УДК 514.18
А.П.Мотайло
Херсонський національний технічний університет

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ БАЗИСІВ ІКОСАЕДРА

У роботі виконаний порівняльний аналіз обчислювальних властивостей різних базисів ікосаедра. За основу досліджень обрано такі локальні характеристики як величини визначників матриць Грама та числа обумовленості цих матриць.

Ключові слова*: ікосаедр, базис, матриця Грама, число обумовленості матриці Грама.*

Постановка проблеми. У методах інтерполювання функцій у 3D, зокрема у методі скінченних елементів, перевагу надають тілам Платона у формі тетраедра та гексаедра. Перші вдалі спроби використання октаедра (третього тіла Платона) в якості комірки просторової решітки в задачах чисельного моделювання призвели до ідеї вивчення можливостей інтерполювання функцій на ікосаедрі (четвертого тіла Платона). І, як наслідок, неоднозначність вирішення задачі побудови системи базисних функцій на цьому багатограннику стала мотивом для порівняльного аналізу обчислювальних характеристик базисів ікосаедра.

Аналіз попередніх публікацій, ціль статті. З появою октаедра у вигляді 7–вузлового скінченого елемента у роботах [1, 2], 6–вузлового – у роботах [3, 4] та їх порівняльного аналізу [5] стало зрозуміло, що цей елемент наділений навіть кращими за гексаедр інтерполяційними характеристиками. А використання обчислювального шаблону у формі гексаедра та октаедра, вписаних у кулю, в задачі Діріхле для рівняння Лапласа [6] дозволяє отримати точний розв'язок в контрольних точках вертикального діаметра всередині кулі. Застосування ікосаедра в якості обчислювального шаблону для розв'язуваної задачі Діріхле стало можливим завдяки появі базисів 12–вузлового ікосаедра [7–10]. У роботі [7] систему базисних функцій нецентрованого ікосаедра (12 вузлів) було отримано в результаті застосування процедури конденсації [11] до центрованого ікосаедра (13 вузлів), базисні функції якого були побудовані методом Уачспресса "множення площин" (або "product of planes") [12]. Базис [8] отриманий на основі гармонічних поверхонь обертання третього порядку, а базиси [9, 10] – на основі комбінації поверхонь обертання другого порядку та площин. Такі геометричні підходи до побудови базисних функцій ікосаедра дозволили отримати базиси, що відрізняються не тільки формоутворенням відповідних поверхонь рівня, степенем та компактністю структури поліномів базисних функцій, а й деякими інтерполяційними якостями.

Ціль статті – порівняти різні базиси ікосаедра на основі локальних характеристик у вигляді визначника матриці Грама та числа обумовленості матриці Грама.

Основна частина. У роботах [7–10] розглядається ікосаедр, вписаний у сферу одиничного радіуса з вузлами, розташованими у вершинах багатогранника. У роботі [7] прямокутну систему координат обрано так, що осі проходять через середини попарно паралельних ребер ікосаедра, а саме, вісь Ox – через середини ребер 3–4 та 8–9, вісь Oy – через середини ребер 2–10 та 5–7, вісь Oz – через середини ребер 1–11 та 6–12 (рис.1). У роботах [8–10] систему координат обрано таким чином, що вісь Oz проходить через вузли 11, 12, вісь Ox – через середини середніх ліній паралельних граней 1–8–9 та 3–4–6, а вісь Oy – через середини паралельних ребер ікосаедра (рис.2). У кожному випадку початок системи координат співпадає із барицентром ікосаедра.

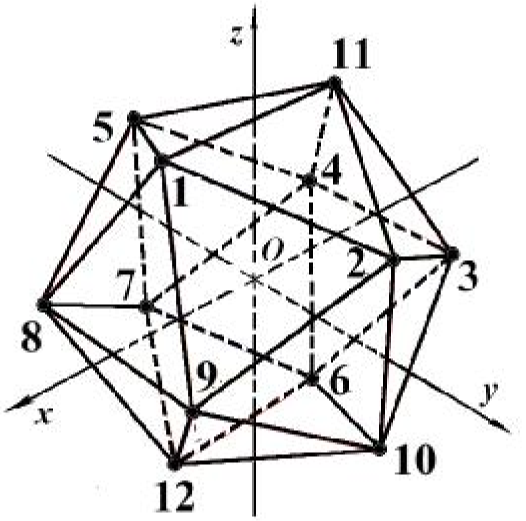


Рис.1. Ікосаедр, асоційований із групою обертань порядку 2

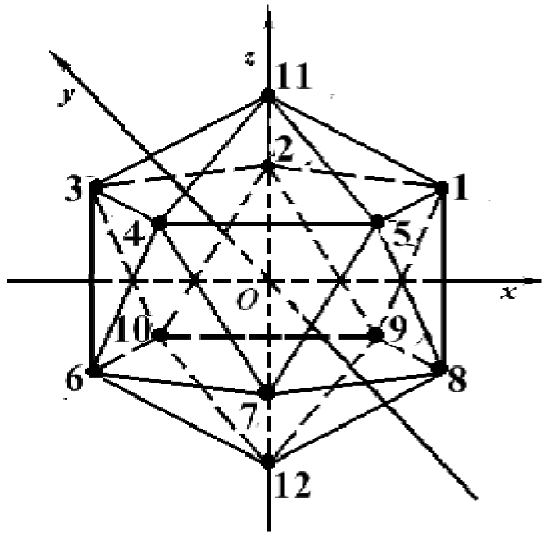


Рис.2. Ікосаедр, асоційований із групою обертань порядку 5

Базиси 12–вузлового ікосаедра [7–10], представлені в табл.1 функціями, що відповідають вузлу 11, є поліноміальними четвертого порядку [7] та третього порядку [8–10]. Очевидно, що гармонічними по Лапласу є лише функції базису [8], отримані як поверхні обертання третього порядку.

Таблиця 1

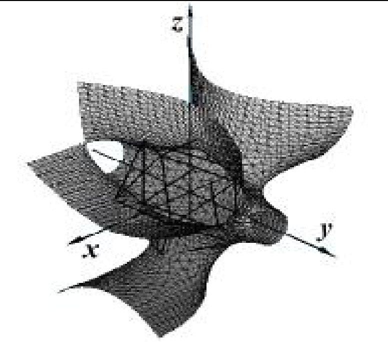
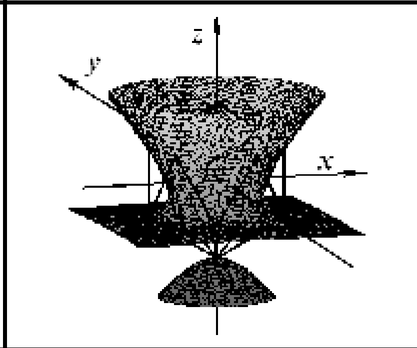
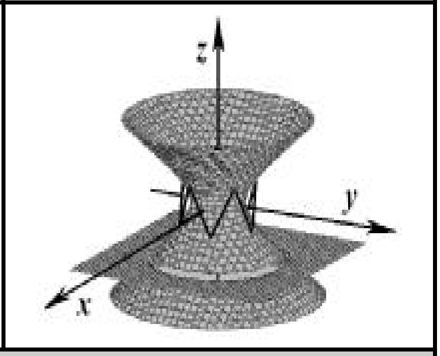
Приклади базисних функцій ікосаедра

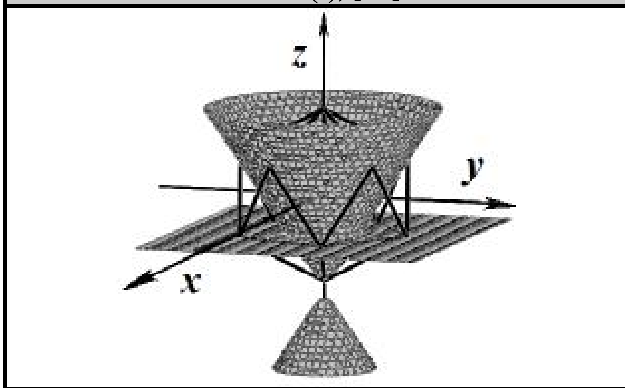
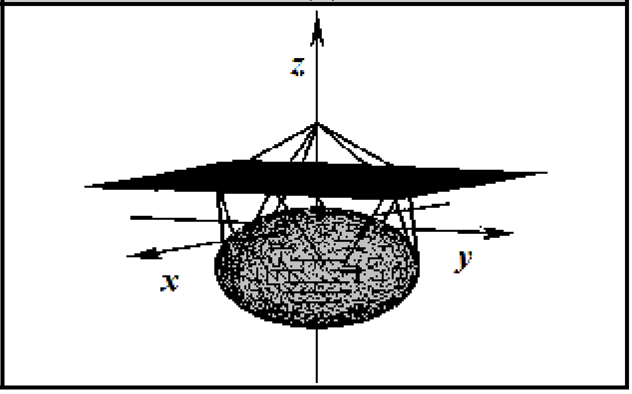
Базис ікосаедра	Базисні функції $N_{11}(x;y;z)$
Базис по Уачспрессу [7]	$N_{11}(x;y;z)=\frac{1}{12a^2b^2}(3xz(x-a)(z+b)-(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)+a^2b^2)$, де $a=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{5}}\cdot\sqrt{2\sqrt{5}-2}$, $b=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{5}}\cdot\sqrt{2+2\sqrt{5}}$
Гармонічний базис [8]	$N_{11}=\frac{1}{24}(z^3+10z^2+6z-9z(x^2+y^2)-5(x^2+y^2)+2)$
Базис, отриманий на основі однопорожнинного гіперболоїда та площини [9]	$N_{11}=\frac{1}{24}(10z^2-5x^2-5y^2+2)(z+1)$
Базис (I), отриманий на основі двопорожнинного гіперболоїда та площини [10]	$N_{11}=\frac{1}{24}(\sqrt{5}(3-\sqrt{5})z^2+3(\sqrt{5}-1)z-5(x^2+y^2)-2)(\sqrt{5}z+1)$
Базис (II), отриманий на основі еліпсоїда обертання та площини [10]	$N_{11}=\frac{1}{24}(\sqrt{5}(3+\sqrt{5})z^2+3(\sqrt{5}+1)z+5(x^2+y^2)-2)(\sqrt{5}z-1)$

Поверхні нульового рівня базисної функції $N_{11}(x;y;z)$ для наведених базисів ікосаедра представлені в табл. 2.

Таблиця 2

Поверхні нульового рівня базисної функції $N_{11}(x;y;z)$ різних базисів ікосаедра

Базис [7]	Базис [8]	Базис [9]
		

Базис (I), [10]	Базис (II), [10]
	

Обчислення локальних характеристик кожного з базисів ікосаедра, а саме, величини визначника матриці Грама та числа обумовленості матриці Грама в L_2 – нормі показало, що найкращими інтерполяційними властивостями наділений базис (I), отриманий на основі композиції поверхні двопорожнинного гіперболоїда та площини [10], оскільки йому відповідає найбільше значення визначника матриці Грама. Наочно результати обчислень демонструє рис.3.

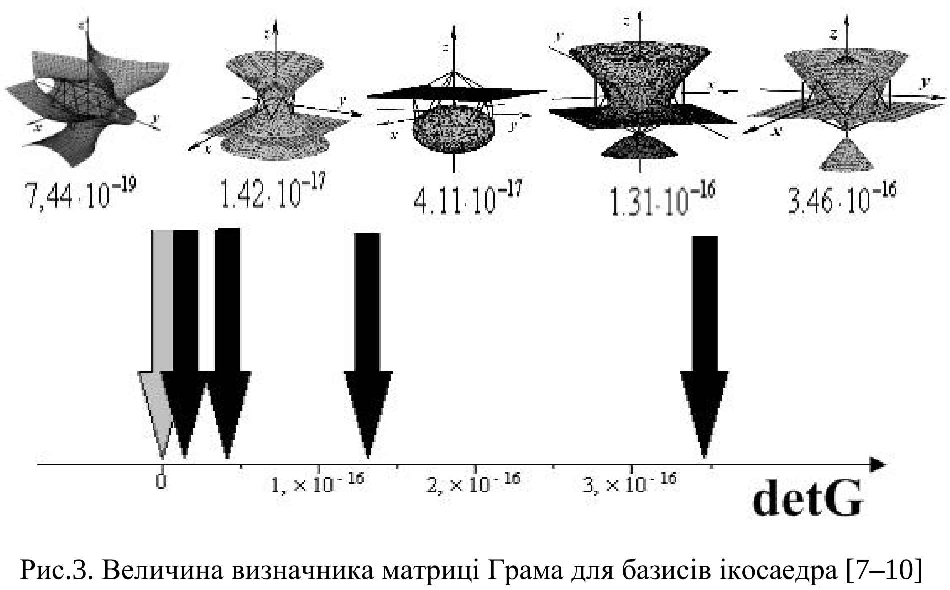


Рис.3. Величина визначника матриці Грама для базисів ікосаедра [7–10]

При цьому матриці Грама всіх базисів ікосаедра є добре обумовленими, про що свідчить величина числа обумовленості матриці грама в L_2 – нормі (рис.4). На думку авторів [13] саме ця характеристика є індикатором якості інтерполяції із залученням відповідного базису, причому найкращим вважається той базис, число обумовленості матриці Грама якого ближче до одиниці.

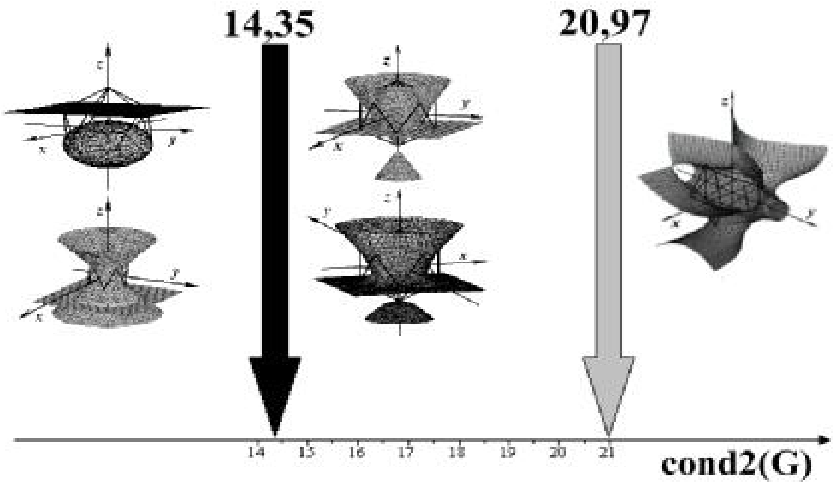


Рис.4. Число обумовленості в L_2 – нормі для різних базисів ікосаедра

Таким чином, можна вважати, що базиси ікосаедра [8–10] наділені приблизно однаковими інтерполяційними якостями в порівнянні з базисом [7], якому відповідають найменше значення визначника матриці Грама та найбільше значення числа обумовленості матриці Грама.

Висновки. Отримані характеристики для різних базисів ікосаедра свідчать про позитивний прогноз їх інтерполяційних якостей. Переваги одного з базисів над рештою визначатиме конкретна практична задача. Так застосування кожного з представлених базисів в задачі Діріхле для кулі [6], в яку вписано ікосаедр, дає лише приблизний результат. Очікуваний точний результат у контрольних точках був отриманий лише завдяки процедурі зважування базисів ікосаедра, які вже стали предметом подальших досліджень.

1. de Bruijn H. Numerical Method for 3D Ideal Flow [Електронний ресурс] / Han de Bruijn – Режим доступу: http://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf
2. Greiner G. Hierarchical tetrahedral-octahedral subdivision for volume visualization / G. Greiner, R. Grosso // The Visual Computer. – 2000. – I. 16. – P. 357–369.
3. Мотайло А.П. Базисы шестиузлового октаэдра [Електронний ресурс] / А.П. Мотайло. – Материалы международной научно-практической конференции "Перспективные научные исследования – 2011". Серия: Математика: Прикладная математика (17–25 февраля 2011г.). – София, Болгария. – Режим доступу: http://www.rusnauka.com.
4. Мотайло А.П. О дробно-рациональном шестиузловом базисе октаэдра по Уачспрессу / А.П. Мотайло, А.Н. Хомченко // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях. Тезисы докладов международной конференции – Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2011. – С. 231.
5. Мотайло А.П. Порівняльний аналіз лагранжевого та гармонічного базисів октаедра / А.П. Мотайло, А.Н. Хомченко, Г.Я. Тулученко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь, 2011. – Вип. 4. Прикладна геометрія, інженерна графіка. – Т. 51. – С. 64–70.
6. Левин В.И. Методы математической физики / В.И. Левин. – М.: Учпедгиз, 1956. – 243 с.
7. Зычкова Е.Э. Особенности полиномиального интерполирования по Уачспрессу в икосаэдре / Е.Э. Зычкова, А.П. Мотайло, Г.Я. Тулученко, А.Н. Хомченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2011. – Вип. 88. – С. 154–159.
8. Зычкова Е.Э. Гармонический базис икосаэдра на основе поверхностей вращения [Електронний ресурс] / Е.Э. Зычкова, А.П. Мотайло, Г.Я. Тулученко, А.Н. Хомченко // Материалы II Международной научно-практической конференции "Наука: теория и практика". Серия:

Математика: Прикладная математика (7–15 августа 2011 г.). – Пшемысль, Польша: Sp. z o.o. "Nauka I studia", 2011. – Т. 9. Технические науки. Математика. Физика. Строительство и архитектура. – С. 67–73. – Режим доступу: http://www.rusnauka.com/Page_ru.htm.

9. Зычкова Е.Э. Геометрический подход к построению базиса икосаэдра: комбинация однополостного гиперболоида и плоскости [Електронний ресурс] / Е.Э. Зычкова, А.П. Мотайло, Г.Я. Тулученко, А.Н. Хомченко // Материалы VII Международной научно-практической конференции "Восточное партнерство". Серия: Математика: Прикладная математика (7–15 сентября 2011 г.). – Пшемысль, Польша: Sp. z o.o. "Nauka I studia", 2011. – Т. 6. Технические науки. Математика. Физика. Строительство и архитектура. – С. 75–79. – Режим доступу: http://www.rusnauka.com/Page_ru.htm.
10. Зычкова Е.Э. Базисы икосаэдра на основе комбинаций поверхностей вращения и плоскостей [Електронний ресурс] / Е.Э. Зычкова, А.П. Мотайло, Г.Я. Тулученко, А.Н. Хомченко // Материалы VII Международной научно-практической конференции "Становление современной науки". Серия: Математика: Прикладная математика (27 сентября–5 октября 2011 г.). – Прага, Чехия: Publishing House "Education and Science" s.r.o., 2011. – Т. 11. Математика. Современные информационные технологии. Физика. Строительство и архитектура. – С. 22–29. – Режим доступу: http://www.rusnauka.com/Page_ru.htm.
11. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М. : Мир, 1981. – 216 с.
12. Wachspress E.L. A Rational Finite Element Basis / E.L. Wachspress. – New York: Academic Press, 1975. – 344 p.
13. Пинежанинов Ф. Свойства базисных функций [Електронний ресурс] / Ф.Пинежанинов, П.Пинежанинов // Exponenta.ru – Режим доступу:
14. http:// www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/soft/Mathemat/pinega/a2/a2.asp.htm