-1)^3 - \\ & 2(a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3) + \\ & a_0 + a_1(i+1) + a_2(i+1)^2 + a_3(i+1)^3 = \left(2a_2 + 6a_3 i\right), \end{aligned} \tag{7}$$

що є результатом аналогічним до операції подвійного диференціювання неперервного аналога моделі кривої.

Однак, навіть для степеневих функцій, із зростанням порядку континуального аналога моделі результат диференціювання та роботи алгоритму (7) різні. При цьому у роботі [4] запропонована методика перерахунку коефіцієнтів функції зовнішнього формоутворюючого навантаження, що вкрай важливо не тільки для уточнення дискретної моделі, побудованої за заданими вихідними вимогами, але і для можливості проведення операцій згущення точкових множин ДПК до досягнення необхідної їх точності. Провести таку ж аналогію для функцій зовнішнього формоутворюючого навантаження при дискретному моделюванні зрівноважених кривих інших типів (показникових або синусно-косинусних) є неможливим.

Якщо ж розглядати процеси дискретного моделювання кривих більш складнішого вигляду, що описуються дробово-раціональними або ірраціональними функціями, то виокремити зовнішнє формоутворююче навантаження за схемою (7) достатньо важко, а використовувати як аналог функції навантаження в системі скінченно-різницевих рівнянь статико-геометричного методу другу похідну неможливо із-за низької точності формованої дискретної моделі. Тому виникла ідея дискретного формування кривих такого класу за рахунок знаходження і перезадання коефіцієнтів скінченно-різницевого оператора у системах лінійних рівнянь статико-геометричного методу. При цьому, за коренями характеристичного рівняння однорідного різницевого рівняння можна відслідковувати найбільш ефективний вид дискретної апроксимації тієї чи іншої функції.

Розглянемо класи кривих, що описуються дробово-раціональними функціями, наприклад верзієру. Рівняння верзієри подамо у вигляді: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$, або, дискретизуючи дану функцію, – у вигляді:

$$y_i = \frac{a^3}{i^2 + a^2}. \tag{8}$$

Друга похідна від (8) представиться:

$$kP_i \approx \frac{dy^2}{di^2} = \frac{8a^3 i^2}{(a^2+i^2)^3} - \frac{2a^3}{(a^2+i^2)^2}. \tag{9}$$

Її можна було б використовувати як функцію зовнішнього формоутворюючого навантаження в системі скінченно-різницевих рівнянь, однак точність такої сформованої моделі буде достатньо низькою, що і наведено на рис.2. Виокремлення функції зовнішнього формоутворюючого навантаження за схемою (7) є досить трудомістким, має наступне представлення, суттєво відмінне від функції навантаження (9), але при підстановці в систему лінійних скінченно-різницевих рівнянь дає абсолютно точний результат (рис.2).

$$\begin{aligned} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -kP_i &= \frac{a^3}{(i-1)^2 + a^2} - 2\frac{a^3}{i^2+a^2} + \frac{a^3}{(i+1)^2+a^2} = \\ &= \frac{2a^3\left(3i^2 - a^2 - 1\right)}{i^4\left(i^2 - 2 + 3a^2\right) + i^2(3a^4+1) + a^2(a^4+2a^2+1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

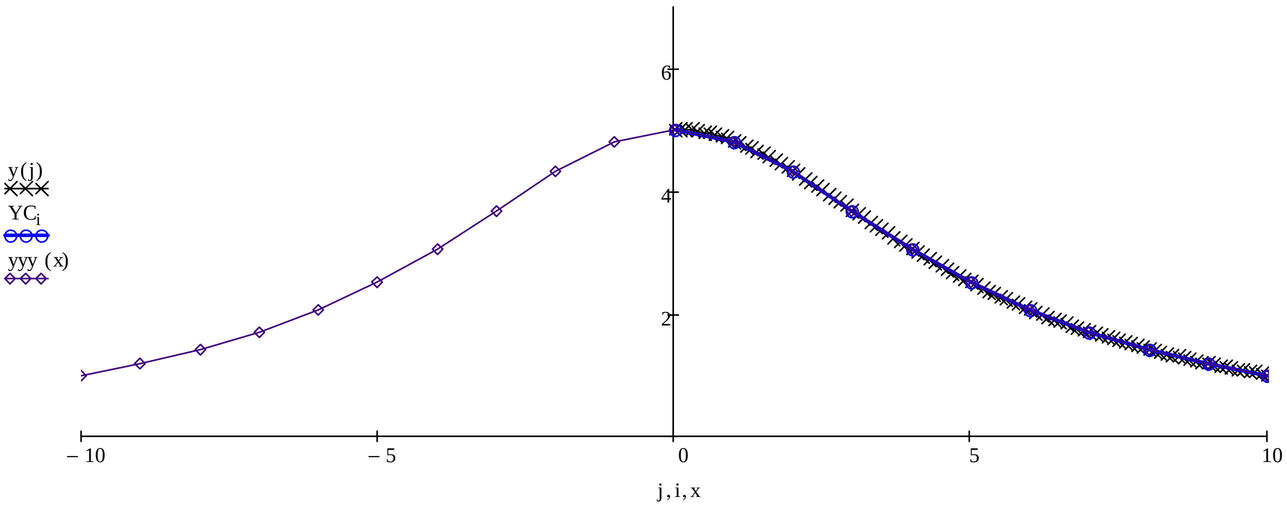


Рис. 2

Для побудови достатньо точних зрівноважених дискретних моделей кривих такого класу пропонується змінити вигляд базового однорідного різницевого рівняння, шляхом знаходження та заміни коефіцієнтів скінченно-різницевих операторів, які лежать в основі формування системи лінійних рівнянь статико-геометричного методу.

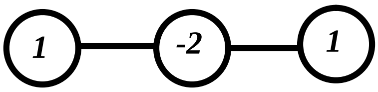
Суть пропонованого підходу полягає у наступному. За заданими вихідними даними та заданим кроком дискретизації будується система скінченно-різницевих рівнянь виду, при чому використовується вид функції зовнішнього формоутворюючого навантаження, отриманий подвійним диференціюванням за (9):

$$\begin{cases} cc_1 y_0 - 2cc_2 y_1 + cc_3 y_2 - \left(\dfrac{8a^3 1^2}{(a^2+1^2)^3} - \dfrac{2\cdot 1^3}{(a^2+1^2)^2} \right) = 0; \\ cc_1 y_1 - 2cc_2 y_2 + cc_3 y_3 - \left(\dfrac{8a^3 2^2}{(a^2+2^2)^3} - \dfrac{2\cdot 2^3}{(a^2+2^2)^2} \right) = 0; \\ \qquad ..... \\ cc_1 y_{n-2} - 2cc_2 y_{n-1} - + cc_3 y_n - \left(\dfrac{8a^3 (n-1)^2}{(a^2+(n-1)^2)^3} - \dfrac{2\cdot (n-1)^3}{(a^2+(n-1)^2)^2} \right) = 0; \end{cases}$$

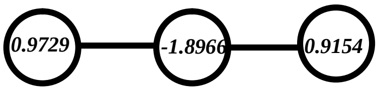
де cc_1, cc_2, cc_3 - невідомі коефіцієнти скінченно-різницевих операторів.

Аналіз на сумісність системи відносно вихідних даних дозволяє визначити всі невідомі, а саме координати вузлів дискретної моделі та коефіцієнти скінченно-різницевих операторів.

Так у тестових прикладах значення коефіцієнтів скінченно-різницевих операторів набували значень: $cc_1 = 0{,}9729115164; cc_2 = 0{,}9483724499; cc_3 = 0{,}9154200065$, тобто обчислювальний шаблон системи змінював свій вигляд із



до



При використанні такого оператора у системі скінченно-різницевих рівнянь статико-геометричного методу точність отриманих координат дискретної моделі верзієри з рівновагою у вузлах на порядок вища, ніж при використанні стандартного різницевого оператора 1 типу. Разом із тим характеристичне рівняння однорідного різницевого рівняння, побудованого на основі шаблона 2 типу, набуде вигляду:

$$0{,}9729115164 \cdot \mathrm{q}^2 - 2 \cdot 0{,}9483724499 \cdot \mathrm{q} + 0{,}9154200065 = 0,$$

корені якого:

$$q_1 = 1{,}0711301384472747054,$$

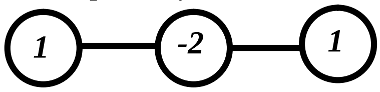
$$q_2 = 0{,}8784252608128753207 1.$$

Знайдені значення коренів показують, що дискретна апроксимація верзієри на основі показникових функцій суттєво точніша ніж із використанням базових степеневих функцій.

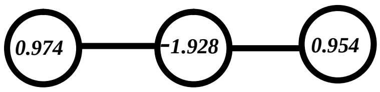
За такою ж схемою проведені дослідження і для ірраціональних функцій, на прикладі функції вигляду:

$$y_i = \frac{a^3}{\sqrt[3]{i^2 + a^2} + a^2}. \tag{11}$$

Для тестового прикладу обчислювальний шаблон змінював свій вигляд із



до



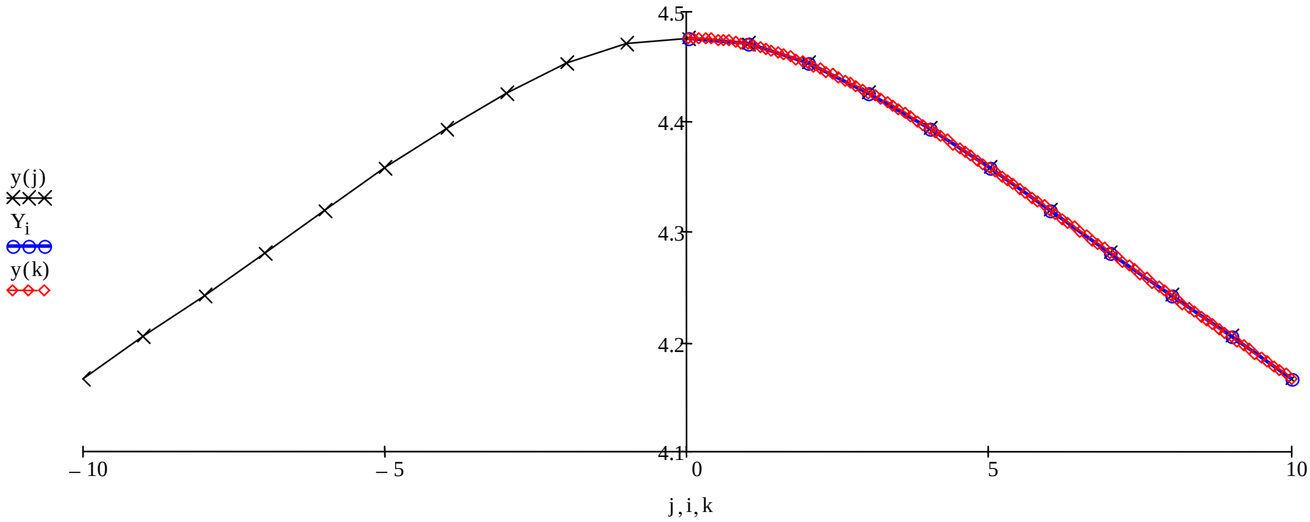


Рис.3

Характеристичне рівняння однорідного різницевого рівняння, побудованого на основі шаблона 2 типу, набуде вигляду:

$$0{,}9744268069 \cdot \mathrm{q}^2 - 2 \cdot 0{,}9647151385 \cdot \mathrm{q} + 0{,}9548328635 = 0,$$

корені якого:

$$q_1 = 1{,}00659896376533031119\,,$$

$$q_2 = 0{,}97346794668657671479\,,$$

показують, що дискретна апроксимація на основі показникових функцій є більш ефективнішою при дискретному моделюванні кривих, описаних ірраціональними функціями.

Наочне представлення дискретної моделі ірраціональної кривої наведено на рис. 3.

Висновки. В даній роботі досліджено процеси дискретного моделювання кривих ліній, що описуються дробово-раціональними та ірраціональними функціями з використанням статико-геометричного методу. Запропоновано підходи та алгоритми що до визначення коефіцієнтів у неоднорідних різницевих рівняннях при побудові дискретних моделей кривих на рівномірній сітці.

1. V.M. Naydysh. Discrete Geometric Modelling – a New Direction of the Development in Applied Geometry of Curve Lines and Surfaces. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.:2002.- Вип.70. с. 50-54.
2. Ковалёв С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дис…..докт. техн. наук. 05.01.01 / М . : МАИ, 1986. -348с.
3. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями. Дис…..докт. техн. наук. 05.01.01 / К.: КНУБА, 2006.-320с.
4. Пустюльга С.І., Самчук В.П. Згущення точкових каркасів дискретно представлених кривих за рахунок параметрів зовнішнього формоутворюючого навантаження. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.:2011.-Вип.88. с. 35-40.