УДК 514.181

П.О.Горбонос, В.П.Бондаренко
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

СИСТЕМА ПОЗИЦІЙНИХ ЗАДАЧ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ЩОДО МНОГОВИДІВ

Поширенням алгебри предикатів на многовиди тривимірного евклідова простору отримано повну множину елементарних об'єктів нарисної геометрії, поданих як унарні, бінарні та тернарні предикати. Усі задачі зображення елементів цієї множини розглядаються як повна система елементарних задач нарисної геометрії, для подання якої застосовано орієнтований граф. Наведено приклад розв'язання задачі за допомогою графу.

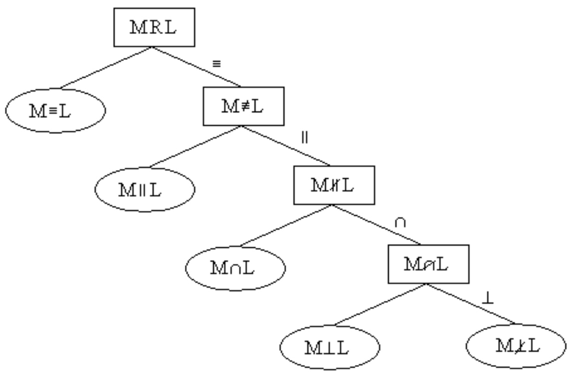
Постановка проблеми. Розв'язувальний апарат позиційних задач нарисної геометрії базується виключно на системі елементарних задач, для побудови якої слід визначити повну номенклатуру елементарних задач, встановити зв'язки між задачами та порядок їхнього розв'язання у системі.

Аналіз результатів існуючих досліджень. На сьогоднішній час існують численні докладні публікації математичних означень та описів предикатів, многовидів та систем многовидів[1]. Також докладно розглянуті власне задачі нарисної геометрії щодо многовидів та запропоновані шляхи їх розв'язання [2,3]. Але у більшості випадків розв'язання пропонуються для конкретних задач і не розглядається можливість переходу від однієї задачі до іншої або використання розв'язання однієї задачі як основи для розв'язання іншої.

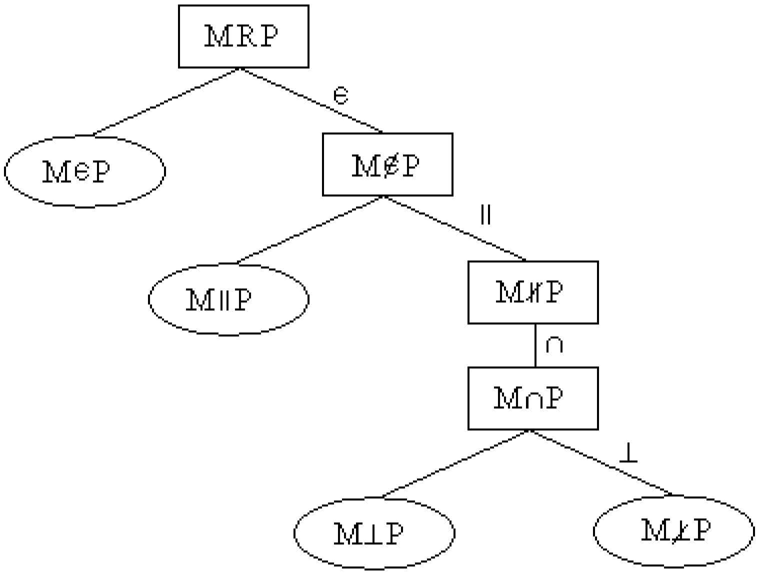
Постановка задачі. Розглянути стосунки між елементарними позиційними задачами нарисної геометрії, побудувати граф зв'язків цих задач, показати на прикладі розв'язання однієї із задач за допомогою інших елементарних задач.

Основна частина. Вся нарисна геометрія базується на задачах стосовно многовидів та елементарних систем многовидів. Многовиди – це елементи тривимірного евклідова простору, які підпадають під загальне подання предикатами. Унарним предикатом подаємо власне многовид, наприклад: A, L, Q. Бінарні предикати показують стосунки між двома многовидами, тобто позначають елементарні системи многовидів, і мають таку структуру – XRY, де X та Y – це два многовиди, а R – символ зв'язку між ними. Всього може бути 5 звязків між многовидами: $\equiv, \in, \parallel, \cap, \perp$. Тернарні предикати визначають запроваджені множинні операції щодо многовидів. Запровадимо 3 наступні операції: обєднання(V), перетинання(A), різниця(\). Розглянемо усі можливі елементарні системи многовидів та стосунки між многовидами у цих системах. Покажемо ці стосунки у вигляді дерев. При цьому дерево буде будуватись відносно зазначеного вище порядку зв'язків. Зазначимо, що для систем «точка-точка», «точка-пряма» та «точка-площина» дерева зв'язків будуть найпростішими і утворюватимуть кущі, тобто кожне дерево матиме лише два листа. Для системи «точка-точка» це будуть листи «$A \equiv B$» та «$A \neq B$», для системи «точка-пряма» - «$A \in L$» та «$A \notin L$», і для системи «точка-площина» - «$A \in Q$» та «$A \notin Q$». Отже, розглянемо одразу складніші системи.

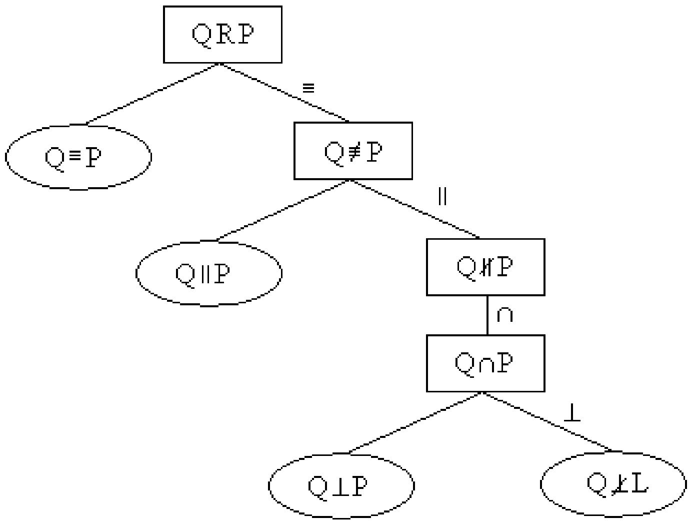
1. Система «пряма-пряма»



2.Система «пряма-площина»



3.Система «площина-площина»



Зазначимо, що кожен лист кожного дерева являє собою позиційну задачу щодо елементарних систем многовидів, тобто задачу на побудову зображення зв'язків многовидів

Тепер, спираючись на побудовані нами дерева, розглянемо можливі стани многовиду у системі двох площин зображення. Для цього побудуємо матриці станів. Для точки така матриця є очевидною, так як включатиме лише стосунки щодо приналежності точки площині зображення.

Таблиця 1

Матриця 1 «Пряма»

RV \ RH	$L \in H$	$L \parallel H$	$L \perp H$	$L \nparallel H$ $L \not\perp H$
$L \in V$	$\begin{cases} L \in V \\ L \in H \end{cases}$	$\begin{cases} L \in V \\ L \parallel H \end{cases}$	$\begin{cases} L \in V \\ L \perp H \end{cases}$	$\begin{cases} L \in V \\ L \nparallel H \\ L \perp H \end{cases}$
$L \parallel V$	$\begin{cases} L \parallel V \\ L \in H \end{cases}$	$\begin{cases} L \parallel V \\ L \parallel H \end{cases}$	$\begin{cases} L \parallel V \\ L \perp H \end{cases}$	$\begin{cases} L \parallel V \\ L \nparallel H \\ L \not\perp H \end{cases}$
$L \perp V$	$\begin{cases} L \perp V \\ L \in H \end{cases}$	$\begin{cases} L \perp V \\ L \parallel H \end{cases}$		
$L \nparallel V$ $L \not\perp V$	$\begin{cases} L \cap V \\ L \in H \end{cases}$	$\begin{cases} L \not\cap V \\ L \nparallel H \end{cases}$		$L \cap V$ $L \cap H$

Таблиця 2

Матриця 2 «Площина»

RV \ RH	$Q \in H$	$Q \parallel H$	$Q \perp H$	$Q \nparallel H$ $Q \not\perp H$
$Q \in V$			$\begin{cases} Q \in V \\ Q \perp H \end{cases}$	
$Q \parallel V$			$\begin{cases} Q \parallel V \\ Q \perp H \end{cases}$	
$Q \perp V$	$\begin{cases} Q \perp V \\ Q \in H \end{cases}$	$\begin{cases} L \perp V \\ L \parallel H \end{cases}$		
$Q \nparallel V$ $Q \not\perp V$				$L \cap V$ $L \cap H$

Задачі пов'язані між собою і утворюють системи елементарних задач щодо многовидів. Тому, опираючись на таблиці та дерева покажемо зв'язки між цими задачами у вигляді повного орієнтованого графу, вершинами якого будуть власне задачі, а дугами – зв'язки між ними. Змістом цих зв'язків є вхідність задачі, що відповідає вершині – початку дуги, до задачі, що відповідає вершині – закінченню дуги(рис. 1).

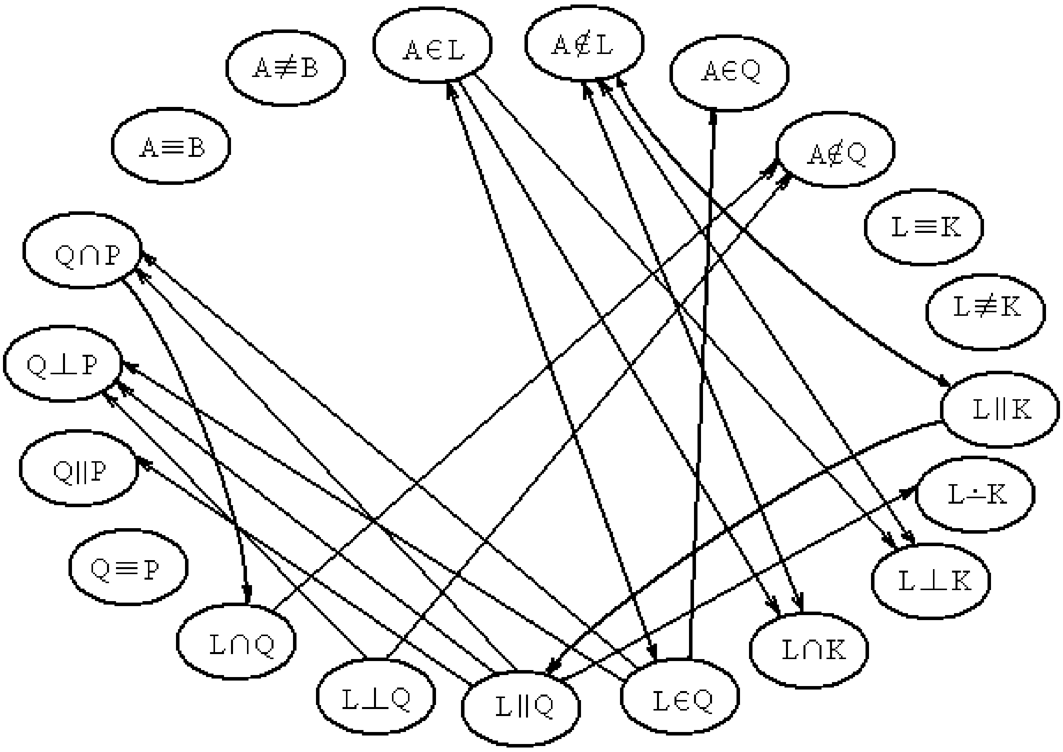


Рис 1. Граф системи елементарних задач щодо многовидів.

Як приклад наведемо побудову зображення точки A, що не належить площині Q. Для цього розпочнемо «шлях» із вершини «L∈ Q» і завершимо у вершині «A∉ Q». Отже, спочатку побудуємо зображення прямої L, що належить площині Q (рис. 2).

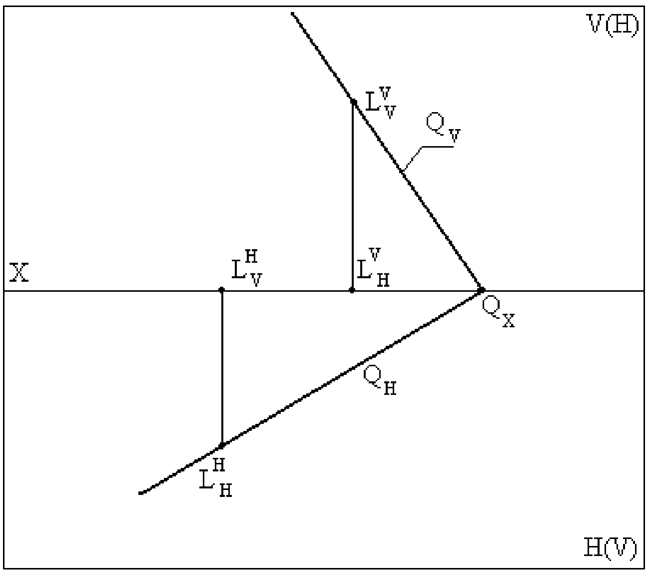


Рис.2. L∈ Q

Переходимо до наступної вершини графу. Для цього скористуємося тим, що пряма L буде лінією перетину двох площин. Отже, побудуємо зображення площини P, що проходить через пряму L та не співпадає з Q (рис. 3).

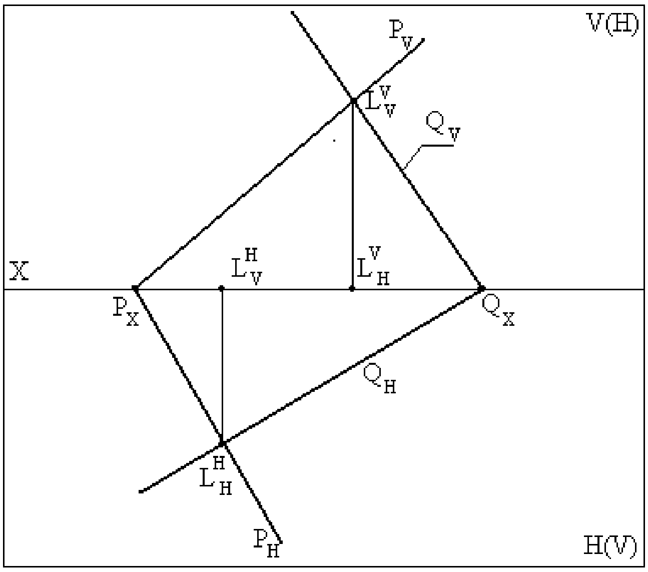


Рис.3. $P \cap Q$

Наступна вершина графу – побудуємо зображення прямої K, що належить площині P та перетинає площину Q. Будуємо зображення прямої і слідами, і проекціями (рис. 4).

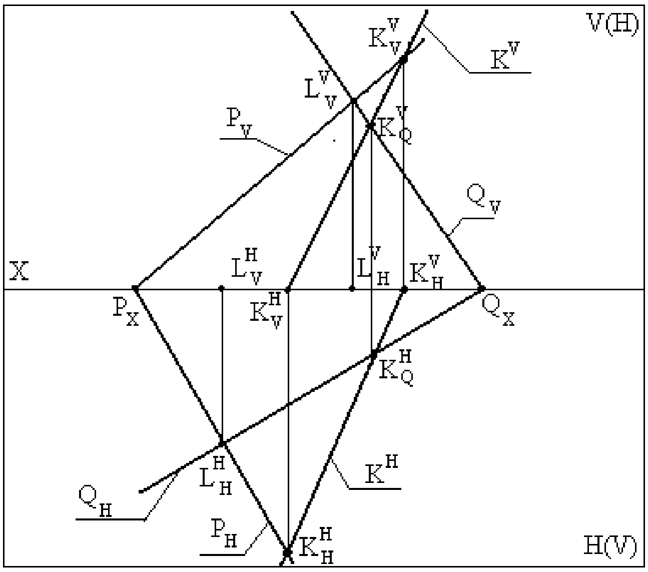


Рис.4. $K \cap Q$

Переходимо до останньої вершини графу – будуємо зображення точки A, що не належить площині Q. При цьому проекції точки A належатимуть відповідним проекціям прямої K та не співпадатимуть із проекціями точок перетину прямої K з площиною Q (рис. 5).

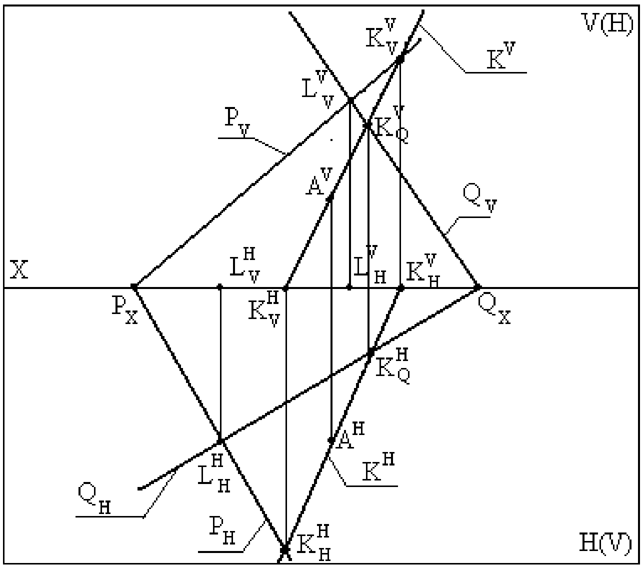


Рис 5. $A \notin Q$

Висновки. Побудовано повну систему елементарних позиційних задач нарисної геометрії: винайдено їхню повну множину, визначені зв'язки між елементарними позиційними задачами нарисної геометрії, відповідно до них побудовано граф цієї системи та показано, як за його допомогою розв'язувати типові дидактичні позиційні задачі нарисної геометрії.

1. Соболева Т. С. Дискретная математика: учебник для студ. вузов. / Т. С. Соболева, А. В. Чечкин; под ред. А. В. Чечкина. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 356 с. – (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).
2. Глоговський В. В. Нарисна геометрія на алгоритмічній основі. / В. В. Глоговський, Б. М. Гринева, М. О. Гнатюк. – Львів : Вид.-во Львівського ун-та, 1972. — 106 с.
3. Локтев О. В. Краткий курс начертательной геометрии / О. В. Локтев. - М. : Высшая школа, 1999. — 136 с.