

УДК 515.2

Е.В.Конопацкий, О.А.Чернышева

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ МЕТАЛЛОВ В ПОЧВЕ НА ПРИМЕРЕ КАРТОФЕЛЯ

Представлено математичну модель процесу розподілу важких металів у ґрунті для різних сільськогосподарських культур в залежності від довготривалості експерименту та глибини залігання. Розроблено програму для розрахунку вмісту важких металів у ґрунті в залежності від довготривалості експерименту та глибини залігання.

Ключевые слова: *тяжелые металлы (ТМ), осадки городских сточных вод (ОСГВ), точечное исчисление, математическая модель процесса, парабола, линейчатая поверхность.*

Постановка проблемы. При снятии параметров одиночных экспериментов точность измерений задается техническими возможностями, а для исследований значения принимаются как точные (без погрешностей). В этом случае можно предложить следующее его аналитическое описание. Каждый эксперимент отображается точкой арифметического пространства. В зависимости от количества точек и вида процесса или явления, проводят через них линию или поверхность. Непрерывный геометрический образ дает возможность, часто, с достаточной для практики точностью, без дополнительных экспериментов дать значения процесса внутри области (интерполяция) и вблизи предсказать будущее (экстраполяция).

Грубое линейное описание возможно по двум точкам. Более точное, часто удовлетворительное, получают по трем точкам (кривая по касательным дает некоторое представление о скорости изменения процесса). Если есть четыре точки, то по трем описывают процесс, а четвертая позволяет проверить точность полученного описания (числовой модели) процесса.

Анализ последних исследований и публикаций. По исследованию проблем утилизации осадков городских сточных вод проведены следующие исследования [1-4]. Для моделирования процесса распределения ТМ в почве используется методика основанная на математическом аппарате «Точечное исчисление» [5,6].

Формулирование целей статьи. Разработать математическую модель распределения тяжелых металлов в почве на примере картофеля в условиях Донецкого региона.

Основная часть. Был проведен анализ работы канализационных очистных сооружений городов Донецкой области. В условиях полевого опыта изучалось влияние осадков городских сточных вод на агрохимические показатели почвы, урожайность и качество сельскохозяйственных культур, а также срок использования ОСГВ в качестве удобрения. В течение трех лет проводились исследования по определению предельно допустимой концентрации ионов ТМ при внесении сухого осадка под различные сельскохозяйственные культуры, изучалась миграция ТМ в системе почва-растение. Одновременно изучалось влияние сухого осадка на физико-химические и агрохимические свойства почвы, мелиоративное состояние почвы, опытное поле находится на балансе ПУВКХ г. Селидово.

Предлагается новый метод описания этих экспериментальных данных в виде модели процесса распределения тяжелых металлов в почве в зависимости от сельскохозяйственных культур.

Экспериментально подтверждается, что в трехмерном пространстве большое значение имеет квадратичность и симметрия. Исходя из этого, можно считать, что три точки определяют аффинную параболу (рис. 1).

Создание одномерного процесса

1. Изображаем отдельный экспериментальный замер точкой $M_i(t_i, m_i)$, где t_i – время замера, m_i – количественная величина замера.
2. Отображаем точками весь временной интервал. Получаем дискретную кривую – ДПК исследуемого процесса.

3. Предполагаем, что процесс протекал непрерывно без катастрофических изменений исследуемого явления. Геометрически это означает, что кривая процесса не допускает непредвиденных осцеляций.
4. Производим параболическую интерполяцию кривой по заданным точкам.
5. Полученную дугу кривой исследуем на особенности известными из математики методами (экстремумы, определяем скорость протекания процесса, и т.п.)

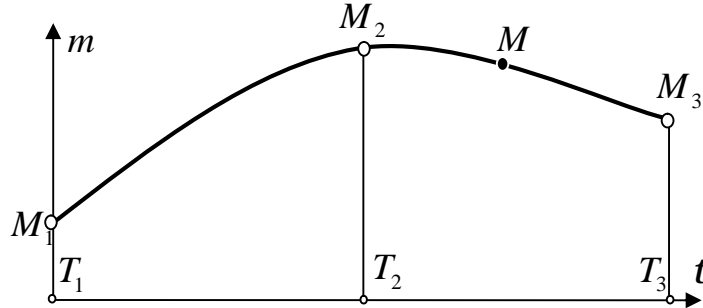


Рис. 1. Теоретические основы интерполяции дуги M кривой, заданной точками M_1, M_2, M_3

Параболическая интерполяция процесса по трем заданным точкам

Пусть требуется произвести непрерывную интерполяцию трехгодичного (трехточечного эксперимента). Используем параболу второго порядка в точечном представлении [6], проходящую через три точки M_1, M_2, M_3 (рис.1):

$$M = (M_1 - M_2)(1-t)(1-2t) + (M_3 - M_2)t(2t-1) + M_2, \text{ где } 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Данное уравнение при изменении параметра t от нуля до единицы задает дугу $M_1M_2M_3$ в точечной форме

$$t = 0 \rightarrow M \equiv M_1, \quad t = \frac{1}{2} \rightarrow M \equiv M_2, \quad t = 1 \rightarrow M \equiv M_3. \quad (2)$$

Для перехода от точечной к координатной форме описания процесса необходимо текущую точку M дуги задать по координатам: $M(t, m)$, где t – время протекания процесса, а m – числовая характеристика вещества, соответствующего этому времени.

Если в точечное уравнение вместо заданных точек подставим координаты, то непрерывный процесс получим в параметрической форме

$$\begin{cases} t = (t_1 - t_2)(1-t)(1-2t) + (t_3 - t_2)t(2t-1) + t_2 \\ m = (m_1 - m_2)(1-t)(1-2t) + (m_3 - m_2)t(2t-1) + m_2 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3)$$

Рассмотрим более подробно ту составляющую уравнения (3), которая отвечает за содержание вещества (т.е. тяжелых металлов) в почве для различных сельскохозяйственных культур. Преобразуем это уравнение в следующий вид:

$$m = (m_1 - m_2)(2t^2 - 3t + 1) + (m_3 - m_2)(2t^2 - t) + m_2, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

Представим уравнение (4) в виде квадратного уравнения параметра t . После преобразований, получим:

$$m = 2(m_1 - 2m_2 + m_3)t^2 - (3m_1 - 4m_2 + m_3)t + m_1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5)$$

Найдём минимум этой функции, для этого определим производную функции вещества m по параметру t :

$$m'(t) = 4(m_1 - 2m_2 + m_3)t - (3m_1 - 4m_2 + m_3) = 0 \Rightarrow t_{\min} = \frac{3m_1 - 4m_2 + m_3}{4(m_1 - 2m_2 + m_3)}. \quad (6)$$

В качестве примера рассмотрим минимальное содержание Zn в картофеле на слое 0-20. Экспериментальные данные для этой культуры имеют следующий вид: $m_1 = 3870 \text{ г/м}^2$, $m_2 = 4000 \text{ г/м}^2$, $m_3 = 10000 \text{ г/м}^2$. Подставив эти значения в выражение (6), получим значение

параметра $t_{\min} \approx 0,24$, которое соответствует минимальному содержанию Zn в картофеле на слое 0-20.

Подставив полученное значение параметра в уравнение (5) получим минимальное содержание вещества Zn в картофеле на слое 0-20: $m_{\min} \approx 3200 \text{ г/м}^2$. Воспользуемся табличным процессором MS Excel при определении минимального содержания некоторых тяжёлых металлов для сельскохозяйственных культур на различной глубине. Рассмотрим минимальное содержание тяжёлых металлов в почве на примере картофеля. Результаты исследований сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Минимальное содержание некоторых тяжёлых металлов для различных культур в слоях почвы

Культура	Тяжелый металл	Слой почвы	Содержание тяжёлых металлов, г/м ²			Минимальное значение параметра t	Минимальное содержание вещества, г/м ²
			в 2001 г.	в 2002 г.	в 2003 г.		
Картофель	Zn	0-20	3870	4000	10000	0,24	3200
		20-40	4500	4800	8600	0,21	4200
	Pb	0-20	513	550	1380	0,23	432
		20-40	621	670	1140	0,19	590
	Cu	0-20	531	590	1400	0,21	464
		20-40	630	690	1180	0,18	602
	Cd	0-20	198	22	50	0,68	9
		20-40	22,5	25	44	0,17	21
		20-40	25	50	53	0,81	54,45

Также на основании выражения (5) можно спрогнозировать содержание тяжёлых металлов при условии сохранения динамики роста содержания тяжёлых металлов, которую можно наблюдать в период с 2001 по 2003 г для картофеля. Исходя из этих соображений целесообразно делать прогноз не более чем на ближайшие 2 года. Прогнозируемое содержание тяжёлых металлов для различных культур в слоях почвы сведено в таблицу 2.

Таблица 2

Прогнозируемое содержание тяжёлых металлов в почве

Культура	Тяжелый металл	Слой почвы	Существующее содержание тяжёлых металлов, г/м ²			Прогнозируемое содержание тяжёлых металлов, г/м ²	
			в 2001 г.	в 2002 г.	в 2003 г.	в 2004 г.	в 2005 г.
Картофель	Zn	0-20	3870	4000	10000	21870	39610
		20-40	4500	4800	8600	15900	26700
	Pb	0-20	513	550	1380	3003	5419
		20-40	621	670	1140	2031	3343
	Cu	0-20	531	590	1400	2961	5273
		20-40	630	690	1180	2100	3450
	Cd	0-20	198	22	50	282	718
		20-40	22,5	25	44	80	131,5

Представленные выше результаты исследований и их математическая обработка справедливы для слоёв почвы 0-20 и 20-40. Это распределение подразумевает, что содержание тяжёлых металлов в определённом слое не зависит от глубины слоя и в каждом слое считается одинаковым. Это упрощение было принято для облегчения обработки, полученных в результате эксперимента, данных и более или менее удовлетворяет необходимой на практике точности расчётов. Однако математический аппарат точечного исчисления [5] позволяет полностью описать представленный

процесс без всяких упрощений, что увеличивает точность расчётов и адекватность математической модели представленного процесса.

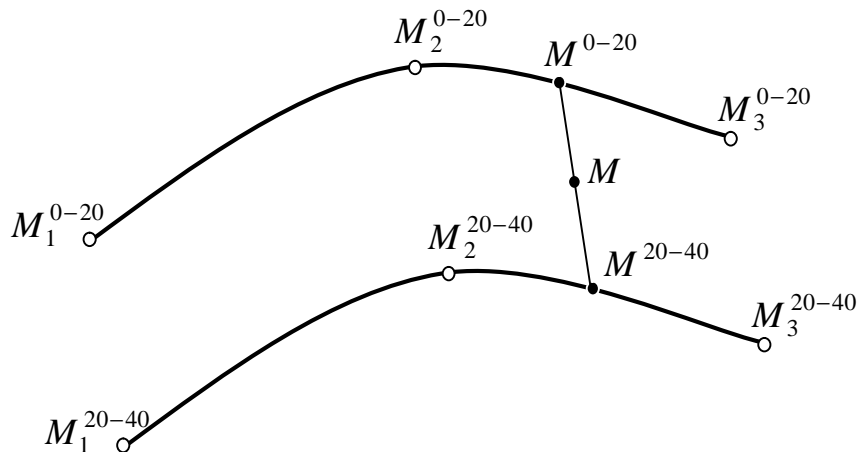


Рис. 2. Линейчатая поверхность с параболой второго порядка в качестве опорных контуров

В соответствии с диаграммами [5] можно предположить, что содержание тяжёлых металлов в почве в зависимости от глубины залегания (заложения) изменяется равномерно. Тогда процесс распределения тяжёлых металлов можно представить в виде линейчатой поверхности с параболой второго порядка (проходящими через заданные точки M_1, M_2, M_3) в качестве опорных дуг этой поверхности (рис. 2).

Точечное уравнение прямой можно записать в таком виде:

$$M = M^{0-20}u + M^{20-40}\bar{u}; \bar{u} = 1 - u; 0 \leq u \leq 1. \quad (7)$$

Заменим в уравнении (1) параметр t на параметр v , тогда уравнения опорных парабол, проходящих через заданные точки, примут следующий вид:

$$\begin{aligned} M^{0-20} &= (M_1^{0-20} - M_2^{0-20})(2v^2 - 3v + 1) + (M_3^{0-20} - M_2^{0-20})(2v^2 - v) + M_2^{0-20}; \\ M^{20-40} &= (M_1^{20-40} - M_2^{20-40})(2v^2 - 3v + 1) + (M_3^{20-40} - M_2^{20-40})(2v^2 - v) + M_2^{20-40}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $0 \leq v \leq 1$.

Подставив выражения (8) в уравнение (7), получим уравнение линейчатой поверхности, проходящей через точки $M_1^{0-20}, M_2^{0-20}, M_3^{0-20}, M_1^{20-40}, M_2^{20-40}, M_3^{20-40}$.

$$\begin{aligned} M &= (2v^2 - 3v + 1)\left[(M_1^{0-20} - M_2^{0-20})u + (M_1^{20-40} - M_2^{20-40})\bar{u}\right] + \\ &+ (2v^2 - v)\left[(M_3^{0-20} - M_2^{0-20})u + (M_3^{20-40} - M_2^{20-40})\bar{u}\right] + (M_2^{0-20}u + M_2^{20-40}\bar{u}). \end{aligned} \quad (9)$$

В данном случае регулируя параметр v в пределах от 0 до 1, получим изменение содержания тяжёлых металлов в зависимости от времени. Значению параметра $v = 0$ соответствует количество тяжёлых металлов в 2001 г., $v = 0,5$ - содержание тяжёлых металлов в 2002 г. и $v = 1$ - содержание тяжёлых металлов в 2003 г.

Параметр u характеризует содержание вещества (в нашем случае тяжёлых металлов) в зависимости от глубины слоя. Для слоя 0-20 при средней глубине равной 10 мм - $u = 1$, а для слоя 20-40 при средней глубине 30 мм - $u = 0$. Учитывая, что глубина слоя не зависит от количества тяжёлых металлов, получим:

$$h_1^{0-20} = h_2^{0-20} = h_3^{0-20} = 10 \text{ мм}, h_1^{20-40} = h_2^{20-40} = h_3^{20-40} = 30 \text{ мм}. \quad (10)$$

Аналогичным образом рассмотрим изменение времени t . За начало отсчёта возьмём 2001 г., тогда $t_1^{0-20} = t_1^{20-40} = 0$. Поскольку в году 365 дней (исключая високосный год), то $t_2^{0-20} = t_2^{20-40} = 365$ дней, а $t_3^{0-20} = t_3^{20-40} = 730$ дней. Отсюда разница между промежутками времени остается постоянной и равной 365 дней.

$$t_2^{0-20} - t_1^{0-20} = t_2^{20-40} - t_1^{20-40} = t_3^{0-20} - t_2^{0-20} = t_3^{20-40} - t_2^{20-40} = 365 \text{ дней}. \quad (11)$$

Учитывая все эти изменения, уравнение (9) можно представить в следующем виде:

$$m = (2v^2 - 3v + 1) \left[(m_1^{0-20} - m_2^{0-20})u + (m_1^{20-40} - m_2^{20-40})\bar{u} \right] + (2v^2 - v) \left[(m_3^{0-20} - m_2^{0-20})u + (m_3^{20-40} - m_2^{20-40})\bar{u} \right] + (m_2^{0-20}u + m_2^{20-40}\bar{u}) \quad (12)$$

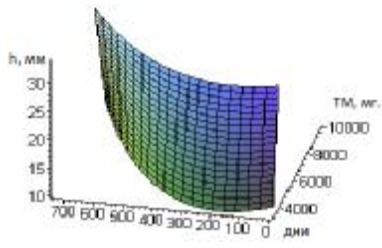
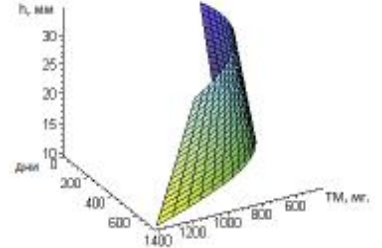
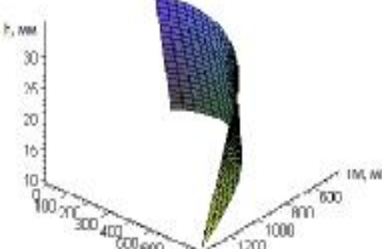
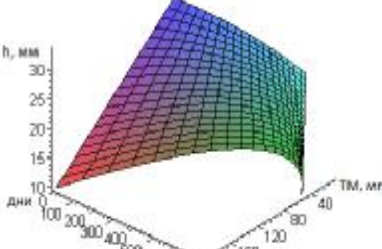
$$t = 730v$$

$$h = 10u + 30\bar{u}.$$

Воспользуемся программой *Maple* для расчёта и графической визуализации полученной модели процесса. Результаты сведены в таблицу 3.

Таблица 3

Моделирование процесса распределения ТМ в почве в зависимости от глубины залегания

ТМ	Графическая интерпретация процесса распределения тяжелых металлов	ТМ	Графическая интерпретация процесса распределения тяжелых металлов
Zn		Cu	
Pb		Cd	

Выводы. Получена математическая модель распределения тяжелых металлов в почве в зависимости от длительности эксперимента и глубины залегания. Составлена программа для расчета содержания тяжелых металлов в почве в зависимости от длительности эксперимента и глубины залегания. Результаты представлены на примере картофеля.

1. Технологічні та агроекологічні нормативи використання осадів стічних вод міських очисних споруд у сільському господарстві. КНД 33-3.3-02-99.-38 с.
2. Сало Т. Л. Агроекологічні та технологічні аспекти застосування в сільському господарстві осадів стічних вод міських очисних споруд / Сало Т. Л., Дишлюк В. Є., Чернокозинський А. В. // Агроекологічний журнал, 2001, №2, с. 38-43.
3. Ганин Г. Н. (Институт водных и экологических проблем Дальневосточного отделения РАН) Утилизация осадка сточных вод методом экологической биотехнологии / Ганин Г. Н. (Институт водных и экологических проблем Дальневосточного отделения), Домнин К. В. главный инженер, Архипова Е. Е. главный технолог, Сапожников В. А. начальник ОСК, Киселева Н.Н. начальник ИХЛСВ (МУП города Хабаровска «Водоканал») // Водоснабжение и санитарная техника, 2007, №6, ч.2.
4. Богатеев И. А. Разработка, проектирование и реализация систем обработки осадков сточных вод / Богатеев И. А., Керин А. С., Сахно А. П., Керин К. А. // Водоснабжение и санитарная техника. 2009, №1.
5. Балюба І.Г. Основи математичного апарату точкового числення. / Балюба І.Г., Поліщук В.І., Малютіна Т.П.; Праці ТДАТА. Вип.4. Прикладна геометрія та інженерна графіка, т.29. – Мелітополь, 2005. - С.22-30.
6. Конопацький Є.В. Побудова моделі процесу. / Конопацький Є.В.; Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т.48. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010.– С.113-116.