УДК 515.2
Р.М.Колочавін
Київський національний університет будівництва і архітектури

МОДИФІКОВАНІ ПОВЕРХНІ БЕЗЬ'Є ДЛЯ ТРИКУТНОЇ ФІГУРИ У ПЛАНІ

Розглянуто орієнтований на комп'ютерну реалізацію спосіб опису поверхні Безь'є для трикутної фігури у плані.

Постановка проблеми. Метод Кунса використовують при розрахунках геометричних форм технічних поверхонь [1-3]. Опис поверхні методом Кунса передбачає її розбиття на секції з криволінійними чотирикутниками у плані. Кожна секція описується функціями Кунса залежно від інформації, якою задана поверхня - рівняннями граничних кривих та похідними на границі. Звичайно застосовуються формули для чотирикутних областей, Але в реальних випадках існують технічні форми, для яких природною є розбивка їх поверхонь на трикутні секції. Варіанти усунення однієї сторони шляхом «обнуління» її довжини призводять до виникнення особливості в кутовій точці трикутника. Тому актуальною буде розробка способів складання модифікованої інтерполяційної формули Кунса для трикутних областей за інформацією на сторонах обраних трикутників.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В літературних джерелах досить повно досліджені інтерполяційні схеми для прямокутних (криволінійних) областей. Для трикутних, а тим більше багатокутних областей, проблема представлення поверхні за граничною інформацією залишається відкритою. В роботах [4-6] наведено інтерполяційні формули Кунса для трикутних областей, побудованих за допомогою дробів алгебраїчних виразів, що призводить по появи особливостей у випадку, коли знаменники дорівнюють нулю.

Як відомо [7,8] крива Безь'є – це параметрична крива, що задається виразом

$$B(t)=\sum_{i=0}^{n} p_i b_{i,n}(t), \quad 0\le t\le 1, \tag{1}$$

де p_i, $i\in 1:n$ - опорні вершини в просторі кривої, які називаються полюсами, а $b_{i,n}(t)$ - базисні поліноми Бернштейна:

$$b_{i,n}(t)=\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, i\in 1:n. \tag{2}$$

Відрізки, що з'єднують полюси, називаються характеристичним багатокутником. У зв'язку з тим, що у рівняння кривої входить обчислення факторіалів, визначення точок кривої за формулами (1) і (2) не є нераціональним. Існують більш швидкі рекурсивні алгоритми, орієнтовані на комп'ютерну реалізацію. Наприклад, алгоритм де Кастельжо побудови кривої Безь'є полягає у тому [8-10], що на кожному кроці параметр t приймає значення на відрізку [0,1]. Сторони характеристичного багатокутника розбиваються точкою у відношенні t. Потім отримані точки з'єднуються відрізками, кожний з яких також розбивається точкою у відношенні t, і так доти, поки не одержимо єдину точку, що належить кривій Безь'є.

Поверхні Безь'є є узагальненням кривих Безь'є на випадок тривимірного простору. Відомі дві принципово різні параметризації поверхні Безь'є. Перша - це тензорний добуток кривих. Рівняння поверхні тензорного добутку має вигляд [8]

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{i,j} b_{i,n}(u) b_{j,m}(v), \ 0\le u\le 1, \ 0\le v\le 1, \tag{3}$$

де $p_{i,j}$, $i\in 1:n$, $j\in 1:m$ - опорні вершини в просторі поверхні.

Узагальненням кривої Безь'є є поверхня Безь'є в барицентричних координатах виду [10]

$$T(u,v,w)=\sum_{i+j\le n} r_{ij}\binom{n}{ij}u^i v^j(1-u-v)^{n-i-j},\quad u+v\le 1. \tag{4}$$

При цьому алгоритм побудови поверхні Безь'є складається з двох етапів. Спочатку будуються криві Безь'є в u- напрямку, отримані точки розглядаються як полюси для побудови кривих Безь'є в v-напрямку, результуючі точки яких належать поверхні Безь'є. Але ще не до кінця розв'язаною лишається проблема побудови поверхонь Безь'є для трикутника.

Формулювання цілі статті. Розробити орієнтований на комп'ютерну реалізацію спосіб опису поверхні Безь'є для трикутної фігури у плані.

Основна частина. За допомогою заміни параметрів, поверхня Безь'є у вигляді (3) може бути представлена в такому вигляді:

$$P(u,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} r_{i,j}\,p_{n,i}(u)\,p_{n-i,j}(s),\ 0\le u,s\le 1$$

Позначимо базисні поліноми Бернштейна степеня n як $p_{n,k}(x)=\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k$. Поверхню, описану за допомогою виразу

$$P(u,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} r_{i,j}\,p_{n,i}(u)\,p_{n-i,j}(s),\ 0\le u,s\le 1,\ r_{i,j}\in R^3,\ i\in 0:n,\ \ j\in 0:n-i, \tag{5}$$

вважатимемо модифікованою поверхнею Бернштейна.

Разом з поверхнею (5) розглянемо дві поверхні зі спеціально складеними рівняннями

$$\hat{P}(v,t)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} r_{i,j}\,p_{n,j}(v)\,p_{n-j,i}(t),\quad 0\le v\ ,\ t\le 1 \tag{6}$$

та

$$\breve{P}(w,q)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} r_{k-j,j}\,p_{n,n-k}(w)\,p_{k,j}(q),\quad 0\le w\ ,\ q\le 1. \tag{7}$$

Існують такі співвідношення.

При $u=1$ й кожному $0\le s\le 1$ тотожність (5) визначає єдину точку, що слідує з формули

$$P(1,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} r_{i,j}\,p_{n,i}(1)\,p_{n-i,j}(s)=\sum_{i=0}^{n} p_{n,i}(1)\sum_{j=0}^{n-i} r_{i,j}\,p_{n-i,j}(s)=p_{n,n}(1)r_{n,0}=r_{n,0}.$$

При $v=1$ й кожному $0\le t\le 1$ тотожність (6) визначає єдину точку, що слідує з формули

$$\hat{P}(1,t)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} r_{i,j}\,p_{n,j}(1)\,p_{n-j,i}(t)=\sum_{j=0}^{n} p_{n,j}(1)\sum_{i=0}^{n-j} r_{i,j}\,p_{n-j,i}(t)=p_{n,n}(1)r_{0,n}=r_{0,n}.$$

При $w=1$ й кожному $0\le q\le 1$ тотожність (7) визначає єдину точку, що слідує з формули

$$\breve{P}(1,q)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} r_{k-j,j}\,p_{n,n-k}(1)\,p_{k,j}(q)=\sum_{k=0}^{n} p_{n,n-k}(1)\sum_{j=0}^{k} r_{k-j,j}\,p_{k,j}(q)=p_{n,n}(1)r_{0,0}=r_{0,0}.$$

Далі розглянемо заміни змінних

$$u = (1-v)t \; , \qquad v = (1-u)s \, . \tag{8}$$

$$w = (1-u)(1-s) \; , \qquad (1-w)q = u \, . \tag{9}$$

які визначають взаємну однозначну відповідність між точками поверхонь (5), (6) і (7).

Легко перевірити, що при заміні (8) справедливі тотожності

$$(1-u)(1-s) = (1-u-s+us) = (1-t+vt-s+s-v) = (1-v)(1-t)\,; \tag{10}$$

при заміні (9) справедливі тотожності

$$(1-w)(1-q) = (1-w-q-wq) = (1-1+u+s-us-u+wq-wq) = s(1-u)\,, \tag{11}$$

а при заміні змінних (8) справедлива тотожність

$$P(u,s) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} r_{i,j}\, p_{n,i}(u)\, p_{n-i,j}(s) = \breve{P}(v,t) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} r_{i,j}\, p_{n,j}(v)\, p_{n-i,j}(t)\,, \tag{12}$$

що слідує з порівняння коефіцієнтів при векторах $r_{i,j}, i+j \le n$. Дійсно, фіксуючи $i,j \mid i+j \le n$, одержимо

$$\begin{aligned}
p_{n,i}(u)\,p_{n-i,j}(s) &= \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-u)^{n-i}u^i\,\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}(1-s)^{n-i-j}s^j = \\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-u)^{n-i-j}u^i(1-u)^j\,\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}(1-s)^{n-i-j}s^j = \\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!}\big((1-u)(1-s)\big)^{n-i-j}u^i\,\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}\big(s(1-u)\big)^j = \\
&= \frac{n!}{j!(n-j)!}(1-v)^{n-i-j}(1-t)^{n-i-j}\big((1-v)t\big)^i\,\frac{(n-j)!}{i!(n-i-j)!}v^j = \\
&= \frac{n!}{j!(n-j)!}(1-v)^{n-j}v^j\,\frac{(n-j)!}{i!(n-j-i)!}(1-t)^{n-i-j}\big(t\big)^i = p_{n,j}(v)\,p_{n-i,j}(t)
\end{aligned}$$

Аналогічно, при заміні змінних (9) справедлива тотожність

$$P(u,s) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} r_{i,j}\, p_{n,i}(u)\, p_{n-i,j}(s) = \breve{P}(w,q) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} r_{k-j,j}\, p_{n,n-k}(w)\, p_{k,j}(q) \,, \tag{13}$$

що слідує після порівняння коефіцієнтів при векторах $r_{i,j}, i+j \le n$. Дійсно, зафіксувавши $i,j \mid i+j \le n$, одержимо

$$p_{n,i}(u)\,p_{n-i,j}(s) = \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-u)^{n-i}u^i\,\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}(1-s)^{n-i-j}s^j =$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{n!}{i!(n-i)!}(1-u)^{n-i-j}u^i(1-u)^j\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}(1-s)^{n-i-j}s^j=\\
&=\frac{n!}{i!(n-i)!}\left((1-u)(1-s)\right)^{n-i-j}u^i\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}\left(s(1-u)\right)^j=\\
&=\frac{n!}{(n-i-j)!(i+j)!}w^{n-i-j}\left(q(1-w)\right)^i\frac{(i+j)!}{i!\,j!}\left((1-w)(1-q)\right)^j=\\
&=\frac{n!}{(n-i-j)!(i+j)!}(1-w)^{i+j}w^{n-i-j}\frac{(i+j)!}{i!\,j!}(1-q)^iq^j=\\
&=p_{n,n-i-j}(w)p_{i+j,j}(q)=p_{n,n-k}(w)p_{k,j}(q)
\end{aligned}
$$

Отримані співвідношення дозволяють зробити висновок про те, що поверхні (5), (6) і (7) складаються з однакової множини точок. Дійсно, з рівностей $u=(1-v)t$, $v=(1-u)s$, $w=(1-u)(1-s)$ слідує, що $u+v+w=1$. Крім того, з урахуванням співвідношень (8), (9), (10) і (11) маємо

$$
\begin{aligned}
&P(u,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}r_{i,j}p_{n,i}(u)p_{n-i,j}(s)=\\
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}r_{i,j}\frac{n!}{(n-i)!i!}(1-u)^{n-i}u^i\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}(1-s)^{n-i-j}s^j=\\
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}r_{i,j}\frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!}u^i\left(s(1-u)\right)^j\left((1-u)(1-s)\right)^{n-i-j}=\\
&=\sum_{i+j\le n}r_{i,j}\frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!}u^iv^jw^{n-i-j}.
\end{aligned}
$$

Висновок. Поверхні, описані за допомогою рівнянь (5), (6) і (7), можна представити як модифіковані поверхні Безь'є на трикутнику.

1. Barhill E., Birkhoff G., Gordon M.J. Smooth interpolation on triangles, J. Approx. Theory, Vol.8, 1973, pp.114-128
2. Barnhill R.E., Gregory J.A. Compatible smooth interpolation on triangles, J. Approx. Theory, Vol.15, 1975, pp.214-225
3. Barnhill R.E. and Gregory J.A. Polynomial interpolation to boundary data on triangles, Math. Comp. 29 (1975), 726-735.
4. Gordon W.J. Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation, SIAM J.Numer.Anal.,Vol.8,1971, pp.158-177.
5. Gordon W.J., Hall C.A. Transfinite element methods blending-function interpolation over arbitrary curved element domains, Numer. Math., Vol.21, 1973, pp.109-112.
6. Marshall J.A., Mitchell A.R. Blending interpolants in the finite element method, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 12 (1978), 77-83.
7. Роджерс Д., Адамс Д. Математические основы машинной графики. - М.: Машиностроение, 1980. - 240 с.
8. Shi-Min Hu Conversion between triangular and rectangular Bezier patches, CAGD Vol. 18 Issue 7 (2001)
9. М.И.Григорьев, В.Н.Малозёмов, А.Н.Сергеев Полиномы Бернштейна и составные кривые Безь'є //Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006, Т.46, №11, с. 1962-1971
10. *Капелюхин И.А.* Параметризация и визуализация усечённых поверхностей Безье для электронной коммерции. Санкт-Петербург.: ГОУ ВПО «СПГИЭУ», 2007. – 28 с.
11. Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 2. Пер. с франц./Жермен-Лакур П., Жорж П. Л., Пистр Ф., Безбе П. – М.: Мир, 1989. – 264 с., ил.
12. *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 304 с. ил