УДК 515.2:514.18
Верещага В.М. д.т.н., Конопацький Є.В. к.т.н., Павленко О.М. аспірант
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩІ, ОБМЕЖЕНОЇ ТОПОГРАФІЧНОЮ ЗАМКНЕНОЮ ПЛОСКОЮ КРИВОЮ

Верещага В.М., Конопацький Є.В., Павленко О.М. Визначення площі, обмеженої топографічною замкненою плоскою кривою. Запропоновано спосіб визначення площі, обмеженої довільною топографічною замкненою кривою, шляхом її поділення на окремі сегменти. Подаючи отримані сегменти дуги у вигляді окремих точкових рівнянь, обчислюються площі обмежені цими сегментами. Шукана площа знаходиться як сума площ під сегментами.

Верещага В.М., Конопацкий Е.В., Павленко А.М. Определение площади, ограниченной топографической замкнутой плоской кривой. Предложен способ определения площади, ограниченной произвольной топографической замкнутой кривой, путем её разделения на отдельные сегменты. Подавая полученные сегменты дуги в виде отдельных точечных уравнений, вычисляются площади ограниченные этими сегментами. Искомая площадь находится как сумма площадей под сегментами.

Vereschaga V.M., Konopatskiy E.V., Pavlenko A.M. Determining the area, topographic limitations locked plane curves. A method for determining the area bounded by topographic arbitrary closed curve by its division into separate segments. By submitting obtained arc segments as individual point equations are calculated area limited by these segments. The required area is the sum of the areas under segments.
Ключові слова: замкнена крива, сегменти кривої, точкові рівняння, площа.

Постановка проблеми. Задачі, у яких виникає необхідність визначення площі, обмеженої дугою кривої, виникають доволі часто. У разі, якщо крива задана рівнянням, застосовується її інтегрування. У разі, якщо вона дискретно представлена, застосовується дискретне інтегрування [1]. У разі, якщо дуга кривої представлена точковим рівнянням [2] – виникає проблема, яку треба усунути.

Формування мети статті. Розробити спосіб визначення площі сегмента, обмеженого дугою кривої, що задана точковим рівнянням.

Основна частина. Спочатку розглянемо площу сегменту обмеженого дугою цієї кривої.

Нехай у симплексі *CAB* задана точковим рівнянням дуга кривої (рис. 1):

$$M=(A-C)p+(B-C)q+C, \quad (1)$$

де – p і q параметри уздовж *CA* і *CB*, відповідно, які визначаються простим відношенням трьох точок.

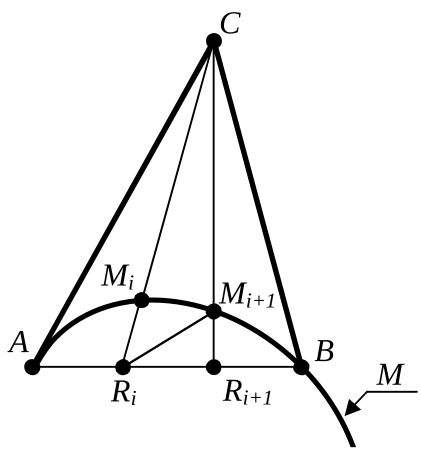

Рис. 1. **Схема для визначення площі між відрізком АВ і дугою АВ кривої М.**

Обираємо дві довільні точки M_i *і* M_{i+1}. Треба зауважити, що чим менша відстань між ними, тим точніше буде обчислена шукана площа сегменту. Запишемо точкові рівняння цих точок, що визначають їх положення на кривій *M*:

$$M_i = (A-C)\,p_i + (B-C)q_i + C, \text{ де } p_i = p(t_i),\ q = q(t_i); \quad (2)$$

$$M_{i+1} = (A-C)p_{i+1} + (B-C)q_{i+1} + c, \text{ де } p_{i+1} = p_{i+1}(t_{i+1}), q_{i+1} = q_{i+1}(t_{i+1}). \quad (3)$$

Із простого відношення трьох точок $\mathrm{M}_i\mathrm{CR}_1$ визначимо R_i: $\mathrm{M}_i\mathrm{CR}_i = \mathrm{r}_i$. Якщо просте відношення подати у геометричній формі як відношення відрізків, то отримаємо:

$$r_i = \frac{M_iR_i}{CR_i},$$

а потім перейдемо до точкової форми простого відношення трьох точок прямої, тоді дістанемо:

$$\frac{M_i - R_i}{C - R_i} = \mathrm{r}_i.$$

Якщо отримане відношення розв'язати відносно R_i, то

$$M_i - R_i = Cr_i - R_i r_i,$$

звідси

$$R_i(1 - r_i) = M_i - C_i,$$

відповідно:

$$\mathrm{R}_i = \frac{M_i - Cr_i}{1 - r_i}, \text{ де } \mathrm{r}_i = 1 - \mathrm{p}_i - \mathrm{q}_i. \quad (4)$$

Підставляємо в (4) точкове рівняння (2), отримаємо:

$$R_i = \frac{(A-C)p_i + (B-C)q_i + C(1-r_i)}{1-r_i} = \frac{(A-C)p_i + (B-C)q_i + C(1-1+p_i+q_i)}{1-1+p_i+q_i},$$

звідки маємо:

$$R_i = (A-C)\frac{p_i}{p_i+q_i} + (B-C)\frac{q_i}{p_i+q_i} + C. \quad (5)$$

Аналогічним чином, для простого відношення $M_{i+1}CR_{i+1}$ визначимо R_{i+1} $M_{i+1}CR_{i+1} = r_{i+1}$, якому віповідає геометрична форма у вигляді відношення відрізків:

$$\frac{M_{i+1}R_{i+1}}{CR_{i+1}} = r_{i+1}.$$

Від цього відношення маємо змогу перейти до точкової форми простого відношення трьох точок:

$$M_{i+1}CR_{i+1} \to \frac{M_{i+1} - R_{i+1}}{C - R_{i+1}} = r_{i+1}.$$

Розв'яжемо отримане відношення у точковій формі відносно R_{i+1}:

$$M_{i+1} - R_{i+1} = Cr_{i+1} - R_{i+1}\,r_{i+1} \to R_{i+1}(1 - r_{i+1}) = M_{i+1} - Cr_{i+1},$$

в результаті дістанемо:

$$R_{i+1} = \frac{M_{i+1} - Cr_{i+1}}{1 - r_{i+1}}, \quad (6)$$

Якщо у (6) підставити точкове рівняння (3) і виконати перетворення:

$$R_{i+1} = \frac{(A-C)p_{i+1} + (B-C)q_{i+1} + C(1-r_{i+1})}{1-r_{i+1}} = \frac{(A-C)p_{i+1} + (B-C)q_{i+1} + C(p_{i+1}+q_{i+1})}{p_{i+1}+q_{i+1}},$$

то у результаті отримаємо:

$$R_{i+1} = (A-C)\frac{p_{i+1}}{p_{i+1}+q_{i+1}} + (B-C)\frac{q_{i+1}}{p_{i+1}+q_{i+1}} + C. \tag{7}$$

Площа шуканого чотирикутника $S(M_i R_i R_{i+1} M_{i+1})$ (рис.1) дорівнює сумі площ двох трикутників:

$$S_{i,i+1}(M_i R_i R_{i+1} M_{i+1}) = S(M_i R_i M_{i+1}) + S(M_{i+1} R_i R_{i+1}).$$

На основі S-теореми [2], площа $S(M_i R_i M_{i+1})$ визначається добутком площі ΔABC, що дорівнює $S_{ABC} = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$, на визначник, рядки якого є параметрами точкових рівнянь (2), (5), (3), тобто:

$$\begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix},$$

тоді площу $\Delta S(M_i R_i M_{i+1}) = \Delta S_i$ можна записати наступним чином:

$$\Delta S_i = \frac{ab\sin\gamma}{2(p_i+q_i)}\begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Аналогічним чином складається визначник для площі $S(M_{i+1} R_i R_{i+1})$, з використанням точкових рівнянь (3), (5), (7). На основі тієї ж *S*-теореми площа трикутника $S(M_i R_i M_{i+1}) = S_{i+1}$ буде визначатися наступним чином:

$$\Delta S_{i+1} = \frac{ab\sin\gamma}{2(p_i+q_i)(p_{i+1}+q_{i+1})}\begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Тут в ΔS_i та ΔS_{i+1} треба розуміти, що кут γ - це кут при вершині симплекса *C*. Тоді площу чотирикутника $S(M_{i+1} R_i R_{i+1}) = S_{i,i+1}$ можна добути з виразу:

$$S_{i,i+1} = \frac{ab\sin\gamma}{2(p_i+q_i)}\left(\begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{p_{i+1}+q_{i+1}}\begin{vmatrix} p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & p_{i+1} + q_{i+1} \end{vmatrix}\right) \tag{8}$$

Враховуючи з (4), що $r_i = 1 - p_i - q_i$ розкриємо визначники з (8), в результаті отримаємо:

$$\begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ 0 & 0 & -r_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = -r_i(p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1}), \tag{9}$$

У цьому перетворенні визначника від його другого рядка було віднято перший та результат записано до другого рядка перетвореного визначника:

$$\begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ p_i - p_i & q_i - q_i & -1 + p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_i & q_i & p_i+q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & p_{i+1}+q_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_i & q_i & p_i+q_i \\ 0 & 0 & -r_{i+1} \end{vmatrix} = -r_{i+1}(p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i) \qquad (10)$$

Якщо для (8), (9) та (10) ввести позначення $\Delta_{i,i+1} = p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i$, то тоді отримаємо формулу для обчислення площі чотирикутника $M_i R_i R_{i+1} M_{i+1}$, сторона якого $M_i M_{i+1}$ є дугою кривої *M* (рис.2).

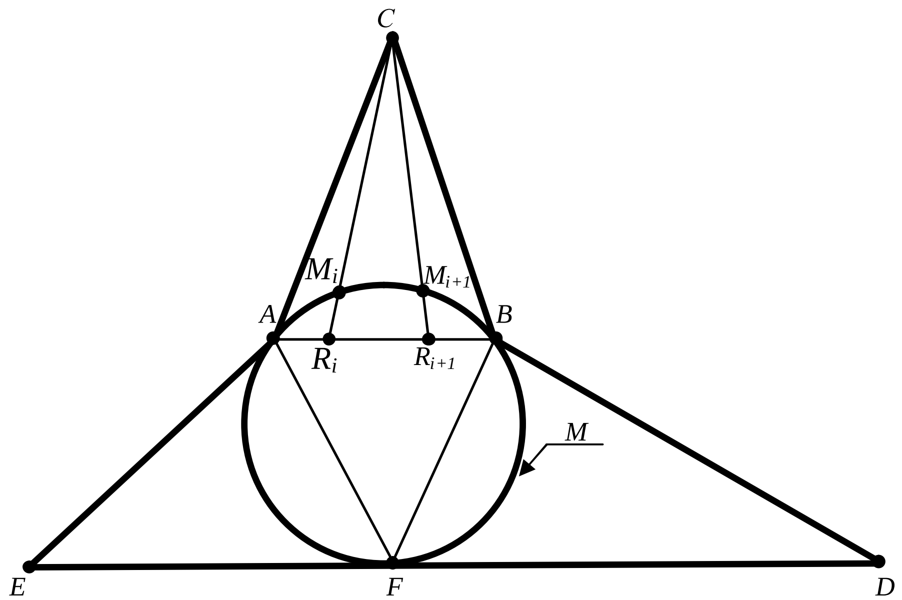

Рис. 2. **Геометрична схема для замкненої кривої M**

Для підвищення точності розрахунків площ необхідно зменшити відстань між точками M_i та M_{i+1}. Тепер треба обчислити площу S_c, що знаходиться між дугою AB та відрізком прямої AB. У відповідності до рис.1 вона буде дорівнювати сумі:

$$S_{i,i+1} = \frac{ab\sin\gamma}{2}\left(\frac{r_{i+1} - r_i(p_{i+1}+q_{i+1})}{(p_i+q_i)(p_{i+1}+q_{i+1})}\Delta_{i,i+1}\right) \qquad (11)$$

$$S_c = S_{i,i+1} + S(AR_iM_i) + S(M_{i+1}R_{i+1}B) \qquad (12)$$

Треба зауважити, що для іншої геометричної схеми права частина з (12) буде мати іншу кількість та якість доданків.

Дотепер було розглянуто визначення площі для дуги AB кривої *M*, заданої точковим рівнянням (1) відповідно до рис.1 для визначення площі S_M, обмеженої замкненою кривою *M*, у відповідності до рис.2, необхідно розглянути ще два симплекси *DBF* та *EFA* і повторити для них алгоритм, аналогічний алгоритму симплекса *CAB*. Тоді площа S_M може бути обчислена:

$$S_M = S_C + S_D + S_E + S_{\Delta ABF} \qquad (13)$$

Розв’язання для іншої геометричної схеми (13) буде мати відповідний вигляд.

Висновки. Розв’язання задачі визначення площі, обмеженої топографічною замкненою плоскою кривою, що представлена у вигляді точкового рівняня, дозволить обчислювати об’єми горбів та западин на рельєфах земельних ділянок.

1. Верещага В.М. Дискретно-параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей. Дис. докт.техн.наук: 05.01.01 – Мелитополь, 1996. – 320с.
2. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении. Дис. докт.техн.наук: 05.01.01 – Макеевка, 1995. – 227с.
3. Конопацький Є.В Геометричні моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша: канд. техн. наук. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012 – 26с.
4. Кучеренко В.В. Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченої множини точок: Мелітополь: ТДАТУ, 2013 – 232с.