

УДК 621:004.92

Г.П.Грязнова

Національний технічний університет України "КПІ"

ПРОЕКТИВНІ ПОЛІНОМИ

Стаття присвячена дослідженню можливостей проективної геометрії для завдання просторових кривих з метою подальшого розвитку апарата моделювання поверхонь деталей машинобудування.

Ключові слова: *поліноми, проективна геометрія, афінний простір, комп'ютерні інформаційні технології, машинобудування.*

Вступ. Подальший розвиток сучасного машинобудування потребує створення нових матеріалів, впровадження інноваційних технологій, використання більш ефективного обладнання та інструменту, механізації й автоматизації виробничих процесів, ресурсозбереження і т. д.

Для опису об'єктів машинобудування особливе значення мають геометричні методи. Сучасні засоби комп'ютерних інформаційних технологій використовують різноманітні графічні та аналітичні засоби отримання рівнянь кривих та поверхонь у векторному параметричному вигляді для подальшого моделювання та розрахунків деталей та складальних одиниць машинобудівних конструкцій [1-4].

Постановка проблеми. Задача створення найбільш зручних моделей розрахунку та конструювання геометричних поверхонь деталей потребує поглибленого дослідження поліномів та раціональних кривих у проективному та афінному просторах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Останніми тенденціями багатьох графічних систем, таких як, наприклад AutoCAD, Catia, Solid Works та інших, а також математичних пакетів програмного забезпечення, є поступове вдосконалення засобів математичного апарату для обчислення та програмованого моделювання твердих тіл.

Розробці апарату побудови геометричних моделей присвячена низка робіт з дослідженнями у проективній та інших напрямках геометрії [5-6].

Формулювання цілей статті. Мета статті полягає у дослідженні параметрично заданих кривих і пошуку зручних геометричних моделей.

Основний матеріал дослідження. Розглянемо криву k у двовимірному проективному просторі (Π^2), яка проходить через три точки (рис. 1). Крива задається рівняннями (1):

$$\begin{aligned} ru_0 &= 1 \\ ru_1 &= t \\ ru_2 &= at^2 + bt^3 + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

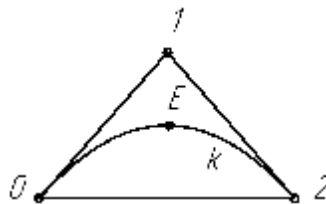


Рис. 1. Крива у двовимірному проективному просторі (Π^2).

При поділенні на u_0 отримуємо наступне загальне неявне рівняння (2)

$$\frac{u_2}{u_0} = a \left(\frac{u_1}{u_0} \right)^2 + b \left(\frac{u_1}{u_0} \right)^3 + \dots + k \left(\frac{u_1}{u_0} \right)^n \quad (2)$$

Введемо позначення: $\frac{u_2}{u_0} = \bar{u}_2; \frac{u_1}{u_0} = \bar{u}_1$. Рівняння (2) приймає відповідний вигляд

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &= a\bar{u}_1^2 + b\bar{u}_1^3 + \dots + k\bar{u}_1^n \\ \bar{u}_1 = 0 &\Rightarrow \bar{u}_2 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Для дослідження (3) знайдемо похідну

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{u}_1} &= 2a\bar{u}_1 + 3b\bar{u}_1^2 + \dots \\ \bar{u}_1 = 0 &\Rightarrow \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{u}_1} = 0 \end{aligned}$$

На основі цього робимо висновок, що крива проходить через початок координат і має в ній горизонтальну дотичну (рис.2).

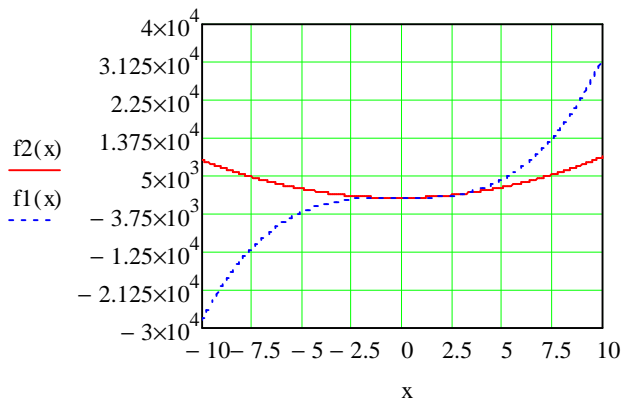


Рис. 2. Приклад побудови кривих, де $x = \bar{u}_1$, $f1(x) = \bar{u}_2 = 10\bar{u}_1^2 + 10\bar{u}_1^3$, $f2(x) = \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{u}_1}$

У 3-вимірному просторі (3D) крива задається наступними рівняннями (4) в однорідних координатах:

$$\begin{aligned} pu_0 &= 1 \\ pu_1 &= t \\ pu_2 &= at^2 + bt^3 + \dots \\ pu_3 &= at^3 + bt^4 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

В неоднорідних координатах

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= t \\ \bar{u}_2 &= t^2 \\ \bar{u}_3 &= at^3 + bt^4 + \dots, \\ \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{u}_0} &= \frac{u_1}{u_0}; \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{u}_0} = \frac{u_2}{u_0}; \frac{d\bar{u}_3}{d\bar{u}_0} = \frac{u_3}{u_0} \end{aligned} \quad (5)$$

В проекції на 0-1-2 отримуємо криву другого порядку (К2П). Запишемо її проекцію на площину 0-1-3 (рис. 3).

$$\bar{u}_1 = t; \quad \bar{u}_3 = at^3 + bt^4 + \dots$$

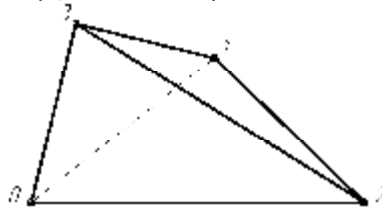


Рис. 3. Проективний трикутник у 3D.

В неявному вигляді

$$\bar{u}_3 = a\bar{u}_1^3 + b\bar{u}_1^4 + \dots,$$

В площині 1-2-3 однорідне рівняння (4) можна звести до неоднорідного

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 = t; p\bar{u}_3 = at^2 + bt^3 + \dots, \\ \text{де } \bar{u}_2 = \frac{u_2}{u_1}; \bar{u}_3 = \frac{u_3}{u_1} \end{aligned} \quad (6)$$

Неявне рівняння має вигляд

$$p\bar{u}_3 = a\bar{u}_2^2 + b\bar{u}_2^3 + \dots \quad (7)$$

Для подальшого дослідження перейдемо із проективного простору в афінний, використовуючи векторне рівняння [5].

Для площини (A^2):

$$r = \frac{a_0 r_0 u_0 + a_1 r_1 u_1 + a_2 r_2 u_2}{a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2}, \quad (8)$$

для тривимірного простору (A^3):

$$r = \frac{a_0 r_0 u_0 + a_1 r_1 u_1 + a_2 r_2 u_2 + a_3 r_3 u_3}{a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3}, \quad (9)$$

для n-вимірного простору (A^N)

$$r = \frac{a_0 r_0 u_0 + a_1 r_1 u_1 + a_2 r_2 u_2 + \dots + a_n r_n u_n}{a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n}, \quad (10)$$

де r_i – радіус – вектори точок, u_i – змінні параметри, a_i – коефіцієнти.

Запишемо криву (1) в A^2 :

$$r = \frac{a_0 r_0 u_0 + a_1 r_1 t + a_2 r_2 (at^2 + bt^3 + \dots)}{a_0 + a_1 t + a_2 (at^2 + bt^3 + \dots)} \quad (11)$$

або в проекціях на осі Ox , Oy :

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_0 x_0 + a_1 x_1 t + a_2 x_2 (at^2 + bt^3 + \dots)}{a_0 + a_1 t + a_2 (at^2 + bt^3 + \dots)}, \\ y &= \frac{a_0 y_0 + a_1 y_1 t + a_2 y_2 (at^2 + bt^3 + \dots)}{a_0 + a_1 t + a_2 (at^2 + bt^3 + \dots)} \end{aligned} \quad (12)$$

Для дослідження виберемо точки 1, 2, 3 (рис. 4).

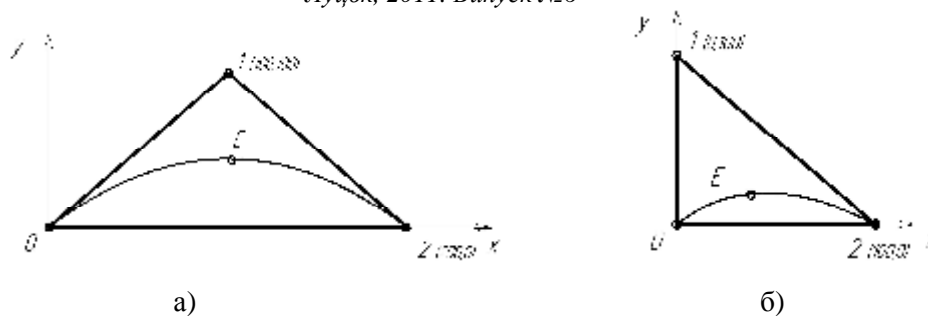


Рис. 4. Розташування кривої в афінному просторі. У випадку а) – одна точка на осі, б) – дві точки із трьох належать осям.

Розглянемо криву, яка проходить через одиничну точку E проективної системи координат (рис.1). В такому випадку

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1$$

$$x = \frac{100t + 200at^2}{1+t+at^2}, y = \frac{100t}{1+t+at^2} \quad (13)$$

Після декількох підрахунків отримуємо наступне рівняння кривої (рис 4,а):

$$4ay^2 + 2y(x-y) + (x-y)^2 - 200(x-y) = 0 \quad (14)$$

Для випадку на рис. 4, б :

$$x = \frac{200at^2}{1+t+at^2}, y = \frac{200t}{1+t+at^2} \quad (15)$$

Загальне рівняння кривої має такий вигляд

$$ay^2 + xy + x^2 - 200x = 0 \quad (16)$$

Порівнюючи (14) і (16) робимо висновок, що рівняння (16) простіше для подальшої роботи.

Висновки та перспективи подальших досліджень. На початку роботи визначені рівняння кривих у явному та неявному виглядах у ПП, окремо для К2П та зроблен перехід до афінного простору у двох випадках, один з яких виявився більш зручним для дослідження кривих вищих порядків.

1. Базров Б.М. Основы технологии машиностроения / Базров Б.М. – М.: Машиностроение, 2005. – 736 с.
2. Машиностроение. Энциклопедия Т.Ш-3. Технология изготовления деталей машин / [Дальский А.М., Суслов А.Г., Назаров Ю.Ф. и др.] – М.: Машиностроение, 2000. – 840 с.
3. Технология машиностроения: В 2 кн. Кн.1. Основы технологии машиностроения / [Жуков Э.Л., Козарь И.И., Мурашкин С.Л. и др.] – М.: Высш. шк., 2003. – 278с.
4. Леви-Чивита Т. Курс теоретической механики/ Леви-Чивита Т., Амальди У. //Том первый/ Кинематика. Принципы механики. Статика – М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. – 387 с.
5. Надолинный В.А. Основы теории проективных рациональных поверхностей/ Надолинный В. А.//Автореферат дисс. ... д-ра техн. наук, 05.01.01. – М.: 1989. – 30 с.
6. Грязнова Г.П. Дослідження геометричних засобів створення параметрично заданих технічних поверхонь для моделювання виробів в САПР/ Грязнова Г.П.//Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці ТДАУ – Вип. 4, т. 50. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – с.151-157.