УДК 515.2
Я.А.Кокарєва
Донбаська національна академія будівництва та архітектури

ПАРАБОЛІЧНА КОНГРУЕНЦІЯ ПРЯМИХ ТА ЇЇ ПОВЕРХНІ У ПАРАМЕТРАХ ПАРАБОЛІЧНОГО ПОВОРОТУ

В статті запропоновано подання параболічної конгруенції прямих еквіафінною відповідністю двох плоских полів в параболічному повороті. Отримані параметричні рівняння конгруенції та її поверхонь у загальному вигляді.

Ключові слова: *параболічна конгруенція, параболічний поворот, параметричні рівняння, поверхня конгруенції, візуалізація.*

Постановка проблеми. Комп'ютерна візуалізація поверхонь складної форми за їх аналітичним описом є важливим чинником та невід'ємною складовою автоматизованих систем проектування (САПР), наукових досліджень (АСНД), технологічної підготовки виробництва (АСТПВ). Найбільш зручною формою аналітичного опису для візуалізації слід визначити параметричну, яка дозволяє відображати координатну сітку поверхні.

Аналіз останніх досліджень. Одна з концепцій формоутворення об'єктів складної геометричної форми базується на представленні конгруенцій ліній і на вилученні з конгруенції поверхні шляхом занурення в неї іншої лінії, що не належить конгруенції. Такі лінійчаті поверхні досліджено у роботах Підгорного О.Л., Обухової В.С. [1] та їх учнів конструктивним методом. Комп'ютерну візуалізацію багатьох поверхонь здійснено Несвідоміним В.М. [2] у його докторській дисертації, але це програмне забезпечення розроблене на основі конструктивних визначників, що потребує особливих знань користувача в цій галузі формоутворення.

Формулювання цілей статті. В статті поставлено за ціль отримання параметричних рівнянь параболічної конгруенції прямих, поданої еквіафінною відповідністю двох плоских полів в параболічному повороті, та синтез параметричних рівнянь поверхонь, що вилучаються з конгруенції зануренням довільної лінії.

Основна частина. *Параболічний поворот* є добуток перетворення зсуву і паралельного перенесення [3] (рис. 1). При такому перетворенні отримані точки розташовані на однієї параболі.

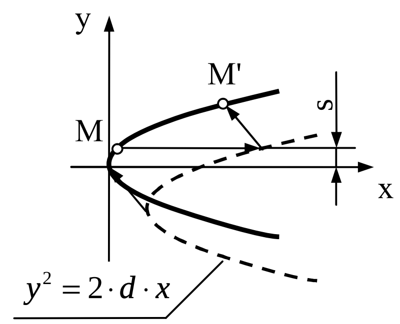


Рис. 1. Параболічний поворот точки М

Перетворення параболічного повороту є еквіафінним.

На площині xOy візьмемо точку $M(p, q, 0)$. Здійснимо зсув точки М у точку $\left(p + \dfrac{s}{d}q,\; q,\; 0\right)$ і її паралельне перенесення до точки $M'\left(p + \dfrac{s}{d}q + \dfrac{s^2}{2d},\; q + s,\; 0\right)$.

Здійснимо перенесення точки М' у площину, паралельну площині xOy, та на відстані h від неї. Таким чином, отримаємо точку $M''\left(p + \dfrac{s}{d}q + \dfrac{s^2}{2d},\; q + s,\; h\right)$.

Пряма, що проходить через точки M і M'' є прямою параболічної конгруенції з параметрами *p, q* (рис. 2).

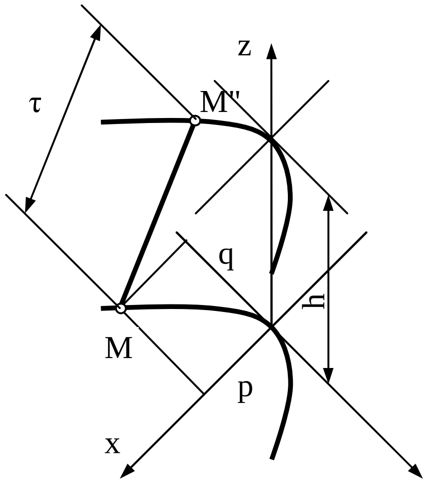


Рис. 2. Утворення параболічної конгруенції прямих

Параметричні рівняння конгруенції отримаємо як рівняння поточної точки її променя:

$$x = p(1-t) + \left(p + \frac{s}{d}q + \frac{s^2}{2d}\right)t,\ y = q(1-t) + (q+s)t,\ z = ht,$$

які спрощуються до

$$x = p + \frac{s}{d}qt + \frac{s^2}{2d}t,\ y = q + st,\ z = ht, \qquad (1)$$

де τ – параметр положення поточної точки на прямій конгруенції.

Частинні похідні функцій (1)

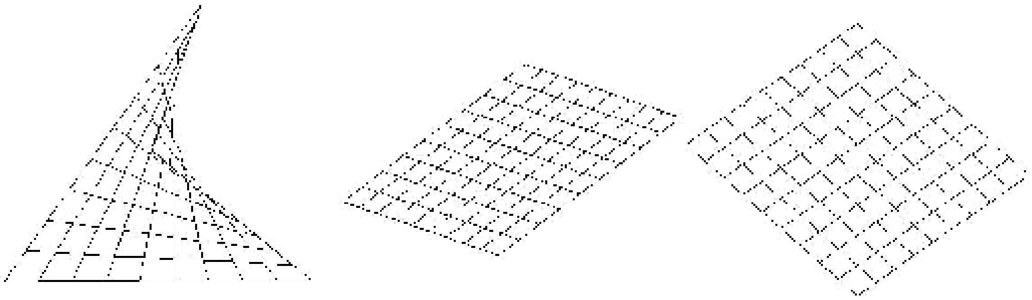
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial p} = 1, && \frac{\partial y}{\partial p} = 0, && \frac{\partial z}{\partial p} = 0,\\
&\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{s}{d}t, && \frac{\partial y}{\partial q} = 1, && \frac{\partial z}{\partial q} = 0,\\
&\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{s}{d}q + \frac{s^2}{2d}, && \frac{\partial y}{\partial t} = s, && \frac{\partial z}{\partial t} = h.
\end{aligned}$$

З рівності нулю якобіана

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = h$$

витікає, що власних директрис конгруенція немає, при $h = 0$ вона вироджується у плоску конгруенцію.

Для більш детального вивчення структури конгруенції будемо вважати, що функціями (1) введено криволінійні координати *p, q, τ*. Покажемо на рис. 3 координатні поверхні системи (1).



а) б) в)

Рис. 3. Координатні поверхні еквіафінної параболічної конгруенції прямих:
а) $p = const$, б) $q = const$, в) $t = const$

Лише координатна поверхня $p = const$ – гіперболічний параболоїд, а координатні поверхні $q = const$ і $t = const$ – площини. Усі координатні лінії – прямі: *p*-лінії і *q*-лінії на площині $t = const$ утворюють ортогональну сітку, *p*-лінії і *τ*-лінії на площині $q = const$ – косокутну сітку, причому одна з сімей складається з прямих, паралельних осі Ох, а напрям прямих другої сім'ї змінюється зі зміною *q*.

Таким чином, маємо параболічну конгруенцію з невласною директрисою.

За схемою, описаною в роботі [4], здійснимо синтез параметричних рівнянь конгруенції.

Знайдемо вирази для криволінійних координат *p* і *q* через *x, y, z*. З третього з рівнянь (1) $t = \frac{z}{h}$. Підставивши вираз *τ* до другого і визначимо $q = y - \frac{sz}{h}$.

В результаті вирази для *p* і *q* набувають вигляду:

$$p = x - \frac{sz}{dh}\left(y - \frac{sz}{h} + \frac{s}{2}\right), q = y - \frac{sz}{h}. \qquad (2)$$

Якщо в конгруенцію занурюється лінія

$$x = h_1(w),\ y = h_2(w),\ z = h_3(w)\,, \qquad (3)$$

то функції (2) залежать від параметра *w* – параметра положення точки на занурюваної лінії. Цю залежність отримуємо підстановкою виразів *x, y, z* (3) до (2).

$$p = h_1(w) - \frac{sh_3(w)}{dh}\left(h_2(w) - \frac{sh_3(w)}{h} + \frac{s}{2}\right), q = h_2(w) - \frac{sh_3(w)}{h}. \qquad (4)$$

Нарешті, підстановка виразів *p, q* (4) до (1) приводить до параметричних рівнянь поверхні, вилученої з конгруенції (1) зануренням лінії (3):

$$
\begin{aligned}
&x = h_1(w) + \frac{s}{d}\left(h_2(w) - \frac{sh_3(w)}{h} + \frac{s}{2}\right)\left(t - \frac{h_3(w)}{h}\right),\\
&y = h_2(w) + s\left(t - \frac{h_3(w)}{h}\right),\\
&z = ht.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Наведемо приклади складання параметричних рівнянь поверхонь параболічної конгруенції та візуалізації цих поверхонь.

Приклад 1. Навести комп'ютерне зображення поверхні конгруенції параболічного повороту $(h = 0.5,\ d = 0.5,\ s = 0.7)$, отриманої зануренням в неї кривої Вівіані

$$x = h_1(w) = m\sin w,\ y = h_2(w) = m\sin w\cos w,\ z = h_3(w) = m\cos^2 w, \tag{6}$$

$m = 0.5,\ 0 \le w \le 2p$.

Розв'язання. Підстановкою (6) до (5) отримуємо параметричні рівняння шуканої поверхні, за якими одержуємо її комп'ютерне зображення (рис. 4) при $0 \le w \le 2p$, $0 \le t \le 1$.

$$
\begin{aligned}
&x = 0.5\sin w + 1.4(0.5\cos w\sin w - 0.7\sin w + 0.35)(t - \cos^2 w),\\
&y = 0.5\cos w\sin w + 0.7t - 0.7\cos^2 w,\\
&z = 0.5t.
\end{aligned} \tag{7}
$$

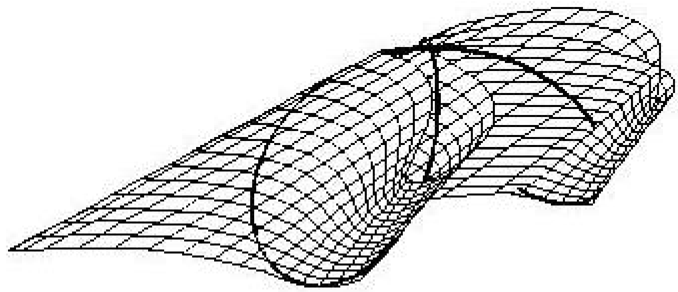


Рис. 4. Поверхня (7), вилучена з конгруенції параболічного повороту зануренням в неї лінії Вівіані (6)

Приклад 2. Скласти рівняння поверхні, отриманої зануренням в конгруенцію (1) еліпса, канонічні параметричні рівняння якого

$$\bar{u} = m\cos w,\quad \bar{v} = n\sin w,$$

за умов, що система його віднесення $\overline{uov}$ повернута відносно системи uov на площині інциденції на кут $b_0 = p/4$ і центр еліпса в системі uov має координати $u_0 = 2,\ v_0 = 15$. Площина інциденції еліпса відсікає на осях *x, y, z* відрізки $a = 5$, $b = 12$, $c = -7$.

Розв'язання. Згідно з алгоритмом, наведеним в роботі [5], перерахувавши a, b, c у коефіцієнти загального рівняння площини A, B, C, D та за умови $C > 0$ отримаємо параметричні рівняння площини інциденції еліпса

$$x = -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\frac{CAv}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} - Bu\right),$$
$$y = -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\frac{CBv}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + Au\right), z = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2}}\cdot v - \frac{D}{C}, \tag{8}$$

де функції u, v набувають вигляду:

$$u = 2 + m\cos w\cos p/4 - n\sin w\sin p/4,$$
$$v = 15 + m\cos w\sin p/4 + n\sin w\cos p/4.$$

При поданих числових значеннях та після спрощення отримаємо

$$\begin{aligned} x &= h_1(w) = 6.853 + 0.087\cos w + 1.263\sin w, \\ y &= h_2(w) = 5.022 + 0.802\cos w - 1.006\sin w, \\ z &= h_3(w) = 5.523 + 0.59\cos w + 1.181\sin w. \end{aligned} \tag{9}$$

Підстановка параметричних рівнянь (9) еліпса у просторі до виразів (5) при $m = 1,\ n = 2,\ h = 5,\ d = 0.5,\ s = 2,\ 0 \le w \le 2p,\ 0 \le t \le 2$ приводить до шуканих параметричних рівнянь поверхні, які не наводяться за причини їх громіздкості.

За ними побудовано комп'ютерно-графічне зображення поверхні (рис. 5).

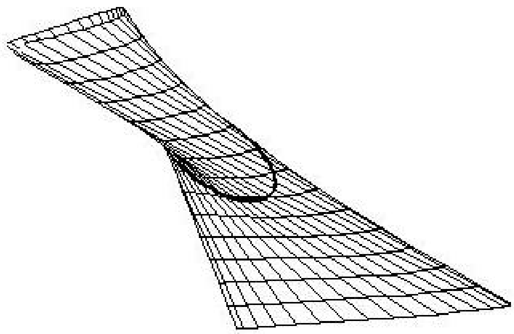


Рис. 5. Поверхня, рівняння якої отримані підстановкою (9) до (5)

Висновки. У роботі вперше отримані параметричні рівняння параболічної конгруенції прямих, поданої у параметрах параболічного повороту. Аналіз рівнянь показав, що отримана конгруенція є конгруенцією з невласною директрисою. Отримані параметричні рівняння поверхонь легко візуалізувати з використанням сучасних комп'ютерних технологій.

1. Михайленко В.Е. Формообразование поверхностей оболочек в архитектуре / В.Е. Михайленко, В.С. Обухова, А.Л. Подгорный. – К.: «Будівельник», 1972. – 207 с.
2. Несвідомін В.М. Комп'ютерні моделі синтетичної геометрії: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01/ В.М. Несвідомін. – К.: КНУБА, 2008. – 435 с.
3. Розенфельд Б.А. Аполлоний Пергский / Б.А. Розенфельд. – М.: МЦНМО, 2004. – 176 с.
4. Кокарєва Я.А. Параметричні рівняння конгруенції прямих, що перетинають дві лінії / Кокарєва Я.А. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 189-193.
5. Кокарєва Я.А. Тривимірне рівняння плоскої кривої, площина якої довільно розташована відносно системи віднесення / Кокарєва Я.А. // Праці ТДАТУ. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. Прикл. геом та інж. граф. – Т.49. – С. 147-153.