

УДК 515.2:

Л.М.Куценко, С.Ю.Руденко

Національний університет цивільного захисту України

ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ЗІ ЗМІННОЇ УЗДОВЖ ОСІ КРИВИНОЮ МЕРИДІАНІВ ТА ЇХ ЗМІЦНЕННЯ ШЛЯХОМ НАМОТУВАННЯ КЕВЛАРОВОЇ НИТКИ

Розглянуто спосіб опису та зображення поверхні обертання зі змінної уздовж осі кривиною її меридіана, а також спосіб зміцнення цієї поверхні шляхом намотування кевларової нитки.

Постановка проблеми. При розрахунках гумових пневматичних виробів доцільно застосовувати поверхні постійної середньої кривизни, оскільки така геометрична форма забезпечує рівну ймовірність розриву їхніх ділянок при певній різниці внутрішнього і зовнішнього тисків. Рівноймовірність поверхні постійної середньої кривизни на розрив пояснюється теоремою Пуассона-Лапласа [1, 2], адже відповідно до цієї теореми середня кривина поверхні розподілу двох урівноважених фізичних середовищ пропорційна різниці тисків цих середовищ. У технічних реалізаціях гумові пневматичні вироби - такі як ресори, гальма, підйомники, гасильники коливачів, тощо, часто мають вигляд поверхонь обертання. Вивчення поверхні обертання постійної середньої кривизни звичайно зводиться до розгляду її меридіана. Тобто завдання зводиться до відшукування такого меридіана, який би забезпечив постійну або змінну уздовж осі обертання середню кривизну цієї поверхні. Тому для практики інтерес представляє автоматизація побудови геометричної форми меридіана поверхні обертання зазначеної властивості за умови зміцнення цієї поверхні шляхом намотування кевларової нитки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Роботи [3-5] присвячені конструюванню поверхонь обертання постійної середньої кривизни у формі нодоїда стосовно до автомобільних балонів високого тиску. У роботі [6] наведено опис поверхонь обертання з керованою кривиною на основі розв'язання диференціальних рівнянь. При цьому ще не повністю дослідженим залишається питання розробки універсальних програм опису й графічних побудов поверхонь обертання стосовно до розрахунку гумові пневматичних виробів.

Формулювання цілі статті. Розробити спосіб опису та зображення поверхні обертання зі змінної уздовж осі кривиною її меридіана, а також спосіб зміцнення цієї поверхні шляхом намотування кевларової нитки.

Основна частина. Вважатимемо, що уздовж осі обертання періодично міняється не середня кривизна поверхні, а (середня) кривина меридіана цієї поверхні. При цьому, що важливо, характер шуканої поверхні буде збережено. Нехай функцією $k(s)$ з параметром довжини s задано меридіан поверхні обертання, тобто кривина лінії міняється уздовж її осі за законом $k(s)$. Для простоти початкову точку виміру довжини розташуємо в початку системи координат Ox .

Для складання натурального рівняння кривої необхідно [7,8] визначити функцію зміни кута

нахилу дотичної $q(t) = \int_0^t k(s)ds$ і одержати в параметричне рівняння шуканої лінії:

$$x(s) = \int_0^s \cos(q(t)) ; \quad y(s) = \int_0^s \sin(q(t)) . \quad (1)$$

Розроблено Maple - програму побудови поверхні обертання, кривина меридіана якої змінюється уздовж осі обертання за законом $k(s)$. На рис. 1 - 4 наведено відповідні приклади залежно від вигляду функції $k(s)$.

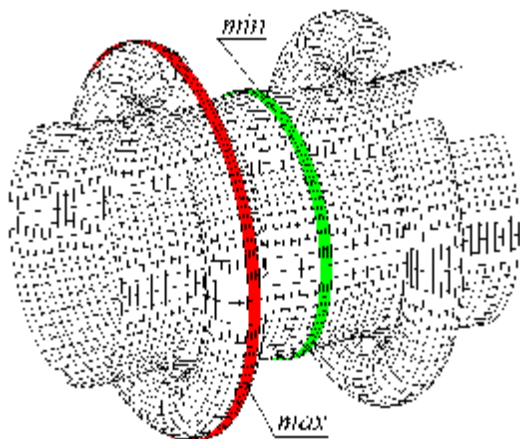


Рис. 1. $k(s) = 1 - 1,3 \cos s$

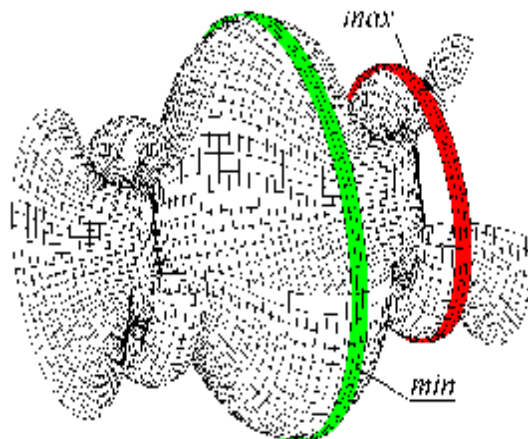


Рис. 2. $k(s) = 1 - 2,5 \cos s$

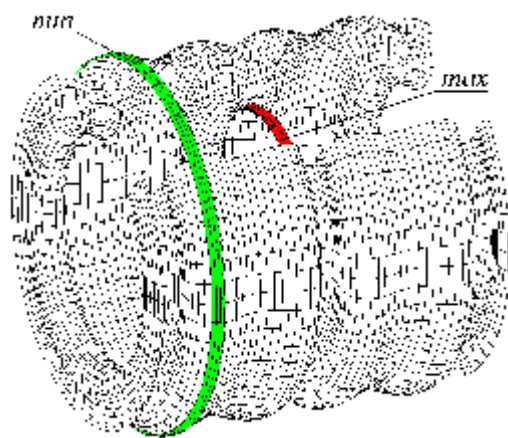


Рис. 3. $k(s) = \cos s + (\cos 2s) / 2$

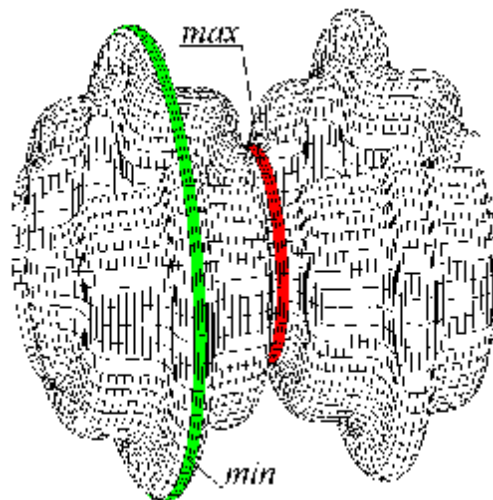


Рис. 4. $k(s) = \cos s + (\cos 3s) / 3$

Розроблена програма дозволяє на поверхнях обертання визначати періодичні ділянки, які відповідають екстремальним значенням функції $k(s)$. Крім того, було визначено поверхні, кривини меридіанів яких скоректовано за допомогою R-функцій (рис. 5, 6).

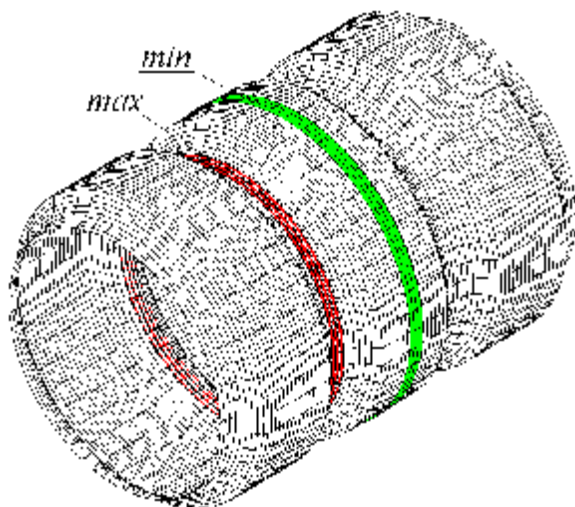


Рис. 5. Опис кривини R-диз'юнкцією
 $k(s) = \cos(s) \vee 0$

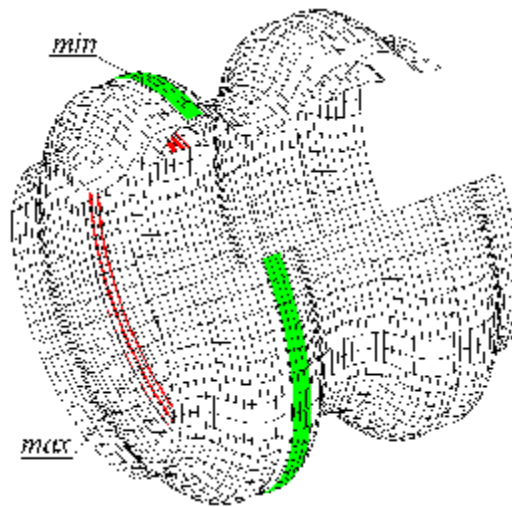


Рис. 6. Опис кривини R-кон'юнкцією
 $k(s) = \cos(s) \wedge 0,5$

На практиці зміцнення одержаної (гумової) поверхні звичайно здійснюють методом намотування кевларової нитки. Далі розглянемо асимптотичне і геодезичне намотування.

Для знаходження асимптотичного і геодезичного намотування в якості тестової обрано поверхню обертання, описану рівняннями:

$$\{u, (p + q \cos u) \cos v, (p + q \cos u) \sin v\}. \quad (2)$$

Для опису ліній асимптотичного намотування для поверхні обертання (2) складено диференціальні рівняння стосовно координатних ліній $\{u=\text{const}, v=\text{const}\}$ на ній:

$$\frac{du(v)}{dv} = \frac{\sqrt{-q \cos(u(v))(p + q \cos(u(v)))}}{q \cos(u(v))}; \quad \frac{dv(u)}{du} = \frac{\sqrt{-q \cos(u)(p + q \cos(u))}}{p + q \cos(u)}. \quad (3)$$

У результаті розв'язання системи рівнянь (3) одержуємо опис асимптотичних ліній у вигляді:

$$v(u) = \int \frac{\sqrt{-q \cos(u)(p - q \cos(u))}}{p - q \cos(u)} du + C1; \quad (4)$$

$$v(u) = \int \frac{\sqrt{-q \cos(u)(p + q \cos(u))}}{p + q \cos(u)} du + C1$$

Розроблено Maple - програму побудови з асимптотичною намоткою поверхні обертання. На рис. 7, 8 наведено відповідні приклади залежно від значень p і q .

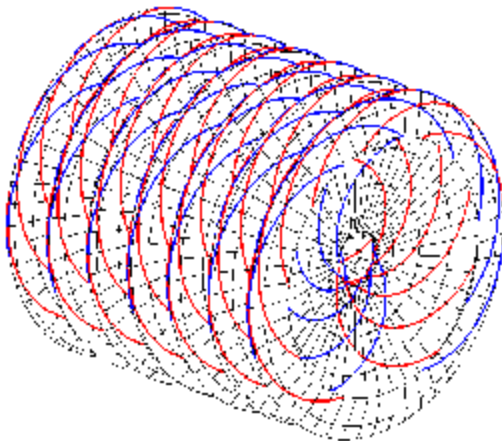


Рис. 7. Асимптотична намотка при $p = 4; q=3$

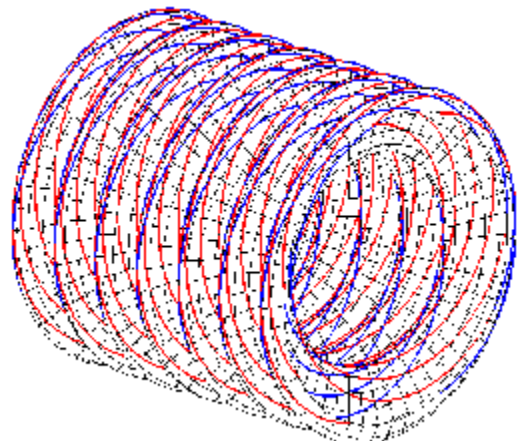


Рис. 8. Асимптотична намотка при $p = 12; q=3$

Для побудови геодезичних на поверхні обертання (2) для одного з варіантів належних напрямків та від відповідно існуючих розв'язків одержано систему диференціальних рівнянь виду:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{q^2 \cos u \sin u \left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2 + (p + q \cos u) q \sin u \left(\frac{dv(t)}{dt}\right)^2}{1 + q^2 - q^2 \cos^2 u} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} - \frac{2q \sin u \left(\frac{du(t)}{dt}\right) \left(\frac{dv(t)}{dt}\right)}{p + q \cos u} = 0.$$

В результаті чисельного розв'язання в середовищі пакету Maple системи диференціальних рівнянь (5), які позначимо як $\text{sys}=\{\text{eq1}, \text{eq2}\}$, за допомогою оператора

$\text{dsolve}(\{\text{sys}, \text{u}(0)=\text{u0}, \text{v}(0)=\text{v0}, \text{D}(\text{u})(0)=\text{du0}, \text{D}(\text{v})(0)=\text{dv0}\}, \{\text{u}(t), \text{v}(t)\}, \text{type}=\text{numeric}, \text{output}=\text{listprocedure});$

буде сформовано розв'язок у кодах Maple у вигляді процедури:

$$\text{desys} := \left[t = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \text{u}(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \right. \\ \left. \frac{d}{dt} \text{u}(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \text{v}(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \right. \\ \left. \frac{d}{dt} \text{v}(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}) \right]$$

Звідки вилучаються процедури-функції шуканого розв'язку

$$\text{u1} := \text{proc}(t) \dots \text{end proc} \quad \text{v1} := \text{proc}(t) \dots \text{end proc}$$

з якими можна оперувати як з аналітичними виразами.

Було складено Maple - програму побудови з геодезичною намоткою поверхні обертання. На рис. 9, 10 наведено відповідні приклади залежно від початкових умов.

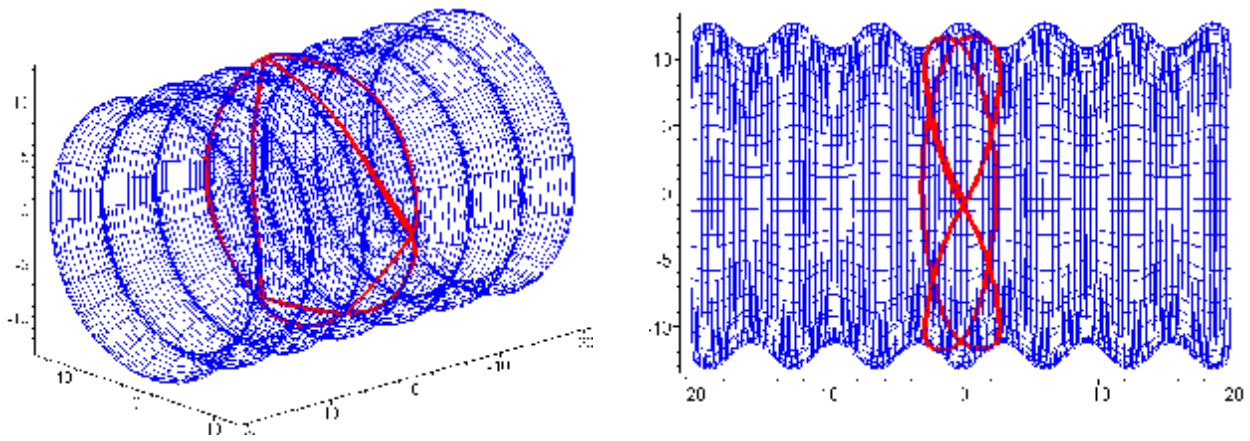


Рис. 9. $\text{u}(0)=0, \text{v}(0)=0, \text{D}(\text{u})(0)=8, \text{D}(\text{v})(0)=1.$

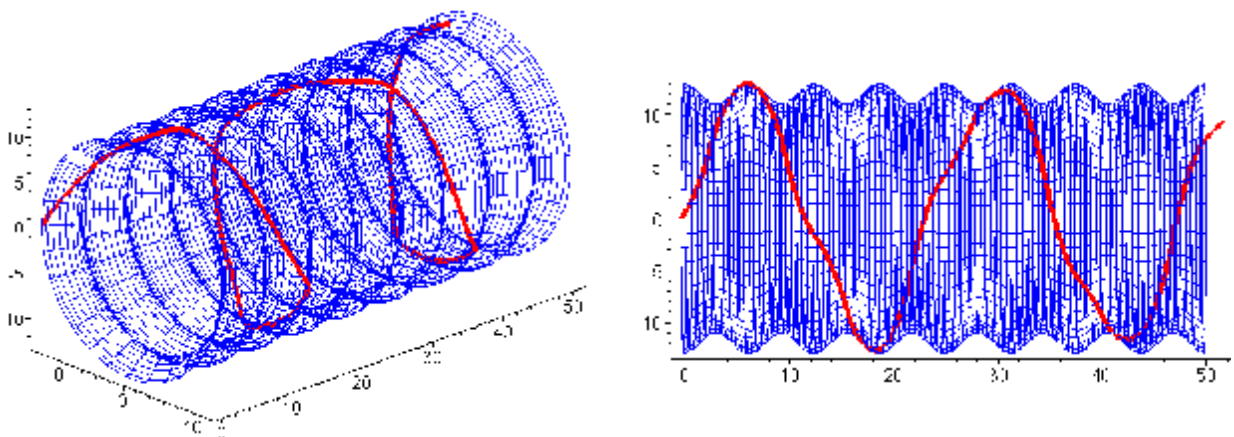


Рис. 10. $\text{u}(0)=0, \text{v}(0)=0, \text{D}(\text{u})(0)=8,7, \text{D}(\text{v})(0)=1$

Наведемо приклад реального пневмовиробу, поверхню якого описано рівняннями

$$\{u, (p + \arccos(\cos u)) \cos v, (p + \arccos(\cos u)) \sin v\}. \quad (6)$$

На рис. 11 наведено меридіан поверхні (6) при $p = 9$.

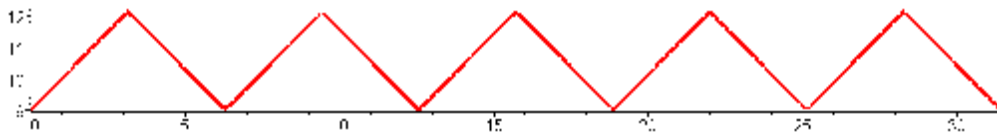


Рис. 11. Форма меридіана поверхні (6)

Для визначення геодезичних складено систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{(p + \arccos(\cos u)) \sin u \left(\frac{dv(t)}{dt} \right)^2}{\sin u} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{2q \sin u \left(\frac{du(t)}{dt} \right) \left(\frac{dv(t)}{dt} \right)}{(p + \arccos(\cos u)) \sin u} = 0.$$

На рис. 12 наведено результат розв'язання системи диференціальних рівнянь (7) сумісно з поверхнею (6). При цьому систему (7) розв'язано з такими початковими умовами: а) для першої сім'ї: $u_0 = 1$; $du_0 = 9$; $dv_0 = 1$; б) для другої сім'ї: $u_0 = 1$; $du_0 = 9$; $dv_0 = -1$. Для обох варіантів $v_0 = 2i\pi/10$; $i=1..10$.

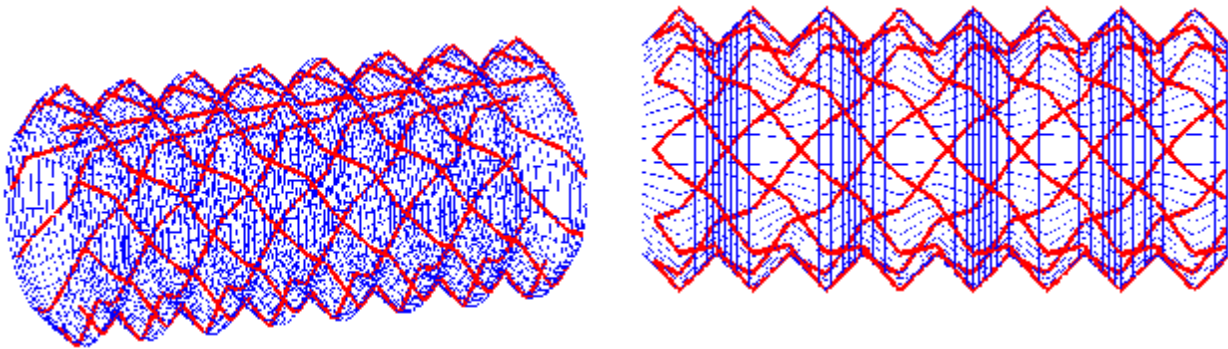


Рис. 12. Приклад геодезичного намотування

Висновки. В роботі запропоновано інженерних спосіб опису та зображення поверхні обертання зі змінної уздовж осі кривиною її меридіана, а також спосіб зміцнення цієї поверхні шляхом намотування кевларової нитки за асимптотичним чи геодезичним законами.

1. Иванов А.О. Лекции по классической дифференциальной геометрии / А.О.Иванов, А.А.Тужилин. – М.: Логос, 2009. - 224 с.
2. Пульпинский Я.С. Математическое моделирование оболочек вращения сложных форм. Дисс. на соискание канд.техн наук, Пенза: ПГУАиС, 2006. – 140 с.
3. Пилипака С.Ф. Конструювання поверхонь обертання сталої середньої кривини / С.Ф.Пилипака, І.О.Коровіна // Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції „Перспективи розвитку агропромислового комплексу в Поліському регіоні України”. – Ніжин: Міланік, 2010. –С. 35 – 43.

4. Коровіна І.О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини на основі її меридіану / І.О.Коровіна //Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Вип. 26. – Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2010. – С. 128 – 133.
5. Коровіна І.О. Конструювання автомобільних балонів високого тиску у формі нодоїда / І.О.Коровіна // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т. 46.-Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – С.134-141.
6. Куценко Л.М. Опис поверхонь обертання сталої та змінної вздовж осі середньої кривини / Л.М.Куценко, С.Ю.Руденко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип. 88. – Київ: КНУБА, 2011 р. С. 7-15
7. Рашевский Л.В. Курс дифференциальной геометрии / Л.В.Рашевский / - М.,Л. : ГОНТИ, 1939, 360с.
8. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения / А.А.Савелов / - М.: Физматгиз, 1960.- 289 с.