УДК 514.752

С.Ф.Пилипака, М.М.Муквич
Національний університет біоресурсів і природокористування України
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»

АНАЛІТИЧНА УМОВА ВІДНЕСЕННЯ ПОВЕРХНІ ДО ЛІНІЙ КРИВИНИ ЯК МНОЖИНИ КІЛ КРИВИНИ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ

Доведено, що циклічний каркас ліній кривини просторової кривої утворює сім'ю ліній кривини конструйованої каналової поверхні. Знайдено аналітичні умови утворення поверхні, віднесеної до ліній кривини, у системі супровідного тригранника просторової кривої, заданої у функціях довжини дуги.

Ключові слова: *кола кривини, супровідний тригранник Френе, ортогональна сім'я ліній.*

Постановка проблеми. Задача віднесення поверхонь до ліній кривини зумовлена практичними задачами дослідження взаємодії середовища із поверхнями. Зокрема, знаходження аналітичних умов віднесення каналових поверхонь до ліній кривини, приводить до розв'язування диференціальних рівнянь, які у загальному випадку не інтегруються в квадратурах [3, 4]. Тому знаходження умов віднесення та дослідження можливості побудови параметричних рівнянь каналових поверхонь, віднесених до ліній кривини, є важливою геометричною задачею.

Аналіз останніх досліджень. Серед багатьох конструктивних способів утворення каналових поверхонь із просторовою лінією центрів вирізнимо три способи. При використанні першого способу [2, 5] каналову поверхню утворюють як обвідну поверхню однопараметричної сім'ї сфер, центри яких розташовані на заданій лінії. Наступний спосіб полягає в тому, що поверхня утворюється за допомогою кола змінного радіуса, центр якого переміщується по дотичній до заданої напрямної кривої разом із цією дотичною, а його площина залишається нормальною дотичній [2]. Тоді визначник каналової поверхні характеризують просторова напрямна крива, функції залежності відстані центра формотворчого кола від точки дотику на напрямній кривій та радіус формотворчого кола. Еквівалентність аналітичних перетворень першого і другого способів показано в роботі [2].

При використанні третього способу коло постійного або змінного радіуса розташовується певним чином у триграннику Френе напрямної кривої [1]. При русі тригранника по напрямній кривій формотворче коло утворює циклічну поверхню.

Для усіх вирізнених способів циклічний каркас кіл поверхні утворює сім'ю із ліній кривини (тобто поверхня є каналовою) за умови виконання аналітичних обмежень, які є диференціальними рівняннями і у загальному випадку не інтегруються в квадратурах, що ускладнює побудову параметричних рівнянь каналових поверхонь. При віднесенні поверхні до ліній кривини другу сім'ю координатних ліній поверхні знаходять із умови її ортогональності до ліній циклічного каркасу [1, 2, 3, 4].

Задача знаходження параметричних рівнянь каналових поверхонь із просторовою лінією центрів, віднесених до ліній кривини, частково розв'язується при обмеженні початкових умов та при розгляді окремих випадків каналових поверхонь. Зокрема, у роботі [3] досліджено умови віднесення до ліній кривини трубчастої поверхні у системі супровідного тригранника просторової напрямної кривої, а в роботі [4] досліджено умови віднесення до ліній кривини трубчастої поверхні як множини кіл кривини гвинтової лінії.

Формулювання мети статті. Знайти аналітичні умови утворення каналової поверхні як множини кіл кривини просторової кривої та умови віднесення каналової поверхні до ліній кривини.

Основна частина.

Задамо просторову лінію f векторним рівняннями у функції довжини її дуги s:

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = x(s) \cdot \bar{i} + y(s) \cdot \bar{j} + z(s) \cdot \bar{k}, \tag{1}$$

де $\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$ – орти нерухомої системи координат $Oxyz$ (рис.1).

Нехай у точці A просторової кривої f, заданої рівняннями (1), знаходиться вершина супровідного тригранника Френе (рис.1). Кожній точці просторової кривої (1) поставимо у відповідність її коло кривини, яке буде знаходитись у стичній площині тригранника [6].

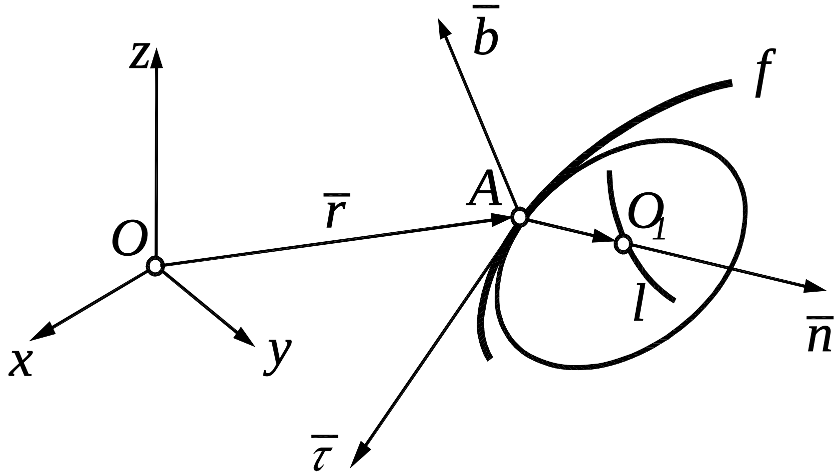

Рис.1. До утворення циклічної поверхні, як множини кіл кривини просторової лінії.

Радіус кола кривини дорівнює: $R = R(s) = \dfrac{1}{k(s)}$, де $k = k(s) -$ кривина просторової кривої f. Центри кіл кривини будуть належати деякій лінії центрів l (рис.1), векторне рівняння якої $\overline{r_ц} = \overline{OA} + \overline{AO_1}$ запишемо у вигляді: $\overline{r_ц} = \overline{r} + \overline{n} \cdot \dfrac{1}{k(s)}$.

Тоді векторне рівняння циклічної поверхні, утвореної множиною кіл кривини просторової кривої f, заданої рівняннями (1), має вигляд:

$$\overline{R}(v,s) = \overline{r}(s) + \overline{t} \cdot \frac{1}{k(s)} \cdot \cos v + \overline{n} \cdot \frac{1}{k(s)} \cdot (1 + \sin v), \tag{2}$$

де $v -$ незалежна змінна, $k = k(s) -$ кривина просторової кривої f.

Вираз кривини $k(s)$ просторової кривої f можна знайти за відомими формулами диференціальної геометрії [6]:

$$k(s) = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{3}$$

Для того, щоб каркас кіл циклічної поверхні (2) утворював сім’ю із ліній кривини (тобто щоб поверхня (1) була каналовою), уздовж цієї сім’ї (у нашому випадку при $s = const$), необхідне виконання умови [6]:

$$L \cdot F - M \cdot E = 0, \tag{4}$$

де $E, F -$ коефіцієнти першої; $L, M -$ коефіцієнти другої квадратичних форм поверхні (2).

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (2), диференціюючи векторне рівняння (2) та застосовуючи формули Серре-Френе [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{R}(v,s)}{\partial v} &= \left(-\frac{1}{k} \cdot \sin v\right) \cdot \overline{t} + \left(\frac{1}{k} \cdot \cos v\right) \cdot \overline{n}; \\ \frac{\partial \overline{R}(v,s)}{\partial s} &= \left(\left(\frac{1}{k}\right)'_s \cdot \cos v - \sin v\right) \cdot \overline{t} + \left(\cos v + \left(\frac{1}{k}\right)'_s \cdot (1 + \sin v)\right) \cdot \overline{n} + \frac{s}{k}(1 + \sin v) \cdot \overline{b}, \end{aligned} \tag{5}$$

де $s = s(s) -$ скрут просторової кривої (1).

Використавши рівності (5), після спрощень, отримаємо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (2):

$$E=\left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial s}\right)^2=\frac{1}{k^2};$$
$$F=\frac{\partial \overline{R}}{\partial s}\cdot\frac{\partial \overline{R}}{\partial v}=\frac{1}{k}\cdot\left(1+\left(\frac{1}{k}\right)'_s\cdot\cos v\right); \qquad (6)$$
$$G=\left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial v}\right)^2=2\cdot\left(\left(\frac{1}{k}\right)'_s\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{k}\right)'_s\cdot\cos v+1+\frac{s^2}{k^2}\cdot(1+\sin v)^2.$$

Диференціюючи рівності (5) та застосовуючи формули Серре-Френе, після спрощень отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \overline{R}(v,s)}{\partial v^2}=\left(\frac{1}{k}\cdot\cos v\right)\cdot\overline{t}+\left(-\frac{1}{k}\cdot\sin v\right)\cdot\overline{n};$$
$$\frac{\partial^2 \overline{R}(v,s)}{\partial v\partial s}=-\left(\left(\frac{1}{k}\right)'_s\cdot\sin v+\cos v\right)\cdot\overline{t}+\left(\left(\frac{1}{k}\right)'_s\cdot\cos v-\sin v\right)\cdot\overline{n}+\frac{s}{k}\cdot\cos v\cdot\overline{b}. \qquad (7)$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні знаходять із виразів [6]:

$$L=\frac{\left(\frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial v^2}\frac{\partial \overline{R}}{\partial v}\frac{\partial \overline{R}}{\partial s}\right)}{\sqrt{EG-F^2}};\quad M=\frac{\left(\frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial v\partial s}\frac{\partial \overline{R}}{\partial v}\frac{\partial \overline{R}}{\partial s}\right)}{\sqrt{EG-F^2}}. \qquad (8)$$

Тоді умову (4) утворення каналової поверхні можна записати у спрощеному вигляді:

$$L_1\cdot F-M_1\cdot E=0, \qquad (9)$$

де $L_1=\left(\frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial v^2}\frac{\partial \overline{R}}{\partial v}\frac{\partial \overline{R}}{\partial s}\right)$; $M_1=\left(\frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial v\partial s}\frac{\partial \overline{R}}{\partial v}\frac{\partial \overline{R}}{\partial s}\right)$.

Підставивши (5) і (7) в останні рівності, після перетворень і спрощень отримаємо:

$$L_1=-\frac{s}{k^3}(1+\sin v);\qquad M_1=-\frac{s}{k^2}\cdot(\sin v+1)\cdot\left(\left(\frac{1}{k}\right)'_s\cdot\cos v+1\right). \qquad (10)$$

Підставивши вирази (6) і (10) у ліву частину умови (9), отримаємо правильну рівність. Тому можна сформулювати **твердження**: *циклічний каркас кіл кривини просторової кривої утворює сім'ю із ліній кривини каналової поверхні*.

У рівностях (6) середній коефіцієнт F не дорівнює нулю, тому сітка координатних ліній косокутна і друга сім'я не є лініями кривини. Щоб знайти сім'ю ліній, ортогональну до множини кіл циклічного каркасу, необхідно розв'язати диференціальне рівняння ортогональних траєкторій (до сім'ї, утвореної при різних значеннях $s=const$) [6]:

$$F\cdot ds+E\cdot dv=0 \qquad (11)$$

Підставивши вирази (6) коефіцієнтів першої квадратичної форми в умову (11) отримаємо диференціальне рівняння:

$$\left(\left(\frac{1}{k}\right)_s' \cdot \cos v + 1\right) \cdot \frac{1}{k} \cdot ds + \frac{1}{k^2} \cdot dv = 0,$$

яке після перетворень і спрощень має вигляд:

$$\frac{dv}{ds} = \left(\left(\frac{1}{k(s)}\right)_s' \cdot \cos v - 1\right) \cdot k(s). \tag{12}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (12) є умовою віднесення каналової поверхні, утвореної множиною кіл кривини просторової кривої, до ліній кривини.

Диференціальне рівняння (12) відноситься до диференціальних рівнянь *не розв'язних відносно похідної* [7] щодо невідомої функції $v = v(s)$. Заміна $t = tg\frac{v}{2}$ перетворює його до диференціального рівняння Ріккаті, яке в загальному випадку не інтегрується в квадратурах [7].

Якщо розглянути трубчасту поверхню, утворену множиною кіл кривини просторової *кривої постійної кривини* [6, с.202] $(k = const)$, то диференціальне рівняння (12) спрощується і його загальний розв'язок $v = u - ks$ є умовою віднесення поверхні до ліній кривини (де u – постійна інтегрування, яка буде новою змінною замість v у векторному рівнянні (2)). Цей результат було отримано у роботі [4] при конструюванні трубчастої поверхні, утвореної множиною кіл кривини гвинтової лінії.

Висновки. Циклічний каркас кіл кривини просторової кривої утворює сім'ю із ліній кривини каналової поверхні. Загальний розв'язок диференціального рівняння (12) є аналітичною умовою віднесення каналової поверхні (2) до ліній кривини. Диференціальне рівняння (12) є диференціальним рівнянням Ріккаті, яке в загальному випадку не інтегрується в квадратурах. Вивчення можливості інтегрування диференціального рівняння (12) з метою отримання параметричних рівнянь каналової поверхні (циклічний каркас якої утворено колами кривини просторової кривої), віднесеної до ліній кривини, є перспективою подальших досліджень.

1. Пилипака С.Ф. Конструювання поверхонь та їх неперервне згинання в кінцеві форми на основі управління натуральними параметрами: Автореф. дис... докт. техн. наук: 05.01.01 / С.Ф. Пилипака. – Київський націон. унів. будівн. і архітектури. – Київ, 2000. – 35 с.
2. Фролов О. В. Каналові поверхні та їх віднесення до ліній кривини / О.В. Фролов // Праці ТДАТА. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – № 4.– Прикл. геометрія та інженерна графіка. – Т. 22. – С. 112–120.
3. Муквич М.М. Конструювання трубчастих поверхонь із просторовою віссю, описаних сім'ями координатних ліній кривини / М.М. Муквич // Прикл. геометрія та інженерна графіка.– К.:КНУБА, 2009.– № 81.– С.195–200.
4. Несвідомін В.М. Конструювання трубчастої поверхні, віднесеної до ліній кривини, як множини кіл кривини гвинтової лінії / В.М. Несвідомін, В.М. Бабка, М.М. Муквич // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2011. – № 28. – С.45–50.
5. Норден А.П. Теория поверхностей / Норден А.П. – М., 1956.– 260 с.
6. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия / Выгодский М.Я. – М.–Л.: ГТТИ, 1949.– 511 с.
7. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения/А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перес-тюк .– К.: Вища школа, 1989. – 384 с.