

УДК 514.8

Т.С.Пилипака, В.М.Бабка, Я.С.Кремець

Національний університет біоресурсів і природокористування України

ОСОБЛИВОСТІ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ НА ПОВЕРХНЯХ ОБЕРТАННЯ

Геодезичні лінії на поверхнях обертання побудовані за допомогою теореми Клеро. Серед відомих поверхонь знайдені такі, для яких рівняння геодезичних ліній знаходяться в кінцевому вигляді для усіх напрямів із точки на поверхні або ж тільки для певного напрямку. Якщо таких рівнянь не існує, геодезичні лінії на поверхні побудовані за допомогою чисельного інтегрування.

Постановка проблеми. Незважаючи на те, що способи побудови геодезичних ліній на поверхнях обертання давно відомі, їх зображення на цих поверхнях в науковій літературі зустрічається дуже рідко. Це пояснюється тим, що їх відшукування, як правило, зводиться до чисельного інтегрування, здійснити яке до недавнього часу було непросто, а тим більше побудувати саму лінію за одержаними розрахунками. Часто форму геодезичної лінії досліджували за окремими характерними точками, аналізуючи в цілому диференціальне рівняння і його поведінку в цих точках. Наприклад, геодезична лінія на еліпсоїді обертання в збірнику задач для вишів [1] побудована невірно, хоча її розташування між двома паралелями знайдено правильно. Переконайтеся в цьому просто, якщо уявити, що розтяжна нитка (наприклад, гумова) не повинна зісковзувати із поверхні, будучи натягнутою так, як показано на рис. 193 (стор. 241) в зазначеній праці [1].

Аналіз останніх досліджень. Якщо поверхні обертання виготовляти із композитних матеріалів, армованих нитками, то нитки необхідно намотувати саме по геодезичних лініях, оскільки в таких випадках не виникатиме зусиль, які намагаються змістити нитки із свого початкового положення. Крім того, геодезичні лінії є аналогом прямих ліній на площині – вони сполучають дві точки на поверхні по найкортшій відстані. Знаходження геодезичних ліній на поверхнях було темою досліджень різних авторів [2-4]. Крім того, при проектуванні деяких робочих органів (зокрема, ґрунтообробних), враховують розташування геодезичних ліній на їх поверхні, оскільки частинки технологічного матеріалу при примусовому їх русі по робочому органу намагаються рухатися саме по лініях, близьких до геодезичних, особливо при високих швидкостях переміщення [5, 6].

Формулювання мети статті. Дослідити форму геодезичних ліній на відомих поверхнях обертання з допомогою як аналітичних рівнянь в кінцевому вигляді, так і чисельних методів інтегрування.

Основна частина. Дослідження показали, що відшукування геодезичних ліній на поверхнях обертання, як правило, зводиться до складання диференціальних рівнянь, розв'язок яких потребує чисельних методів інтегрування [4]. Застосування відомої теореми Клеро понижує порядок диференціального рівняння, зводячи його до інтегралу, який теж рідко виражається в елементарних функціях. Нам, наприклад, із відомих нерозгортних поверхонь обертання тільки для псевдосфери вдалося взяти інтеграл і то для того випадку, коли вона віднесена до ізометричної сітки координатних ліній [7].

Якщо поверхня обертання задана параметричними рівняннями у формі:

$$X = j \cos v; \quad Y = j \sin v \quad Z = y, \quad (1)$$

де $\varphi = \varphi(u)$; $\psi = \psi(u)$ – параметричні рівняння меридіана, то згідно теореми Клеро внутрішнє рівняння геодезичної лінії у формі $v = v(u)$ описується інтегралом:

$$v = c \int \frac{\sqrt{j'^2 + y'^2}}{j \sqrt{j^2 - c^2}} du, \quad (2)$$

де c – стала, від якої залежить напрям геодезичної лінії в конкретній точці при заданих значеннях внутрішніх координат u і v .

Для псевдосфери, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, параметричні рівняння меридіана та їх похідні запишуться:

$$j = -\frac{a}{u}; \quad y = a[\ln(\sqrt{u^2 - 1} - u) + \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u}]; \quad (3)$$

$$j' = \frac{a}{u^2}; \quad y' = -\frac{a}{u^2}\sqrt{u^2 - 1},$$

де a – стала величина.

Підстановка (3) в (2) приводить до виразу, який можна проінтегрувати:

$$v = -c \int \frac{udu}{\sqrt{a^2 - c^2u^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{a^2 - c^2u^2} + v_0. \quad (4)$$

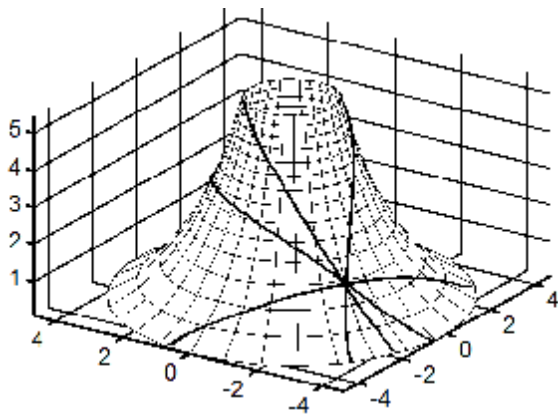


Рис. 1. Геодезичні лінії на поверхні псевдосфери.

Після підстановки виразу $v=v(u)$ із (4), виразів $\varphi=\varphi(u)$, $\psi=\psi(u)$ із (3) в (1), одержимо параметричні рівняння геодезичної лінії на поверхні псевдосфери. На рис. 1 за одержаними рівняннями побудовано геодезичні лінії, які виходять із точки на псевдосфері і дають уявлення про їх розташування. Вивчаючи їх розташування, можна зробити висновок про те, що в будь-якій точці псевдосфери геодезична лінія, проведена в довільному напрямі, при підйомі вгору торкнеться певної паралелі і почне опускатися вниз.

Зважаючи на те, що вираз (2) для відомих поверхонь обертання рідко вдається проінтегрувати, будемо шукати таку поверхню обертання, щоб це можна було здійснити,

підбираючи вирази $\varphi=\varphi(u)$ і $\psi=\psi(u)$, які задають меридіан. Позбудемося квадратних коренів, прирівнявши відповідні вирази до одиниці:

$$\frac{j'^2 + y'^2}{j^2 - c^2} = 1, \quad \text{або} \quad v = c \int \frac{du}{j}. \quad (5)$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння (5, зліва), однак при цьому потрібно задати одну із функцій $\varphi=\varphi(u)$ або $\psi=\psi(u)$. Таким чином, виникає багато варіантів пошуку, проте це не означає багатоваріантність рішень, оскільки, по-перше, потрібно диференціальне рівняння розв'язати, а по-друге, проінтегрувати вираз (5, справа). Розглянемо деякі варіанти.

Випадок перший. Нехай $\psi=au$, де a – стала величина. Тоді $y'=a$ і диференціальне рівняння (5, зліва) набуває наступного вигляду відносно невідомої функції $\varphi=\varphi(u)$:

$$j'^2 + a^2 = j^2 - c^2. \quad (6)$$

Програмний продукт „Mathematica” дає наступні розв'язки рівняння (6):

$$j_1 = \frac{a^2 + c^2}{2} e^{-(u+c_1)} + \frac{1}{2} e^{u+c_1}; \quad j_2 = \frac{a^2 + c^2}{2} e^{u-c_1} + \frac{1}{2} e^{-u+c_1}, \quad (7)$$

де c_1 – постійна інтегрування.

Підстановка виразів φ_1 і φ_2 в (5, справа) після інтегрування дає відповідно два розв'язки, тобто два вирази $v=v(u)$:

$$v_1 = \frac{2c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \text{Arctg} \frac{e^{u+c_1}}{\sqrt{a^2 + c^2}} + v_0; \quad v_2 = \frac{2c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \text{Arctg} \left(\sqrt{a^2 + c^2} e^{u-c_1} \right) + v_0. \quad (8)$$

Перевірка показала, що обидва вирази (7) разом із виразом $\psi=au$ описують один і той же меридіан (в цьому можна переконатися, надавши в одному із них від'ємних значень змінній u). Відповідно і рівняння (8) описують групу геодезичних ліній, які мають певний напрям. На рис. 2,а побудовано поверхню обертання за знайденим меридіаном та групу геодезичних ліній.

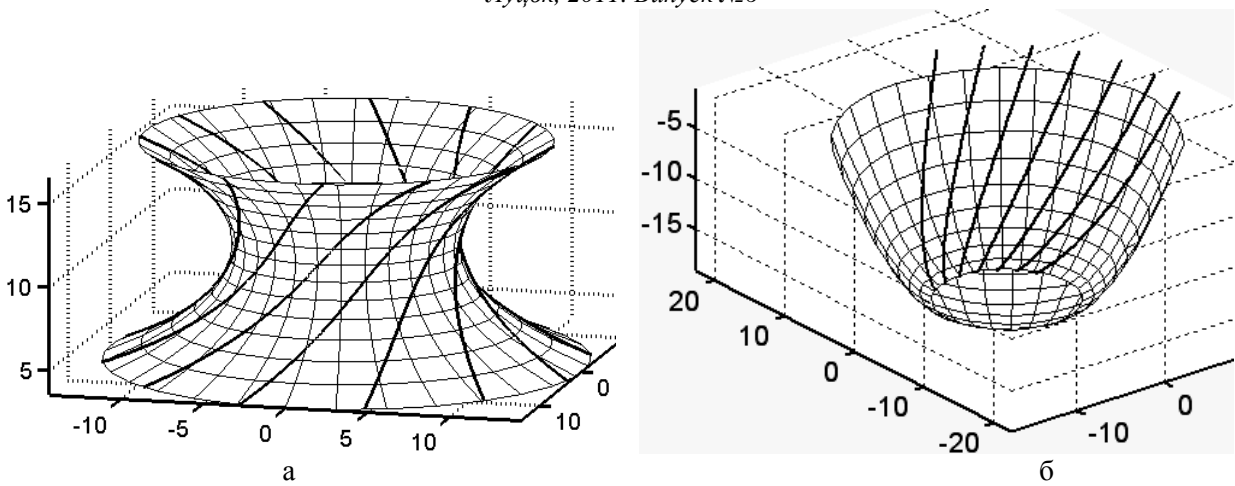


Рис. 2. Геодезичні лінії на поверхнях обертання, які отримані в результаті порівнювання до одиниці підкоренових виразів у (5):

- а) меридіан задано виразами $\psi = au$ і $\varphi = \varphi(u)$ згідно (7);
б) меридіан задано виразами $\varphi = au$ і $\psi = \psi(u)$ згідно (9).

Випадок другий. Нехай $\varphi = au$, тоді $v = c \int \frac{du}{j} = c \int \frac{du}{au} = \frac{c}{a} \ln u + v_0$. Диференціальне рівняння (5, зліва) зводиться до інтегрування виразу:

$$y = \int \sqrt{a^2 u^2 - (a^2 + c^2)} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 u^2 - (a^2 + c^2)} - \frac{a^2 + c^2}{2a} \ln \left[2a \left(au + \sqrt{a^2 u^2 - (a^2 + c^2)} \right) \right]. \quad (9)$$

Поверхня обертання для другого випадку із нанесеною групою геодезичних ліній показана на рис. 2,б. В певній області вона не існує (там, де підкореновий вираз у (9) набуває від'ємних значень). В розглянутих випадках вдалося знайти поверхні обертання, у яких меридіани і геодезичні лінії описуються параметричними рівняннями в кінцевому вигляді. Проте ними описано тільки часткову групу геодезичних ліній, які мають певний напрям на поверхні. Пояснюється це тим, що стала c входить до рівняння меридіана, тобто впливає на його форму.

Щоб побудувати геодезичні лінії на деяких відомих поверхнях обертання, ми застосували чисельні методи інтегрування. На рис. 3 зображено геодезичні лінії на параболоїді обертання. Їх поведінка подібна до поведінки геодезичних ліній на псевдосфері.

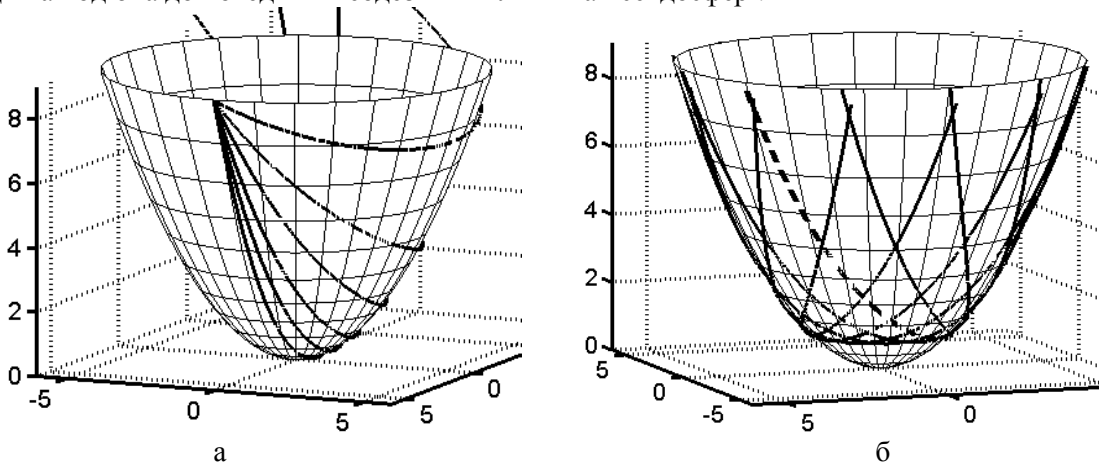


Рис. 3. Геодезичні лінії на параболоїді обертання:
а) геодезичні лінії виходять із заданої точки в різних напрямках;
б) група геодезичних ліній, які торкаються до паралелі

Зовсім інша поведінка геодезичних ліній на еліпсоїді обертання. Якщо задати її напрям в певній точці так, щоб він не збігався із напрямом меридіана, то при необмеженому її продовженні геодезична лінія буде «намотуватися» на еліпсоїд і розташується між двома симетричними паралелями, при цьому може бути замкненою або незамкненою. На рис. 4 побудовано геодезичні лінії, які належать поверхні еліпсоїда обертання.

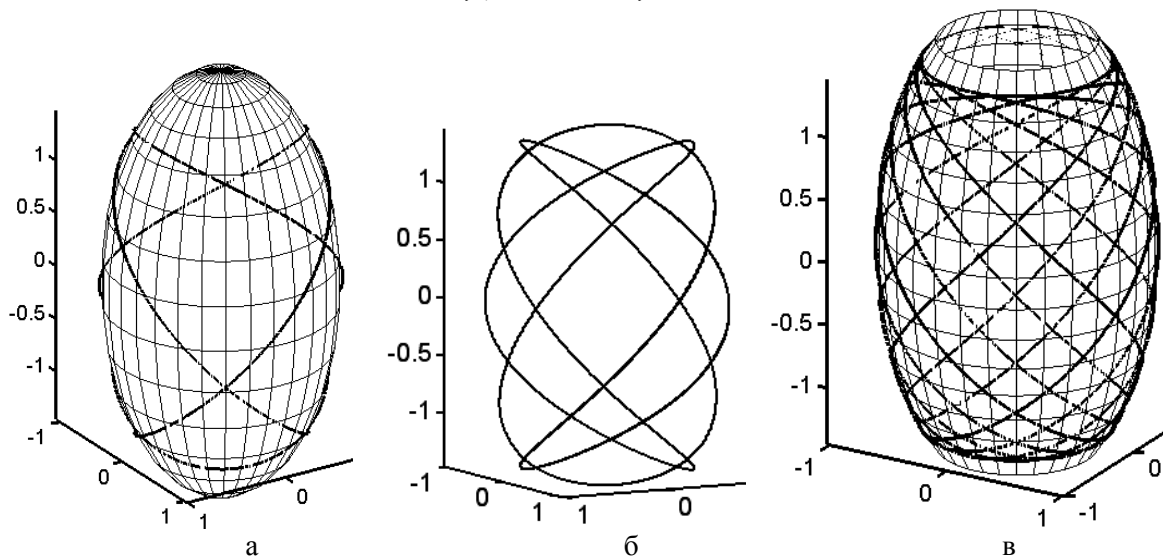


Рис. 4. Замкнені геодезичні лінії на поверхні еліпсоїда обертання:
 а) для наочності лінія показана на поверхні;
 б) щоб показати, що лінія замкнена, вона показана без поверхні;
 в) на поверхні розташовані чотири замкнені лінії, повернуті одна відносно одної на 90° навколо осі обертання.

Висновки. Як правило, весь клас геодезичних ліній на поверхні обертання в кінцевому вигляді знайти не вдасться. Спеціальним підбором форми меридіана можна знайти окрему групу ліній, що мають певний напрям у заданій точці. На інших поверхнях обертання, в тому числі і на відомих, вони будуються за допомогою чисельних методів інтегрування.

1. Белько И.В. Сборник задач по дифференциальной геометрии / И.В. Белько, В.И. Ведерников, В.Т. Воднев, А.А. Гусак, А.И. Нахимовская, А.П. Рябушко, Л.К. Тутаяев, А.С. Феденко. – М.: Наука, 1979. – 272 с.
2. Пилипака С.Ф. Дослідження геодезичних ліній на поверхні гвинтового коноїда / С.Ф. Пилипака, Т.В. Гнітецька // Сучасні проблеми геометричного моделювання. Матеріали міжнародної науково-практичної конференції. – Львів: Національний університет "Львівська політехніка", 2003. –С. 77 - 80.
3. Пилипака С.Ф. Побудова геодезичних ліній на поверхні гіперболічного параболоїда / С.Ф. Пилипака, Я.С. Кремець // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. –Том 49. –Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – С. 62 – 69.
4. Пилипака С.Ф. Теоретичний пошук рівнянь геодезичних ліній в кінцевому вигляді на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Я.С. Кремець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. –К.: КНУБА, 2011. –Вип. 87. – С. 302 – 308.
5. Войтюк Д.Г. Побудова геодезичних ліній, як граничних траєкторій руху матеріальних частинок по поверхні / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Науковий вісник Національного аграрного університету. –К.: НАУ, 2003. –Вип. 60. –С. 138-141.
6. Юрчук В.П. Проектування поверхні роторного копача шляхом використання геодезичної лінії / В.П. Юрчук, О.Г. Гетьман // Труды Таврической государственной агротехнической академии. – Вып.4. Прикл. геометрия и инж. графика. - Т.6. – Мелито-поль: ТГАТА, 1999. – С. 85 – 88.
7. Норден А.П. Дифференциальная геометрия. – М.: Госуд. уч.-педагог. изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1948. – 215 с.